АЛГЕБРА
И НАЧАЛА АНАЛИЗА
10

Методическое пособие для учителей

Рекомендовано Министерством народного образования Республики Узбекистан

Новое издание



ТАШКЕНТ – 2022

скачано с сайта www.idum.uz

UO‘K 51(075.3)
51(075.3)
M31

Составители:

Адилбек Заитов, Раъно Хамраева, Бахтиёр Абдиев, Калмирза Сагидуллаев, Умид Рахмонов, Балжан Уринбаева

Международный эксперт:

Марсело Старикофф

Рецензенты:

М. А. Мирзаахмедов – учитель математики специализированной школы имени аль-Хорезми, кандидат физико-математических наук, доцент;

Ж. А. Куйжанов – учитель математики школы №5 Хатирчинского района Навоийской области;

А. К. Кодиров – учитель математики школы №6 Аккурганского района Ташкентской области.

Алгебра и начала анализа 10 класс [Текст] /А.Заитов [и др.] – Ташкент: Республиканский центр образования, 2022. – 192 стр.

Подготовлено совместно с представительством UNICEF в Узбекистане.

Усовершенствовано на основе заключения Института математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан.

Оригинал-макет и концепция дизайна разработаны Республиканским центром образования.

Издано за счёт средств Республиканского целевого книжного фонда.

УСЛОВНЫЕ ЗНАКИ

– лёгкие задания

– задания средней сложности

– сложные задания

– подтемы

ISBN 978-9943-0000-0-0

© Республиканский центр образования, 2022

скачано с сайта www.idum.uz

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ.....5
НАЦИОНАЛЬНАЯ УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА ПО ПРЕДМЕТУ «МАТЕМАТИКА».....7
ПРОГРАММА И РЕКОМЕНДУЕМОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСОВ ПО ПРЕДМЕТУ «АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА» ДЛЯ 10 КЛАССА.....13
ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ ПО ПРЕДМЕТУ «МАТЕМАТИКА».....18

ПОВТОРЕНИЕ

КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЁ ГРАФИК 27
КВАДРАТИЧНОЕ НЕРАВЕНСТВО.....31
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА 36
АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ.....42

ГЛАВА 1. ФУНКЦИИ

ФУНКЦИЯ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ.....46
ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И МНОЖЕСТВО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ 50
АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ФУНКЦИЯМИ 56
СЛОЖНАЯ, ОБРАТНАЯ, ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ.....60
СВОЙСТВА ФУНКЦИИ.....66
ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКА ФУНКЦИИ 73
ЛИНЕЙНОЕ И КВАДРАТИЧНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 79
ПРОЕКТНАЯ РАБОТА.....82
СУММАТИВНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 1.....86

ГЛАВА 2. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.....87
СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.....94
РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА.....100
СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ 105
ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 110
СИСТЕМЫ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.....115
СУММАТИВНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 2.....121

скачано с сайта www.idum.uz

ГЛАВА 3. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ 122
ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 126
ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА 130
ПОНЯТИЕ ЛОГАРИФМА. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ 132
ТОЖДЕСТВЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ 139
ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ 146
СИСТЕМЫ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ 150
ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА 156
ПРИМЕНЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ 161
СУММАТИВНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 3 166

ГЛАВА 4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ 167
ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА, ГРАФИКИ 176
ПРОЕКТНАЯ РАБОТА 183
ПРОЕКТНАЯ РАБОТА 187
СУММАТИВНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 4 189

ГЛАВА 5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ 190
МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ 197
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА 202
СУММАТИВНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 5 210

ГЛАВА 6. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ 211
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ 214
СУММАТИВНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 6 220

ПОВТОРЕНИЕ 221
ПОВТОРЕНИЕ (ОТВЕТЫ) 234

ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ ДЛЯ УЧЕБНИКА «АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА« 10 КЛАСС

ВИДЕОУРОКИ ДЛЯ УЧЕБНИКА «АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА» 10 КЛАСС

ПРЕДИСЛОВИЕ

Уважаемые учителя!

Данное учебное пособие предназначено для учителей математики, и в нём приведены рекомендации по изложению материалов учебника «Алгебра и начала анализа» (далее – учебник) для 10 класса, подготовленного авторами А. Заитовым, Р. Хамраевой, Б. Абдиевым, К. Сагидуллаевым, У. Рахмоновым, Б. Уринбаевой.

Место математики в нашем обществе крайне несравнимо. В данном методическом пособии изложены элементы алгебры, изучающей арифметические и алгебраические действия над числовыми выражениями и переменными величинами, и математического анализа, изучающего правила взаимосвязи переменных величин – функций и их свойства.

Исходя из своего многолетнего опыта, авторы создали учебник с учётом возрастных особенностей учащихся. В целях обеспечения реализации Постановления Президента Республики Узбекистан от 7 мая 2020 года №ПП-4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» темы в учебнике были выбраны на основе плана, рекомендованного Институтом математики им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Министерством народного образования Республики Узбекистан и Республиканским центром образования.

В учебнике по алгебре для 10 класса авторы простым и доступным языком объясняют теоретические знания, практические примеры, математические модели жизненных ситуаций по следующим основным направлениям:

- функция (её свойства, способы задания, область определения, множество значений, её график, арифметические действия над функциями, графическое сложение функций, сдвиг, сжатие, растяжение графика);
- рациональные и иррациональные уравнения, системы рациональных уравнений, системы иррациональных уравнений, рациональные и иррациональные неравенства, системы рациональных неравенств;
- показательные и логарифмические функции (показательное выражение, показательная функция, показательное уравнение, показательное неравенство, понятие логарифма, логарифмическое выражение, упрощение логарифмических выражений, логарифмическая функция, логарифмическое уравнение, система показательных и логарифмических уравнений, показательные и логарифмические неравенства);
- тригонометрические функции (их определение, свойства, периоды, графики), обратные тригонометрические функции (определения, свойства, графики);
- тригонометрические уравнения и их корни, тригонометрические неравенства и их решения;
- теория вероятностей (случайные события, классические, статистические, геометрические определения вероятности).

Следует отметить, что в данном учебнике наряду с основными элементарными функциями (они состоят из 5 классов: степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические) и элементарными функциями (которые образуются путём выполнения конечного числа раз арифметических операций над основными элементарными функциями) также рассматривались функции, не являющиеся элементарными (например, дробная часть числа).

При изучении свойств функций особое внимание уделено использованию их графиков. В учебнике показано жизненное применение каждого вводимого понятия, каждого свойства. Например, задача добычи подземных вод, с которой мы сталкиваемся в повседневной жизни, может быть описана линейной функцией. В учебнике приведены такие понятия как сложная функция двух функций, обратная функция к заданной функции (при условии её существования), четная функция, нечетная функция и периодическая функция. В целях упрощения понимания в некоторых случаях авторы отказались от строгой математической формулировки..

При решении рациональных и иррациональных уравнений, неравенств, их систем использованы понятия равносильных уравнений, равносильных систем уравнений, равносильных систем неравенств, следствия уравнения, следствия системы уравнений, следствия системы неравенств.

Решение неравенства (или их системы) есть множество.

Впервые в учебнике для школьников было разъяснено, что основание степени не может

быть равно 0 и 1 при изучении показательных выражений и функций. Описаны методы решения показательных уравнений и неравенств путём сведения их к равносильным рациональным уравнениям и неравенствам, соответственно.

Понятие логарифма было введено как естественным образом возникающая потребность, даны основные свойства логарифма. Была определена логарифмическая функция, перечислены её свойства и показано, как начертить её эскиз графика. Объяснены методы решения логарифмических уравнений и неравенств приведением их к эквивалентным им системам рациональных уравнений и неравенств.

При описании темы показательных функций было отмечено, что математика может описывать экологические процессы. Кроме того, впервые в школьном учебнике формула расчёта процента ипотечного долга была дана как, решение, жизненной задачи. В учебнике впервые снабжена доказательством формула периода полураспада радиоактивного элемента, которая до сих пор не была обеспечена доказательством не только в школьном курсе математики, но и физики.

Некоторые события, происходящие в природе и обществе вокруг нас, периодически повторяются. Такие процессы называются периодическими. Особое место в учебнике занимают функции, описывающие периодические процессы, – тригонометрические функции. Незаметная небрежность в периодических процессах может вызвать глобальные проблемы. Например, 25 января 2022 года в системе электроснабжения из-за невнимательности произошёл инцидент, называемый Blackout. В результате в ряде стран Центральной Азии отключилось электричество. Причиной этого было явление резонанса (периодических процессов) в электрической системе.

Определения четырёх тригонометрических функций (sin, cos, tg, ctg) в школьном учебнике впервые объединены в одну формулировку.

Дано определение обратных тригонометрических функций (arcsin, arccos, arctg, arcctg).

Преподавание математики играет важную роль в становлении молодежи как личности. У учащегося, способного читать, понимать и решать математические задачи, повышается его уверенность в себе, развивается ответственность и понимание своего места в обществе. Он понимает, что события, происходящие в природе и обществе, подчиняются строгим законам, и даже случайные события поддаются математической интерпретации. Наряду с овладением секретами математики такой школьник учится нести ответственность перед обществом, не только требовать уважать свои права, но и нести ответственность за своё поведение на уровне компетентности.

При описании элементов теории вероятностей в учебнике авторы учитывали вышеизложенное.

При создании учебника авторский коллектив постарался использовать максимально простые способы и методы объяснения, которые были бы приемлемы для учителей математики и учащихся. По каждой теме были даны методические указания; в учебнике приведены решения типичных примеров и задач, остальные снабжены ответами.

В конце данного пособия в качестве дополнительных упражнений к некоторым урокам даны типичные задания из раздела «Повторение» учебника. Если на уроках не хватает времени, эти задания можно дать в качестве домашнего задания. В конце каждой главы приведены образцы контрольных работ по пройденным темам. Уроки работ над ошибками после каждой контрольной работы дают возможность для самостоятельной работы на основе творческой деятельности учителя. В процессе работы над ошибками учитель разъясняет их на основании результатов контрольной работы с целью устранения выявленных пробелов в знаниях учащихся по темам. Учащиеся выполняют задания, аналогичные данным в контрольной работе, и делают выводы.

Некоторые темы в учебнике дополнены QR-кодами. Сканируя их, вы можете изучить новую тему, посмотрев видеоурок по ней. После оглавления в учебнике размещен QR-код развивающих игр и платформы https://phet.colorado. edu/ для учебника «Алгебра и начала анализа» 10 класса. Все эти развивающие игры созданы исходя из тем учебника.

Уважаемые учителя! Данное методическое пособие, созданное для вас, в первую очередь направлено на обеспечение единой образовательной политики нашей страны во всех регионах республики. Надеемся, оно также облегчит ваш тяжелый, но в то же время почетный труд. Пусть вам удастся увидеть вершины успехов ваших учеников.

Авторы

НАЦИОНАЛЬНАЯ УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА ПО ПРЕДМЕТУ «МАТЕМАТИКА»

I. Цели Национальной учебной программы по математике

Цели обучения математике включают в себя:

- обеспечить освоение учащимися знаний и навыков о математических понятиях, свойствах, геометрических фигурах, методах и алгоритмах;
- объяснить роль математики в развитии человека и общества, научить успешно применять математические знания и умения в социально-экономических отношениях, повседневной жизни;
- развивая индивидуальные особенности учащихся, демонстрировать и совершенствовать навыки самостоятельного обучения, творческого, критического мышления и логического анализа, любознательности, решения проблем и создания инноваций;
- учитывая интеграции дисциплин, формировать у учащихся национальные и общечеловеческие ценности, ориентировать их в осознанном выборе профессии;
- формировать и развивать математическое мышление, необходимое для изучения других предметов, требующих математических знаний и умений в будущем.

II. Базовые компетенции, развиваемые в математике

В системе общего среднего образования предусмотрено, что наряду с предметными компетенциями у учащихся формируются базовые компетенции. Целесообразно сосредоточить внимание на формировании базовых компетенций у учащихся путём изучения различных предметов – применять полученные знания и умения в различных жизненных ситуациях.

Коммуникативная компетентность

При формировании коммуникативных компетенций необходимо обучение государственному языку, иностранным языкам, самостоятельному, творческому мышлению, свободному письменному и устному изложению, правильному произношению, интерпретации, свободному общению. В частности, математическая наука имеет свой научный язык, свои понятия, знаки и символы, и общение на этом языке следует рассматривать как фактор формирования коммуникативных компетенций.

Умение работать с информацией

Необходимо регулярно использовать современные информационно-телекоммуникационные средства, расширяющие возможности эффективной работы с информацией. При этом учащимся рекомендуется работать с учебниками, электронными ресурсами и различными учебными материалами, искать и анализировать информацию из различных источников, имеющих отношение к математике, а также соблюдать требования информационной безопасности, использовать программные обеспечения из различных практических пакетов для формирования навыков использования информационных носителей и мобильных устройств (телефон, планшет и другие гаджеты)..

Компетенция саморазвития

При формировании компетентности саморазвития необходимо приобретение качеств, основанных на общечеловеческих ценностях, любви к Родине, знаниях об обществе и

природе, стремлении к новшествам и принятии самостоятельных решений на основе полученных теоретических знаний, быть в курсе прогрессивных и инновационных изменений и быть заинтересованным в них, всегда стремиться к приобретению современных знаний и навыков, учиться использовать их в повседневной жизни. Внимательно изучая математику, учащиеся учатся дисциплине, смотрят на каждую проблему как на математическую и будут настойчивы при её решении.

Социально-эмоциональная и гражданская компетентность

Формирование социально-эмоциональной и гражданской компетентности заключается в приобретении знаний о гражданском долге, социальном и политическом развитии, чрезвычайных ситуациях, экологических проблемах и понимании художественных произведений, и развитии организационных навыков по их сохранению. Математика воспитывает учащихся в духе честности, неравнодушия к несправедливости и верности Родине. Углубленное преподавание математики создаёт основу для развития учащихся как активных граждан общества.

III. Образовательные стандарты «Аль-жабр» по математике (требования к знаниям и умениям учащихся, приобретённым по окончании 10 класса)

Образовательные стандарты для 10 класса по математике состоят из обобщенных требований к знаниям, умениям и компетенциям учащихся общеобразовательных школ по окончании 10 класса, которые подразделяются на стандарты математического содержания и практической деятельности.

IV. Стандарты содержания математики (знания и навыки)

Краткое описание: Понимание основных математических понятий и взаимосвязей и применение их к типичным учебным задачам.

Эти стандарты определяют, что учащиеся должны понимать и уметь делать, изучая математику. Одним из отличительных признаков понимания в математике является способность учащегося обосновать, является ли то или иное математическое выражение истинным или ложным, или откуда берётся то или иное математическое правило, исходя из уровня математического мастерства. В равной степени важны навыки понимания сущности математических понятий и умения выполнять типовые операции, которые оцениваются с помощью стандартных задач определённого уровня сложности.

Стандарты математического содержания выражены в виде обобщённых требований, они охватывают следующие содержательные области и разделы математики (далее для удобства названия областей содержаний и разделов кодируются большими буквами):

- **Числа и операции (SA);**
- **Алгебра и функции (AF);**
- **Геометрия и измерения (GO‘);**
- **Статистика и вероятность (SE);**
- **Математический анализ (MA).**

Область содержания	Разделы области содержания	Краткое описание и код стандарта по разделам
Числа и операции (SA)	Понятие числа	Получение представления о числах и величинах (количествах), знание способов их представлений и систем счета (SA)
	Действия и вычисления	Знание сущности математических операций, умение устанавливать и понимать взаимосвязей между числами и величинами и применение их для решения задач. взаимосвязи расчетов над числами и величинами без затруднений, оценка результата, их подсчет и округление (SA)
Алгебра и функции (AF)	Алгебраические выражения и их замены	С использованием математических знаков и символов умение выразить, понимать и анализировать жизненные ситуации и явления природы, количественные отношения на математическом языке, знать основные алгебраические замены и использовать их при решении задач (AF)
	Отношения и функции	Понимание сущности законов и отношений природы и общества как функции, математическая интерпретация связей между переменными в этих процессах (AF)
	Уравнения и неравенства	Умение использовать стандартные методы решения линейных, квадратичных, рациональных, иррациональных, показательных, логарифмических, степенных и тригонометрических уравнений, неравенств и их систем, и наглядное представление решений (AF)
Геометрия и измерения (GO‘)	Геометрические фигуры	Распознавание плоских и объемных геометрических фигур на чертежах, моделях и в реальности, знание их основных свойств (GO‘)
	Геометрическое мышление и решение задач	Развитие геометрического и логического мышления о свойствах геометрических фигур, использование методов геометрического доказательства и алгоритмы решения задач, рассуждение с математической строгостью (GO‘)
	Геометрические построения	Изображение геометрических отношений в системах координат и других системах представления и определение их геометрического положения, выполнение простых геометрических построений, использование симметрии и замены геометрических фигур (GO‘)
	Измерения и методы измерения	Знание измеряемых элементов различных предметов, единиц измерения, понимание сущности измерительных систем и процессов, использование соответствующих методов измерения, формул, учебных пособий, мультимедийных интерактивных приложений, калькуляторов и измерительных приборов в процессе измерения (GO‘)

Статистика и вероятность (SE)	Элементы теории множеств и математической логики	Знание и умение производить операции над множествами, уметь делать простые логические выводы (SE)
	Статистический анализ данных	Поиск, выявление, сбор необходимой информации, её обработка, интерпретация результатов, презентации с использованием различных средств; выбор и применение соответствующих методов статистической обработки для анализа данных, сделать соответствующие выводы на основе данных, разработка прогнозов и их оценка (SE)
	Основы комбинаторики	Понимать суть задач комбинаторики и использовать алгоритм их решения при разрешении жизненных задач (SE)
	Основы теории вероятностей	Иметь представление о случайных, статистических событиях и процессах, исследовать их; разработка вероятностных моделей, их интерпретация, оценка и их использование (SE)
Математический анализ (MA)	Функция и её приложения	Умение знать, определять основные понятия о функции, её общие свойства и виды, а также уметь распознавать основные элементарные функции, знать их основные свойства, уметь использовать их с уравнениями и неравенствами и решать практические задачи (MA)
	Производная и её приложения	Знать сущность понятий непрерывности и производной функции, понимать геометрический и физический смысл производной, алгоритм проверки функций с помощью производной, уметь использовать их при определении свойств функций, а также при решении практических задач и задач на экстремумы (MA)
	Первообразная функции, определенный интеграл и его приложения	Знать сущность понятий первообразной и определенного интеграла и уметь использовать их при решении различных практических задач (вычисление площади и объема, нахождение совершенной работы) (MA)

V. Стандарты (компетенции) практической деятельности

Краткое описание: умение применять полученные знания и навыки при решении практических задач и в незнакомых ситуациях (компетенции). Эти стандарты также имеют обобщенное содержание, они охватывают следующие направления практической деятельности обучающихся (для удобства использования в дальнейшем эти направления кодируются соответствующими буквами):

- **Рассуждение (MY).**
- **Математическое моделирование (MM).**
- **Решение проблем (MH).**
- **Коммуникация (MQ).**

Вид практической деятельности	Краткое описание практической деятельности	Краткое описание и код стандарта практической деятельности
Рассуждение (MY)	Предоставлять логичные и понятные аргументы, чтобы оправдать, доказать или ответить на мнение других	Логическое рассуждение, догадка, вывод, предоставление доказательства, обоснование и заключение на основе мыслительной деятельности, размышление о обоснованиях и причинах (MY)
		Размышление о применимых определениях, правилах, концепциях, алгоритмах и методах, математических решениях и ошибках (MY)
		Распознавание и использование отношения между математическими понятиями (MY)
		Объединение математических понятий или построение одного над другим для формирования целостного математического понятия. (MY)
Математическое моделирование (MM)	Выражение учебных и жизненных задач на математическом языке, построение их математической модели	Понимание сути проблемной ситуации, её анализ и выявление в ней проблемы (MM)
		Использование различных методов математической интерпретации для объяснения и моделирования явлений и процессов в природе и обществе (MM)
		Выражение проблемы в виде математической задачи, построение её математической модели (MM)
Решение проблем (MH)	Решение задач с помощью математики	Использование изученных математических понятий, фактов, идей, законов, алгоритмов и методов для решения повседневных и практических математических задач (MH)
		Применение для решения задач логического, креативного мышления, математического рассуждения и методов научного исследования: наблюдение, измерение, проведение эксперимента, анализ и синтез, индукция и дедукция, сравнение и аналогия (MH)
		Анализ, выбор и обоснование альтернативных методов и алгоритмов решения задачи (проблемы) (MH)
		Создание и усвоение новых математических знаний в процессе решения задачи (проблемы) (MH)
		Выражение и исследование, математическое обоснование, сравнение и оценка математических гипотез (MH)

		Перенесение математического решения на содержание реальной задачи и интерпретация его применительно к реальной задаче, описанной в математической задаче, оценка совместимости и близости найденного решения с реальным решением задачи (MH)
		Использование возможностей ИКТ в небольших исследованиях, алгоритмах решения, демонстрациях и презентациях проектной работы на основе задач реальных жизненных ситуаций (MH)
Коммуникация (MQ)	Общение на математическом языке, применяя математические понятия, знаки и символы	Сообщение математической идеи устно и письменно, правильное использование математического языка, знаков и символов для общения с другими (MQ)
		Умение понимать, анализировать, оценивать и реагировать на суждения других о математике (MQ)

Стандарты практической деятельности по математике неразрывно связаны со стандартами содержания в каждом классе и соответствуют им, с учетом возрастных физиологических возможностей, умственной и практической деятельности учащихся.

ПРОГРАММА И РЕКОМЕНДУЕМОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСОВ ПО ПРЕДМЕТУ «АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА» ДЛЯ 10 КЛАССА

(3 часа в неделю, всего 102 часа)

Раздел и выделенное время	Темы	Цели обучения (элементы стандарта)
ПОВТОРЕНИЕ **(10 часов)**	**Квадратичная функция и её график.** **Квадратное неравенство и его решение.** **Тригонометрические фигуры.** **Арифметические и геометрические прогрессии.**	Повторение содержаний М9 и подготовка к содержаниям М10
Глава I. ФУНКЦИЯ **(17 часов)**	**Функция** Способы задания функции. Область определения и множество значений функции. График функции. Арифметические операции над функциями. Сложная функция. Обратная функция. Периодические функции. (7 часов)	М10.МА.1. Определяет свойства функций, заданных различными способами, описывает графики элементарных функций. М10.МА.2. Различает сложную функцию, обратную функцию, периодическую функцию и знает их свойства.
	Свойства функции. Четные и нечетные функции. Возрастание и убывание функции. Точки экстремума функции и экстремумы. (3 часа)	М10.МА.3. Определяет четность и нечетность, возрастание и убывание, точки экстремумов и экстремумы функции. М10.МА.17. Находит интервалы монотонности и экстремумы элементарных функций. М10.МА.18.Определяет функцию на основе её графика.
	Элементарные преобразования графика функции. Сдвиг, сжатие, растяжение графика функции. (2 часа)	М10.МА.4. Перемещает, сжимает, растягивает графики функций. М10.МА.19. Определяет функцию на основе её графика.
	Линейное и квадратичное моделирование. (2 часа)	М10.МА.1. Решает жизненные задачи (проблемы) с помощью линейного или квадратичного моделирования.

	Задание STEM (проектная работа). (1 час)	М10.МА.1. Определяет свойства функций, заданных различными способами, описывает графики элементарных функций. М10.МА.17.Находит интервалы монотонности и экстремумы элементарных функций. М10.МА.19. Определяет функцию на основе её графика. М10.ES.5. Формируются компетенции, соответствующие требованиям стандартов практической деятельности на основе полученных знаний и умений в процессе выполнения проектной работы по небольшой учебно-исследовательской теме по заданной проблемной ситуации.
	Суммативная оценка. Контрольная работа № 1. Работа над ошибками (2 часа).	
Глава II. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ **(21 час)**	**Рациональные уравнения и их системы.** Рациональные уравнения. Система рациональных уравнений. (5 часов)	М10.МА.5. Решает простые рациональные уравнения и системы простых рациональных уравнений. М10.МА.11. Решает уравнения и неравенства и их системы, проверяет решение.
	Рациональные неравенства и их системы. Рациональные неравенства. Система рациональных неравенств. (6 часов)	М10.МА.6. Решает простые рациональные неравенства и системы простых рациональных неравенств. М10.МА.11. Решает уравнения и неравенства и их системы, проверяет решение.
	Иррациональные уравнения и их системы. Иррациональные уравнения. Система иррациональных уравнений. (6 часов)	М10.МА.7. Решает простые иррациональные уравнения и системы простых иррациональных уравнений. М10.МА.11. Решает уравнения и неравенства и их системы, проверяет решение.
	Суммативная оценка. Контрольная работа № 2. Работа над ошибками (2 часа).	
	Показательная функция. Показательная функция и её свойства, график. Упрощение показательных выражений. (2 часа)	М10.МА.8. Построить графики показательной и логарифмической функций. М10.МА.19. Определяет функцию на основе её графика.

Глава III. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ **(20 часов)**	**Показательные уравнения.** Показательные уравнения и их решение. (2 часа)	М10.МА.10. Умеет решать простые показательные, логарифмические уравнения, системы показательных и логарифмических уравнений, показательные неравенства. М10.МА.11. Решает уравнения и неравенства и их системы, проверяет решение.
	Показательные неравенства. Показательные неравенства и их виды. (2 часа)	М10.МА.10. Умеет решать простые показательные, логарифмические уравнения, системы показательных и логарифмических уравнений, показательные неравенства. М10.МА.11. Решает уравнения и неравенства и их системы, проверяет решение.
	Логарифмическая функция. Понятие логарифма. Логарифмическая функция и её свойства, график. Тождественные преобразования логарифмических выражений. (4 часа)	М10.МА.9. Умеет тождественно преобразовать логарифмические выражения. М10.МА.19. Определяет функцию на основе её графика.
	Логарифмические уравнения. Решение логарифмических уравнений. (2 часа)	М10.МА.10. Умеет решать простые показательные, логарифмические уравнения, системы показательных и логарифмических уравнений, показательные неравенства. М10.МА.11. Решает уравнения и неравенства и их системы, проверяет решение.
	Логарифмические неравенства. Логарифмические неравенства и их решение. (2 часа)	М10.МА.10. Умеет решать простые показательные, логарифмические уравнения, системы показательных и логарифмических уравнений, показательные неравенства. М10.МА.11. Решает уравнения и неравенства и их системы, проверяет решение.
	Системы показательных и логарифмических уравнений. Системы показательных и логарифмических уравнений и их решение. (2 часа)	М10.МА.10. Умеет решать простые показательные, логарифмические уравнения, системы показательных и логарифмических уравнений, показательные неравенства. М10.МА.11. Решает уравнения и неравенства и их системы, проверяет решение.

	Показательное моделирование. Формула сложных процентов и её применение. Возрастающие процессы. Радиоактивный распад. (2 часа)	M10.MA.12. Вычисляет сложные проценты и умеет использовать их приложения. M10.MA.19. Моделирует проблемы, используя показательные и логарифмические функции.
	Суммативная оценка. Контрольная работа № 3. Работа над ошибками (2 часа).	
Глава IV. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ **(10 часов)**	**Тригонометрические функции.** *Функции y = sinx, y = cosx, y = tgx, y = ctgx и их свойства, графики. Периодические процессы.* *(2 часа)*	M10.MA.13. Строит графики и определяет свойства тригонометрических и обратных тригонометрических функций. M10.MA.19. Определяет функцию на основе её графика. M10.MA.14. Определяет периодические процессы.
	Обратные тригонометрические функции. *Значения arcsina, arccosa, arctga, arcctga.* Функции *y = arcsinx, y = arccosx, y = arctgx, y = arcctgx* и их свойства, графики. (5 часов)	M10.MA.13. Строит графики и определяет свойства тригонометрических и обратных тригонометрических функций. M10.MA.19. Определяет функцию на основе её графика.
	Задание STEM (проектная работа). (1 час)	M10.MA.13. Строит графики и определяет свойства тригонометрических и обратных тригонометрических функций. M10.MA.19. Определяет функцию на основе её графика. M10.ES.5. Формируются компетенции, соответствующие требованиям стандартов практической деятельности на основе полученных знаний и умений в процессе выполнения проектной работы по небольшой учебно-исследовательской теме по заданной проблемной ситуации.
	Суммативная оценка. Контрольная работа № 4. Работа над ошибками (2 часа).	
	Простейшие тригонометрические уравнения. *Уравнения вида sinx=a, cosx=a, tgx=a, ctgx=a.* *(3 часа)*	M10.MA.15. Решает простейшие тригонометрические уравнения и неравенства. M10.MA.11. Решает уравнения и неравенства и их системы, проверяет решение.

ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ ПО ПРЕДМЕТУ МАТЕМАТИКА

I. МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К ПРЕПОДАВАНИЮ МАТЕМАТИКИ

Глава V. **ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА** **(12 часов)**	**Решение тригонометрических уравнений.** Методы решения некоторых тригонометрических уравнений. (3 часа)	M10.MA.15. Решает простейшие тригонометрические уравнения и неравенства. M10.MA.16. Умеет решать некоторые тригонометрические уравнения.
	Простейшие тригонометрические неравенства. Методы решения некоторых тригонометрических неравенств. (3 часа)	M10.MA.15. Решает простейшие тригонометрические уравнения и неравенства. M10.MA.11. Решает уравнения и неравенства и их системы, проверяет решение.
	Суммативная оценка. Контрольная работа № 5. Работа над ошибками (2 часа).	
Глава VI. **ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ** **(8 часов)**	**Случайные события.** Испытание и результат. Достоверные события. Случайные события. Совместные и несовместные события. Зависимые и независимые события. Вероятность случайного события. Противоположное событие и его вероятность. (2 часа)	M10.ES.1. Анализирует элементарные случайные события, строит их модели. M10.ES.2. Получает результаты на основе испытания. Различает типы событий. Анализирует вероятность случайного события, противоположного события и его вероятность.
	Использование формул комбинаторики при вычислениях вероятностей. (2 часа)	M10.ES.1. Анализирует элементарные случайные события, строит их модели. M10.ES.3. Решает задачи, связанные с исчислением высказываний и комбинаторикой.
	Равновозмойные события. Равновозможные события и вычисление их вероятностей. (2 часа)	M10.ES.1. Анализирует элементарные случайные события, строит их модели. M10.ES.4. Вычисляет равновероятные события и их вероятности.
	Суммативная оценка. Контрольная работа № 6. Работа над ошибками (2 часа).	
ПОВТОРЕНИЕ **(4 часа)**	**Примеры и задачи на повторение.** (2 часа)	Повторение содержание M10.
	Практические упражнения и применение. Проверьте свои знания. (2 часа)	Повторение содержание M10.

ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ ПО ПРЕДМЕТУ «МАТЕМАТИКА»

I. МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К ПРЕПОДАВАНИЮ МАТЕМАТИКИ

Методические рекомендации по обучению математике

В современный период развития нашей страны определены новые приоритетные направления образования согласно направлениям мирового образования. Важное значение имеет развитие функциональной грамотности школьников, их активная деятельность в обществе, самоопределение, самосовершенствование и самореализация как основной ориентир повышения качества школьного образования.

На основе анализа передового зарубежного опыта развитие функциональной грамотности учащихся по математике охватывает следующие направления стандартов практической деятельности:

- поиск определений, формул и других фактов, связанных с математикой, в учебниках и справочниках, использование их;
- применение алгебраических знаний, умений и графических навыков в различных жизненных ситуациях;
- сбор данных, анализ, обработка, синтез;
- использование математических формул, самостоятельное выведение формул, выражающих связь между величинами, на основе обобщения некоторых частных случаев;
- использование освоенных алгебраических замен и функциональных графических образов и представлений при изображении и анализе окружающих или релевантных объектов в других дисциплинах;
- умение обосновывать свою точку зрения, участвовать в её обсуждении и делать логически правильный вывод;
- работа с математическим текстом (анализ и извлечение необходимой информации), умение чётко и правильно записывать свои мысли, используя математические термины, знаки и обозначения, а также выражать их устно и письменно;
- решение жизненных задач практического характера, умение пользоваться необходимыми справочниками и вычислительными средствами для их решения;
- анализ таблиц, диаграмм, реальных числовых данных в графическом виде и статистических данных;
- использование современных информационных технологий как средства решения математических задач практического характера.

Для этого при обучении математике рекомендуется обратить внимание на следующее:

- сочетание традиционных и современных методов обучения;
- поощрение и развитие учащихся с помощью тщательно отобранных заданий и упражнений;
- поддержка обучения учащихся посредством оценивания;
- поощрение активного обучения учащихся на основе малых учебных открытий;
- развитие креативного и критического мышления учащихся;
- рразвитие у учащихся навыков совместной работы путём организации работы всего класса, индивидуальной и групповой деятельности;
- правильное и точное формирование математической речи;
- выделение математического содержания и методов при решении текстовых задач и применение их к новой ситуации;
- перевод терминов задачи из текстовой формы на математический язык и раскрытие смысла и сущности этих формоизменений;
- формирование у учащихся навыков творческой работы и создание проблемных ситуаций для совершения активных мыслительных действий на основе дифференцированного подхода, позволяющего более глубоко изучить предмет;

- создание дифференцированных индивидуальных подходов для учащихся в образовательном процессе;
- использование на уроке интерактивных и активных образовательных технологий и таких методов, как «Проект», «Исследование», «Эвристика», «Кейс», «Проблемное обучение».

Исходя из вышеизложенного, рекомендуется обратить внимание на следующие методические аспекты в обучении математике:

1. Суть учебного процесса не в усвоении большого количества учебного материала, а в том, насколько глубоко учащиеся понимают вводимые математические термины и факты. С обычными, особенно с нашими школьными программами по математике дело обстоит наоборот: нагрузка огромная, тем слишком много, а времени мало. В результате возможности для углубленного изучения этих тем будут ограничены. Каждая тема должна быть изучена глубоко. Учащиеся должны неоднократно обращаться к ранее изученной теме не для повторения ее, а для более глубокого её изучения. Необходимо поддерживать высокий уровень успеваемости учащихся посредством внеурочной деятельности. В классе не должно быть отсталого ученика, который не усвоил предмет. Все внимание должно быть обращено на то, чтобы все учащиеся в той или иной мере овладевали предметом. Учащиеся, уже освоившие какой-то уровень, переходят к более глубокому изучению темы, пока другие не достигнут этого уровня.

2. Начинать учебный процесс необходимо с конкретного практического опыта и двигаться в сторону абстрактных понятий. Изучение понятий проводится в три этапа.

На первом этапе учащиеся занимаются различной практической деятельностью, связанной с вводимым понятием, пытаются трогать руками различные материальные предметы, связанные с понятием, или изготавливают из них различные модели.

На втором этапе они выражают новое понятие с помощью символов. Они изображают их на различных картинках, схемах или рисунках.

Только после этого будет пройден третий этап, абстрактное определение нового понятия, математическое представление и обозначения. Другими словами, знакомство с математическими понятиями начинается с наглядного примера, на основе которого абстрактному понятию даётся возможность «схватить» и «увидеть».

Ход обучения от практического опыта к отвлечённым понятиям создаёт определённые ассоциации (яркие, глубокие и стойкие впечатления в памяти) по каждому предмету. При запоминании этих впечатлений будут вспоминаться различные аспекты предмета.

Ориентирование учебного процесса на практическую работу с самого начала повышает мотивацию (интерес) к обучению и знание заранее, для чего изучается то или иное математическое понятие и когда и где оно необходимо в жизненных ситуациях. Это показывает привлекательность, необходимость и пользу математики в жизни.

3. Особое внимание следует уделить математическому моделированию. Условие задачи визуализируется. Моделируется задача и организуется удобное использование данных, поэтапно приступая к решению задачи.

4. Большое внимание следует уделять совместному обучению и взаимодействию. При решении задач учащимся предоставляется возможность высказывать математические понятия и своё мнение по проблемам, обсуждать их вместе, а также выслушивать мнения других. В результате учащиеся лучше усваивают понятие, учатся правильно пользоваться языком математики, а в ряде случаев понимают, что решений той или иной задачи может быть несколько. Каждый раз, когда учащиеся решают задачу, их следует поощрять к диалогу со своими одноклассниками о смысле задачи и способах ее решения. Это, в свою очередь, способствует тому, что они лучше запоминают тему и способы решения проблем. Также необходимо организовать для учащихся решение задачи в команде в небольших группах по несколько человек, рассказать друг другу, как они поняли тему, обсудить решения и выполнить командную работу.

5. Учеников нужно учить не запоминать, а решать задачу. Урок рекомендуется начинать не с правила решения задачи нового типа, а непосредственно с решения незнакомой задачи. Учащиеся интуитивно пытаются решить проблему, основываясь на своих предыдущих знаниях и навыках. Они вместе рассуждают, делают ошибки и работают над ними, постепенно приближаясь к правильному решению. На этом этапе учащиеся на собственном опыте узнают, что делать ошибки не так уж и плохо, что процесс анализа и проверки различных неправильных решений (небольшое исследование) постепенно приведёт их к правильному решению.

➢ *Компетентностный подход к математическому образованию*

Компетентностный подход к математическому образованию предполагает приобретение учащимися различных навыков, позволяющих эффективно действовать в повседневных жизненных ситуациях, связанных с профессиональной и личной деятельностью. Соответственно, в компетентностном подходе внимание сосредоточено на усилении практического и прикладного направлений математического образования.

При организации занятий по математике необходимо уделять больше внимания практике, чем теории, и в некоторой степени отказаться от подхода, основанного на обеспечении учащихся готовыми учебными материалами. На уроках математики рекомендуется использовать больше интерактивные методы, такие как «Кейс», «Исследование», «Проект», «Маленькие учебные открытия». При формировании малых исследовательских умений у учащихся необходимо использовать такие методы научного исследования, как наблюдение, эксперимент, измерения, анализ и синтез, индукция и дедукция, сравнение и аналогия. Важно не только формировать у учащихся знания и умения, но и приобретать компетенции по их применению в жизненных ситуациях.

➢ *STEAM – это технология творчества*

Образовательный проект – это форма организации обучения, являющаяся долгосрочным процессом, направленным на более глубокое освоение изученной темы или раздела, позволяющая подход к учебе на основе опыта и практической деятельности, требующая использования исследовательских методов. При реализации данной технологии учащиеся выполняют такие задачи, как разработка проектов, изготовление различных технических устройств, создание модели устройства на основе проекта и использование её на практике, выявление и устранение её недостатков.

➢ *Проектная работа – отражение практической деятельности*

Проектная работа была включена в учебные программы с целью укрепления интереса учащихся к изучению общеобразовательных предметов путём формирования базовых и практических компетенций, проведения небольших учебных исследований. Это не только повышает качество усвоения конкретного учебного предмета, но и открывает возможности междисциплинарности и связи учебного предмета с повседневной жизнью, повышает эффективность образования.

Образовательный проект – это форма организации обучения, являющаяся долгосрочным процессом, направленным на более глубокое освоение изученной темы или раздела, позволяющая подход к учебе на основе опыта и практической деятельности, требующая использования исследовательских методов.

Проектирование – это деятельность, изменяющая проблему, которая включает в себя хорошо упорядоченную последовательность действий, приводящую к реалистичному результату.

В настоящее время в образовательной практике используются различные виды образовательных проектов. По типу ведущей деятельности проекты делятся на информационные, практические и исследовательские.

В учебном проекте наибольшее внимание уделяется развитию творческих способностей учащихся. Именно проекты позволяют учащимся проявить себя и создать произведения различных жанров. Также проекты развивают творческие способности учащихся, повышая их статус в классе, позволяя проводить са-

мооценку. Любая творческая работа требует презентации и обратной связи с коллективом класса.

Поэтому проекты оказывают большое влияние на развитие практических компетенций учащихся, таких как работа с данными, математическое моделирование, решение задач, рассуждения и общение.

➢ *Организация деятельности учащихся по проектной работе*

Учащимся рекомендуется выполнять только один проект по интересующему их предмету или области обучения в течение учебного года. Темы проектной работы выбираются учителями как проблемная ситуация или случай в рамках одного или нескольких учебных предметов. Учащиеся могут работать индивидуально или в группах по 3-4 человека в зависимости от их интересов. Работа над проектом завершается защитой, проводимой в конце учебного года. Защита может проходить в форме конференции в рамках одной или нескольких учебных тем.

Индивидуальная или групповая работа учащихся над проектной работой может состоять из этапов разработки, включающих в себя следующие виды учебной деятельности:

- *подготовительный этап:* планирование собственной исследовательской деятельности, мотивация, определение проблемной ситуации, выбор темы исследования;
- *стадия проектирования:* определение цели проекта, составление чёткого плана реализации мероприятий, разделение задач между собой;
- *практический этап:* исследование проблемы, сбор и обработка необходимых данных, создание математической модели задачи, применение математики, выявление альтернативных решений и выбор наиболее оптимального решения, его обоснование;
- *этап анализа и интерпретации:* проведение опросов или экспериментов, при необходимости сопоставление запланированной работы и полученных результатов, анализ, интерпретация применительно к реальной проблеме, обобщение и вывод;
- *контрольно-оценочный этап:* анализ и оценка собственной деятельности, анализ положительных результатов и допущенных ошибок, поиск способов исправления ошибок, внесение изменений в проект применительно к реальной ситуации;
- *этап оформления результатов:*подготовка отчета о результатах проектной работы;
- *заключительный этап:* подготовка презентации к защите проектной работы и её защита.

Учащиеся обычно проводят исследования по проектной работе во внеклассной деятельности. В часы занятий, указанные в программе, они обсуждают образцы из различных проектных работ, совместно работают в группах над конкретной проектной работой, получают необходимые консультации.

Как видно из вышеизложенного, деятельность учащихся в проектной работе принципиально отличается от традиционного обучения. Потому что при этом, во-первых, знания учащимся не даются в готовом виде, а в виде задачи, а учащиеся решают ее самостоятельно. Знания становятся инструментом для решения проблем, а не целью образования. Учащиеся чувствуют, насколько необходимо им получение новых знаний, что приводит к значительному росту мотивации. Повысится их образовательная и практическая активность. В первую очередь повышаются уровни самостоятельной работы. Разделившись на малые группы, учащиеся выявляют проблему, определяют, какие ресурсы и знания необходимы для ее решения, работают с ними и обобщают варианты полученных выводов. В этом случае преподаватель является не безмолвным наблюдателем, а дает необходимые советы и оказывает помощь учащимся..

II. ИНТЕГРАЦИЯ МАТЕМАТИКИ С ДРУГИМИ ПРЕДМЕТАМИ

В преподавании математики большое значение имеет не только её внутренняя интеграция между разделами, но и внешняя интеграция, то есть с предметами, входящими в STEAM или аналогичные блок-модули.

В частности, важными считаются тесные связи математики со следующими учебными предметами:

➢ *Математика и естественные науки*

Связь между математикой и естественными науками строится на моделировании, измерениях, опыте, исследованиях, эмпирических рассуждениях. В естественных науках и математике учащиеся разрабатывают модели, которые представляют величины, отношения и законы природы. Сначала их знакомят с измерением с использованием различных нетрадиционных единиц, а затем с использованием стандартных единиц. Затем они рассматривают неточность и надежность измерений. Учащиеся собирают, анализируют и представляют качественные и количественные данные различными способами. Они приобретают навыки анализа данных и выявления различных закономерностей на основе числовых данных и графиков.

При изучении физики учащиеся учатся понимать природные явления и основные физические процессы, а также применять математические формулы. Многие задачи по физике требуют навыков составления уравнений или системы уравнений и умения работать с ними. В обучении физике математика не только используется как аппарат вычислений, но и позволяет делать выводы о природе действительности и явлений с помощью математических рассуждений, думать о физических явлениях, исследуя их и решая математические уравнения.

Умение логически мыслить, стимулировать умственное развитие учащихся в процессе анализа физических задач на уроках математики предполагает развитие мышления относительно единой картины мира наряду с формированием общечеловеческих ценностей, а также формирование умения использовать полученные знания для решения жизненных задач, в повседневной деятельности.

Учебный предмет биология формирует у учащихся представления об объектах и системах живой природы, о связях живой и неживой природы. При этом у учащихся формируется позитивное отношение к окружающей живой природе, сохранению природного разнообразия, а также чувство ответственности. Интеграция этих двух предметов обеспечивается за счет анализа насущных вопросов о биологических законах и моделях живой природы на уроках математики.

Химия формирует у учащихся способность чувствовать органические и неорганические вещества и структуры как объекты природы. На уроках математики путем анализа геометрических, качественных и количественных величин, относящихся к составу веществ и структур, путем изучения, исследования и заключения об их химических свойствах обеспечивается органическая связь между этими двумя предметами.

Школьный курс географии формирует у учащихся систематическое и совместное ощущение предметов, созданных в результате даров природы и хозяйственной деятельности человека. На уроках математики связь между этими двумя предметами определяется путем решения и анализа жизненных задач, связанных с географическими объектами.

➢ *Математика и цифровые технологии*

Связь между математикой и цифровыми технологиями основана на данных, вычислениях и алгоритмическом мышлении. Компетентность в использовании информационных и коммуникационных технологий (ИКТ) включает обучение и умелое, а также творческое применение этих технологий в повседневной жизни. Учебный предмет «Информатика и информационные технологии» создает большие возможности для повышения эффективности процесса обучения математике за счет использования различных форм ин-

формационно-коммуникационных технологий и компьютерной техники. В процессе обучения учащиеся развивают свои навыки по ИКТ путем поиска, создания и обработки информации, совместной работы и обмена информацией и идеями, оценивая и совершенствуя свою деятельность с использованием мультимедийных компьютерных технологий, программного обеспечения и приложений. Создание и проектирование алгоритмов в математике, реализация проектов – неотъемлемая часть встроенного подхода к вычислениям в образовании и проведению экспериментов в математике. Цифровые технологии дополняют обучение, основанное на проведении экспериментов в рамках математических проектов, и способствуют развитию навыков вычисления и алгоритмического мышления.

➢ *Математика, дизайн и технологии*

Дизайн и технологии дают учащимся возможность интерпретировать и использовать математические знания и навыки в различных жизненных ситуациях. Учащиеся используют числа для количественной оценки и измерения, интерпретации статистических результатов и выводов. Они просчитывают идеи в процессе работы и записывают их с помощью чисел. Они используют числа в разработке, улучшении и тестировании идей, а также в управлении проектами. Они используют трехмерные модели, создают точные технические чертежи, работают с цифровыми моделями, используют количественные рассуждения для разработки и создания лучших решений, а также в процессе принятия решений. Компетенции, приобретенные в рамках учебного предмета технологии, важны в процессе обучения математике для ориентирования учащихся на профессию, развития их навыков технического творчества, формирования навыков подготовки творческого проекта.

➢ *Математика и искусство*

Сочетание математики и искусства строится на понимании законов, измерений, пространственного воображения и мышления. В математике учащиеся используют эти знания при решении задач и моделировании. В искусстве также используются и математические знания при создании, интерпретации, анализе и изучении произведений искусства. Математика и искусство позволяют учащимся исследовать и наблюдать естественную и искусственную среду. Учащиеся могут передавать свои математические знания с помощью визуальных, аудио и кинестетических форм искусства. Им предоставляется возможность применить математическое понимание при использовании конкретных художественных процессов или практик. Например, в музыке учащиеся могут применить свои знания о паттернах и алгоритмах к композиции.

➢ *Математика и гуманитарные учебные предметы*

Сочетание математики и гуманитарных предметов обращает внимание на финансовую грамотность и анализ данных исследований. Оно включает в себя понимание принципов финансового управления для принятия финансовых и деловых решений.

Компетенции, которые формируются посредством родного языка и литературы, иностранных языков имеют важное значение в обучении математике, развитии творческого мышления учащихся, формировании навыков беглого выражения своих взглядов в письменной и устной форме, в правильном использовании научных терминов, а также играют важную роль в обучении свободному общению во время дискуссий.

Предмет «История» непосредственно связан с предметом «Математика». Исторические сведения имеют большое значение для показа влияния научных достижений на развитие производственных сфер, экономических и социальных отношений, окружающей среды. Учащиеся учатся представлять, интерпретировать, анализировать и представлять исторические данные в числовом и графическом виде. Они работают с численными понятиями, связанными с клетками, масштабом, расстоянием, площадью и проекциями при построении и интерпретации карт.

III. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ДОСТИЖЕНИЙ УЧАЩИХСЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Оценка

Оценка – важная и необходимая составляющая образовательного процесса, заключающаяся в сборе и анализе данных о деятельности учащихся на текущем и завершающем этапах обучения.

Цель, задачи, предмет, объект, принципы, методы, формы и средства оценивания должны быть понятны всем субъектам образовательного процесса – администрации школы, учителям, родителям и учащимся.

Система оценок является основным средством измерения достижений и диагностики проблем в обучении. Она позволяет определить качество образования, соответствие мировым стандартам, принимать ключевые решения по совершенствованию стратегии и тактики обучения, а также современные задачи в сфере образования, содержание образования и формы, оценивающие ожидаемые результаты образования.

На самом деле *оценка* представляет собой процесс соединения результатов и запланированных целей.

Система оценок должна:

- позволять определить, насколько учащийся успешно усвоил учебный материал или сформировал практические навыки;
- показывать динамику (изменения) успешности учащихся в различных областях познавательной (учебной) деятельности;
- основываться на механизме, который мотивирует, развивает и помогает учащимся в самооценке;
- обеспечить отношения «учитель – ученик», «родитель – классный руководитель», «администрация школы – педагогический коллектив».

Формативная и суммативная оценка

Оценка включает формативную (формирующую) оценку или текущую оценку и суммативную (суммарную) или промежуточную (итоговую) оценку.

Формативная оценка предназначена для определения уровня усвоения знаний и умений на уроках или дома. Он осуществляется в различных формах, позволяет учителю и ученику корректировать свою деятельность, устранять возможные проблемы и недостатки. Формативные оценки в суммативных, четвертных и итоговых оценках не учитываются.

При формативной оценке делаются письменные или устные заметки о содержании и правильности работы. Результаты могут быть не зарегистрированы изначально. В этом случае они обсуждаются с учеником и заносятся в отдельную тетрадь учителя. На основе замечаний учителя учащиеся проверяют свою работу и исправляют свои ошибки. Только после этого выставленные оценки можно оформлять в журнале.

Суммативная оценка предназначена для определения уровня овладения знаниями и умениями, которые должны быть сформированы после завершения изучения всего материала текущего учебного раздела предмета.

Суммативная оценка проводится по результатам оценочной работы, такой как тестовое испытание, контрольная работа, проектная работа. Баллы, выставленные за суммативную оценку, являются основанием для определения четвертных и годовых итоговых оценок по предмету.

Суммативная оценка основывается на критериях. Все участники образовательного процесса: учащиеся, учителя, родители – должны быть заранее проинформированы о критериях оценок. Критерии оценок также являются неотъемлемой частью формативной оценки. При формативной оценке критерии оценок ориентированы на конкретную часть учебного материала (тему или раздел), а при суммативной оценке они рассматриваются в широком масштабе.

В конце изучения тематического блока или главы преподаватель проводит суммативную

оценку. Теперь необходимо выполнять такую работу с использованием критериев оценки. Учителю следует запланировать количество контрольных работ в течение четверти. Количество суммативных оценок должно быть не менее двух в течение четверти. Данные контрольные работы будут состоять из заданий, предназначенных для оценки знаний и умений учащихся по блоку заданных тем. Контрольные работы должны по мере возможности полностью охватить содержание тем изучаемой главы на основе стандартных требований. Учитель должен выбирать задания таким образом, чтобы они позволяли проверить не только усвоение теоретического материала, то есть уровень знаний, но и уровень применения учащимся полученных знаний. Также необходимо предложить учащимся задания третьего уровня на рассуждения. Оценки, полученные в результате контрольной работы, заносятся в журнал с исправлениями после работы над ошибками на следующем занятии.

Ежечетвертная итоговая оценка рассчитывается как среднее арифметическое формативной и суммативной оценок. Годовая итоговая оценка вычисляется как среднее из 4 ежечетвертных оценок и оценки проектной работы. Если в конце года также проводится предметный экзамен (или итоговый контроль), то годовая оценка рассчитывается как среднее арифметическое четвертных оценок, средней оценки за проектную работу и оценки за экзамен (или итоговый контроль).

Задания на суммативные оценки

Суммативную оценку рекомендуется проводить объективно с помощью комиссии, формируемой администрацией образовательного учреждения. Условия оценки, критерии, образцы заданий и инструкции по оценке должны быть подготовлены заранее и оглашены учащимся, их родителям и учителям в начале учебного года.

Суммативная оценка может состоять из двух частей:

– *тестовое задание;*
– *письменная работа.*

Тестовое задание рассчитано на 45 минут и состоит из 15-25 тестовых заданий.

Тестовое задание может состоять из следующих типов:

- закрытый тест с четырьмя вариантами ответа, один правильный ответ;
- закрытый тест с более чем четырьмя вариантами ответов и несколькими правильными ответами;
- закрытый тест, который соответствует четырем правильным ответам на четыре вопроса;
- закрытый тест, состоящий из четырех вопросов, на каждый из которых можно ответить «верно» или «неверно«;
- открытый тест с краткими ответами (проблема или вопрос, на который учащимся предлагается написать только ответ).

Тестовое задание обычно проводится для определения того, достигли ли учащиеся 1-го и 2-го уровней усвоения. Соответственно, каждый вопрос теста оценивается в 1 или 2 балла.

Письменная работа состоит из открытого теста с развернутыми ответами, т.е. полноценных математических задач, предназначенных для детального решения. Письменная работа обычно рассчитана на 45 минут, и рекомендуется, чтобы она состояла из 3-х вопросов следующего содержания:

- пример, который необходимо решить на основе алгебраического алгоритма, или задача на вычисления;
- пример или задача, связанная с алгебраическими рассуждениями;
- вопрос создания математической модели проблемы, связанной с жизненной ситуацией, и её решения.

Письменная работа обычно проводится, чтобы определить, достигли ли учащиеся 2-го и 3-го уровня усвоения. Критерии оценки письменной работы создаются отдельно по каждому её заданию, а баллы распределяются, исходя из уровня сложности заданий. Ниже приведены критерии оценки письменных работ и соответствующие максимальные оценки:

Критерии оценки	Балл
Решение, рисунок, чертеж или график, выполненные без ошибок.	5
Задание обосновано и полностью решено, но допущены 1-2 негрубые ошибки и небольшие погрешности в вычислениях.	4
Задание выполнено не полностью, а также имеются 3-4 негрубые ошибки и неточности в вычислениях.	3
Задание, данное по теме, не выполнено	2

Критерии оценки проекта

Подробная информация о проектной работе была дана выше. Деятельность учащихся над проектом будет оцениваться вместе. Эта деятельность оценивается по 100-балльной шкале и преобразуется в оценки по вышеуказанной шкале. Каждый учащийся получает общую оценку за проектную работу. Ниже приведены критерии оценки проектной работы и соответствующие им максимальные баллы:

№	Критерии оценки	Баллы
1.	Значимость и актуальность изученных проблем в проектной работе, их соответствие изучаемой теме	5
2.	Соответствие построенной математической модели изучаемой задаче	10
3.	Согласованность используемых методов исследования и способов обработки полученных результатов с изучением проблемы	20
4.	Ответственный и достаточно глубокий подход к проблеме, а также применение знаний из других учебных предметов	20
5.	Обоснованность промежуточных и заключительных выводов, близость результатов к решению задачи	10
6.	Совместная деятельность участников проекта	10
7.	Качество оформления результатов выполненного проекта	5
8.	Качество презентации, возможность ответить на вопросы рецензентов, обоснованность ответов каждого участника группы	20
	Всего	100

ПОВТОРЕНИЕ

КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

Цель урока: Познакомить учащихся со свойствами квадратичной функции и научить создавать ее график.

Все учащиеся	Знают значение и применение терминов «квадратичная функция», «парабола», «вершина параболы». Находят координаты вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ точки пересечения её с координатными осями. Могут определить направление ветвей параболы $y = ax^2 + bx + c$ Умеют строить график функции $y = ax^2 + bx + c$
Большинство учащихся	Могут применять свойства функции $y = ax^2 + bx + c$ Умеют представить квадратичную функцию через координаты вершины параболы $y = a(x + x_0) + y_0$.
Некоторые учащиеся	Могут решать задачи, составляя квадратичные функции и применяя их свойства.

Активизирующие вопросы

1. Как решить квадратное уравнение?
2. Сколько корней может иметь квадратное уравнение?

Допустимые ошибки и рекомендации по их устранению

Алгоритм построения графика квадратичной функции можно использовать не только для функции вида $y = ax^2 + bx + c$, но и для любых функций $y = ax^2 + bx$, $y = ax^2 + c$, $y = ax^2$.

Учащиеся могут спутать интервалы возрастания и убывания, а также множество значений квадратичной функции. Интервалы возрастания и убывания отсчитываются по оси Ox.

Домашнее задание

5, 6(c, f), 7(c), 8(d, h), 9(c), 13, 16.

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

Определение квадратичной функции

Определение

Функция вида $y = ax^2 + bx + c$ называется квадратичной функцией, где a, b, c – заданные действительные числа, $a \neq 0$, x – действительная переменная.

Например, следующие функции являются квадратичными функциями:
$y = 3x^2 + 2x - 1$, $y = -4x^2 - 5x$, $y = 6x^2 - 3$, $y = 4x^2$, $y = 2 - x^2$.

Свойства квадратичной функции

1. Область определения:

$D(y)=(-\infty;\infty)$.

2. Множество значений:

a) если $a>0$, то $E(y)=[y_0;\infty)$.

b) если $a<0$, то $E(y)=(-\infty;y_0]$.

3. Наибольшее и наименьшее значения:

a) если $a>0$, то при $x=x_0$ функция достигает своего наименьшего значения, равного $y_0=ax_0^2+bx_0+c$. В этом случае функция не имеет наибольшего значения.

b) если $a<0$, то при $x=x_0$ функция достигает своего наибольшего значения, равного $y_0=ax_0^2+bx_0+c$. В этом случае функция не имеет наименьшего значения.

4. Нули функции:

a) если $D>0$, то квадратичная функция имеет два различных нуля: $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ и $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$.

b) если $D=0$, то квадратичная функция имеет единственный ноль: $x=\dfrac{-b}{2a}$.

c) если $D<0$, то квадратичная функция не имеет нулей.

5. Интервалы монотонности:

a) если $a>0$, то функция $y=ax^2+bx+c$ убывает на промежутке $(-\infty;x_0]$ и возрастает на промежутке $[x_0;\infty)$.

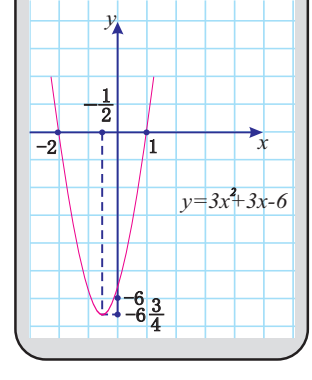
b) если $a<0$, то функция $y=ax^2+bx+c$ возрастает на промежутке $(-\infty;x_0]$ и убывает на промежутке $[x_0;\infty)$.

Пример 1. Пусть дана квадратичная функция $y=3x^2+3x-6$. Напишите её свойства и постройте график.

Решение.

1. Область определения: $D(y)=(-\infty;\infty)$.
2. Найдём $x_0=-\dfrac{1}{2}$ и $y_0=-6,75$. Так как $a=3>0$, то множество значений $E(y)=[-6,75;\infty)$.
3. Функция достигает наименьшего значения при $x=-\dfrac{1}{2}$: $y=-6,75$. Функция не достигает наибольшего значения.
4. $D=81>0$. Следовательно, функция имеет два различных нуля: $x_1=1,\ x_2=-2$.
5. $y>0$ при $x\in(-\infty;-2)\cup(1;\infty)$ и $y<0$ при $x\in(-2;1)$.
6. Функция не является ни чётной, ни нечётной.
7. Функция убывает на промежутке $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]$ и возрастает на промежутке $\left[-\dfrac{1}{2};\infty\right)$. График функции приведён на рисунке 5.

Рисунок 5



ПРИМЕРЫ

1. Какая из следующих функций является квадратичной?

a) $y=\frac{1}{3}x+2$ b) $y=-x^2+5x+1$ c) $y=x^2-x^3$ d) $y=x^2$

2. Чему равно значение функции $y=4x^2+7x-5$ при $x=-3$?

3. При каких значениях x значение функции $y=-3x^2+x+1$ равно –1?

4. При каких значениях x определена функция $y=-5x^2+x+\sqrt{7}$?

5. Является ли нулем число –5 функции $y=x^2-5x$?

6. Постройте графики функций.

a) $y=x^2$ b) $y=-x^2$ c) $y=3x^2$

d) $y=-3x^2-5$ e) $y=x^2-2x$ f) $y=-2x^2+5x$

7. Найдите нули функций.

a) $y=2x^2+5x+2$ b) $y=3x^2+10x+3$ c) $y=-2x^2+x-5$

8. Найдите множество значений функций.

a) $y=x^2+2$ b) $y=(x-4)^2-1$ c) $y=(x-5)^2+3$ d) $y=3-4x^2$

e) $y=3x-x^2$ f) $y=3x^2+2x$ g) $y=2x^2-8x+19$ h) $y=-3x^2-12x+1$

9. Определите значение x, при котором функция принимает своё наибольшее (или наименьшее) значение. Вычислите значение функции.

a) $y=x^2+9x+34$ b) $y=-9x^2-3x+7$ c) $y=-2x^2-5x+1$

10. При каких значениях t функция $y=2x^2-tx+8$ не имеет нулей?

11. При каких значениях x значения функции $y=5x^2-4x-1$ отрицательны?

12. Принимает ли функция $y=x^2+6x+13$ отрицательные значения?

13. Принимает ли функция $y=-x^2-4x-5$ положительные значения?

14. Постройте график функции $y=6x^2+7x+1$ и по графику укажите те значения x, при которых функция принимает положительные (соответственно, отрицательные) значения.

15. Постройте график функции $y=-x^2+4x-3$. По графику укажите интервалы возрастания и убывания.

16. При каких значениях x значения функций $y=x^2-22x+27$ и $y=2x^2-20x+3$ равны?

17. Запишите уравнение параболы, если известно, что она проходит через точку (–1; 6), а точка (1; 2) – её вершина.

18. Найдите p и q, если вершина параболы $y=x^2+px+q$ находится в точке $A(1;-2)$.

19. Найдите a, b, c, если вершина параболы $y=ax^2+bx+c$ находится в точке $M(-1;-7)$ и пересекается с осью ординат в точке $N(0;-4)$.

20. Найдите функцию $y=ax^2+bx+c$, если парабола проходит через точки $A(1;4)$, $B(-1;10)$, $C(2;7)$.

Решение: Подставляя координаты заданных точек вместо x и y, составляется система уравнений

$$\begin{cases} a+b+c=4 \\ a-b+c=10 \\ 4a+2b+c=7 \end{cases}$$

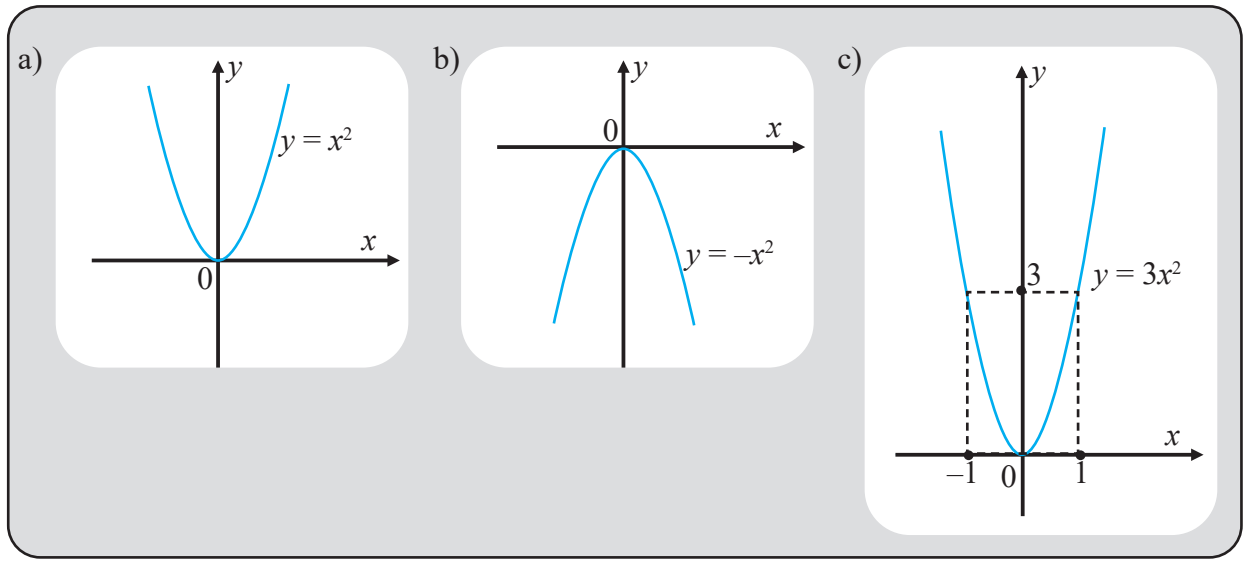
Решая ее, находим, что $a=2,\ b=-3,\ c=5$.

Ответ: $y=2x^2-3x+5$

ОТВЕТЫ

1. a)не будет; b) будет; c) не будет; d) будет. **2.** 10 **3.** 1; $-\frac{2}{3}$ **4.** $x \in R$ **5.** не будет

6.



7. a) $-2; -\frac{2}{3}$ b) $-3; -\frac{1}{3}$ c) $x \in \varnothing$

8. a) $[2; \infty)$ b) $[-1; \infty)$ c) $[3; \infty)$ d) $(-\infty; 3]$ e) $(-\infty; 2{,}25]$

f) $\left[-\frac{1}{3}; \infty\right)$ g)$[11; \infty)$ h) $(-\infty; 13]$

9. a) –4,5 b) $-\frac{1}{6}$ c) $-\frac{5}{4}$ **10.** (–8; 8) **11.** $\left(-\frac{1}{5}; 1\right)$ **12.** нет

13. нет **14.** y >0 **при** $x \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{6}; \infty\right)$, y <0 при $x \in \left(-1; -\frac{1}{6}\right)$

15. Интервал возрастания: $(-\infty; 2]$, Интервал убывания: $[2; \infty)$ **16.** 4; – 6 **17.** $y=x^2-2x+3$

18. $p=-2,\ q=-1$ **19.** $a=11,\ b=22,\ c=4$ **20.** $y=2x^2-3x+5$

КВАДРАТИЧНОЕ НЕРАВЕНСТВО

Цель урока: Научить учащихся решать квадратные неравенства, проверять их решение.

Все учащиеся	Решают квадратное неравенство: разлагая на множители и используя знак произведения; путем построения графика квадратичной функции; методом интервалов.
Большинство учащихся	Находят соответствующее условию значение параметра в заданном параметрическом неравенстве.
Некоторые учащиеся	Могут решать задачи, используя квадратное неравенство.

Активизирующие вопросы

1. Запишите квадратное неравенство, не имеющее решения.
2. Напишите квадратное неравенство, решение которого состоит из всех действительных чисел.
3. Запишите неравенства в числовых интервалах.
4. Запишите двойное неравенство в виде числового интервала.

Допустимые ошибки и рекомендации по их устранению

Не следует делать вывод, что данное неравенство не имеет решения, если квадратный трехчлен не разлагается на множители. Это означает только то, что квадратный трехчлен не обращается в ноль. Решением таких неравенств является либо множество всех действительных чисел, либо пустое множество.

Домашнее задание

2(d), **3**(d), **4**(d, g, h, i, m), **5**(d), **7**, **8**(d, h), **9**(d), **12**(c).

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

Определение

Если в левой части неравенства находится квадратичный трёхчлен, а в другой части – ноль, то такое неравенство называется квадратичным (или неравенством второй степени одной переменной).

Способ 1. Решение квадратичного неравенства приведением в систему линейных неравенств

Пример 1. Решить неравенство $x^2-5x+6<0$.

Решение. Разложим левую часть на множители $(x-2)(x-3)<0$.

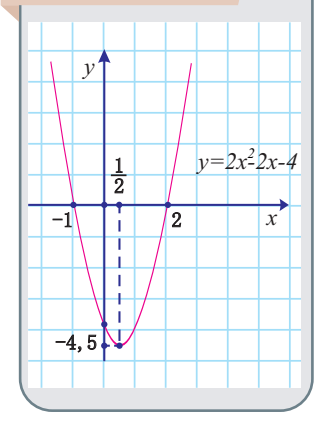
Случай 1: $\begin{cases} x-2>0 \\ x-3<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<3 \end{cases} \Rightarrow x\in(2;3)$.

Случай 2: $\begin{cases} x-2<0 \\ x-3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>3 \end{cases} \Rightarrow x\in\varnothing$.

Ответ: (2; 3).

Способ 2. Решение квадратичного неравенства графическим способом.

Рисунок 1



Пример 2. Решить неравенство $2x^2-2x-4\ge 0$ графически.

Решение. Построим график функции $y = 2x^2 - 2x - 4$ (рис. 1). Сперва найдём вершину параболы:

$$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{4}=\frac{1}{2};\quad y_0=2\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}-4=-4{,}5.$$

Затем, вычисляя дискриминант $D=b^2-4ac=4+32=36$, находим нули параболы:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{2\pm\sqrt{36}}{4}=\frac{2\pm 6}{4},$$

Так как график функции на интервале $(-1;2)$ расположен ниже оси абсцисс, а на области $(-\infty;-1]\cup[2;\infty)$ – выше оси абсцисс, то, принимая во внимание нестрогость неравенства, получим решение.

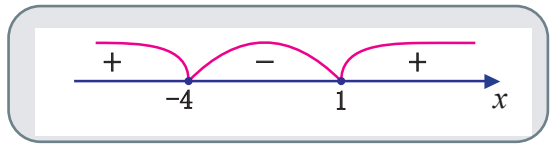
Ответ: $(-\infty;-1]\cup[2;\infty)$.

Способ 3. Решение квадратичного неравенства методом интервалов

Пример 3. Решить неравенство $x^2+3x-4\le 0$ интервальным методом.

Решение. Разложим левую часть неравенства на множители
$(x+4)(x-1)\le 0$
и найдём её нули: –4 и 1.

Отмечаем найденные точки на числовой прямой и делим числовую прямую на интервалы. Определяем знак функции $y = x^2 + 3x - 4$ на каждом интервале.



Так как в условии заданного примера спрашивается промежуток, в котором функция принимает свои не положительные значения, то решением является [–4; 1].

Ответ: [–4; 1].

ПРИМЕРЫ

1. Какие из чисел 0, –2, 3 удовлетворяют неравенству $-4x^2+5x-5>0$?

2. Решите следующие неравенства приведением в систему линейных неравенств.

a) $(x+4)(2x-3)>0$ b) $x^2+10x-11<0$

c) $(5x-2)(4x+3)\le 0$ d) $2x^2-5x+2\ge 0$

3. Равносильны ли неравенства?

a) $5x^2>2x$ и $5x>2$ b) $3x^3<7x^2$ и $3x<7$ c) $\frac{x^2-1}{x}>0$ и $(x^2-x)(x+1)>0$

4. Решите неравенства.

a) $x^2 > 0$ b) $4x^2 \geq 0$ c) $x^2 < 0$

d) $-x^2 \leq 0$ e) $x^2 + 7 > 0$ f) $5x^2 + 11 \leq 0$

g) $-x^2 - 5 > 0$ h) $3x^2 - 2x < 0$ i) $-4x^2 + 11x < 0$

j) $x^2 - 9x + 20 < 0$ k) $x^2 - 10x + 25 > 0$ l) $-x^2 + 6x - 8 > 0$

m) $3x^2 - x + 2 \geq 0$ n) $-9x^2 + 24x + 20 > 0$ o) $-7 \cdot (3 - x)^2 > 0$

5. Составьте какое-нибудь квадратичное неравенство, решением которого являются области:

a) $(-\infty; -3) \cup (6; \infty)$ b) $(-\infty; \infty)$

6. Найдите длину отрезка на оси *Ox*, являющегося решением неравенства $x^2 + 9x \leq -14$.

7. Сколько целых чисел удовлетворяют неравенству $2x^2 + 7x - 15 < 0$?

8. Решите неравенства интервальным методом.

a) $x^2 + 5x - 6 > 0$ b) $-x^2 + x + 2 < 0$ c) $x^2 + 3x + 7 > 0$ d) $x^2 + 3x + 7 \leq 0$

e) $-2x^2 + 5x + 3 > 0$ f) $6x^2 - x - 2 < 0$ g) $2x^2 + 5x + 9 \leq 0$ h) $49x^2 - 28x + 4 \leq 0$

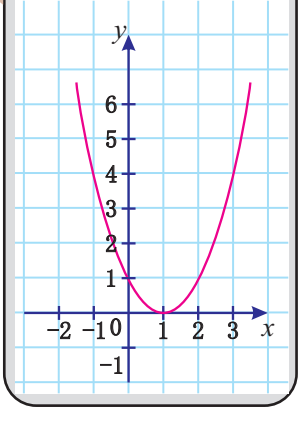
9. Решите неравенства.

a) $8x^2 + 3x - 5 \geq 0$ b) $5x^2 - 12x + 8 \leq 0$

c) $49x^2 - 70x + 25 > 0$ d) $(2x^2 + 3x + 4)(x + 3) \geq 0$

e) $(7 + 6x - x^2)(3x - 5) < 0$

Рисунок 6



10. Решите неравенство графиком квадратичной функции.

a) $2x^2 + 5x - 3 > 0$ b) $4x^2 - 9x - 90 > 0$

11. На рисунке 6 изображен график функции $y = ax^2 + bx + c$. Найдите решение следующих неравенств.

a) $ax^2 + bx + c > 0$ b) $ax^2 + bx + c \leq 0$

12. Найдите сумму всех целых чисел, удовлетворяющих неравенству.

a) $2x^2 - 9x + 4 < 0$ b) $\frac{x-1}{4} + \frac{3-2x}{2} > \frac{3x+x^2}{8}$

c) $(5x + 7)(x - 2) \leq 21x^2 - 11x + 3$

13. Сколько целых чисел из отрезка $[0; 9]$ удовлетворяют неравенству $3x(x-2) - 2x(x+4) - (x-16) \leq 0$?

14. Используя график функции $y = -x^2 + 4x - 3$, найдите решение следующих неравенств.

a) $-x^2 + 4x - 3 > 0$ b) $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$ c) $-x^2 + 4x - 3 < 0$ d) $-x^2 + 4x - 3 \leq 0$

15. При каких значениях *a* уравнение $ax^2 + 2ax + 4 = 0$ не имеет корней?

16. Решите неравенство $(x-1)^2(x^2-2)<(x-1)^2(6-2x)$.

17. Дана функция $f(x)=(x-1)^4(x+1)^3x^2$. Найдите все значения x, при которых:

a) $f(x)<0$ b) $f(x)\le 0$ c) $f(x)>0$ d) $f(x)\ge 0$

18. Решите неравенства:

a) $x^2-2(b-c)x+a^2>0$, при этом a, b, c – стороны треугольника;

b) $x^2+(a^2+b^2-c^2)x+a^2b^2>0$, при этом a, b, c – стороны треугольника.

Решение: $D=4(b-c)^2-4a^2=4\left((b-c)^2-a^2\right)=4(b-c-a)(b-c+a)$. $b-c-a<0$. Так как $b-c+a>0$, то $D<0$. Отсюда вытекает, что левая часть неравенства положительна при всех значениях x.

Ответ: $(-\infty;\infty)$

19. Если $a^2+12b<0$, то решите неравенство $3x^2-b\le ax$.

20. Если $b>0{,}05a^2$, то решите неравенство $5x^2-ax+b>0$.

21. Если $b^2\le 4ac$ и $a+c>b$, то решите неравенство $ax^2+bx+c\le 0$.

22. При каких значениях c графики функций $y=cx^2+x+c$ и $y=cx+1-c$ не имеют общих точек?

23. При каких значениях p графики функций $y=px^2-24x+1$ и $y=12x^2-2px-1$ не пересекаются?

24. При каких значениях a корни уравнения $x^2+3x+a=0$ удовлетворят условию

$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+1>0$?

25. При каких значениях b корни уравнения $x^2-2bx+b+6=0$:

a) отрицательны; b) положительны; c) имеют разные знаки?

26. При каких значениях a все действительные числа удовлетворяют неравенству?

a) $x^2-(a+2)x+8a+1>0$ b) $\frac{1}{24}x^2+ax-a+1>0$

27. При каких значениях b неравенство не имеет решений?

a) $x^2+2bx+1<0$ b) $bx^2+4bx+5<0$ c) $bx^2+(2b+3)x+b-1\ge 0$

ОТВЕТЫ

1. ни одно **2.** a) $(-\infty;-4)\cup\left(\frac{3}{2};\infty\right)$ b) $(-11;1)$ c) $\left[-\frac{3}{4};\frac{2}{5}\right]$ d) $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup[2;\infty)$

3. a)нет b) нет c) да

4. a) $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$ b) $x\in R$ c) $x\in\varnothing$ d) $x\in R$ e) $x\in R$ f) $x\in\varnothing$

g) $x\in\varnothing$ h) $\left(0;\frac{2}{3}\right)$ i) $(-\infty;0)\cup\left(2\frac{3}{4};\infty\right)$ j) $(4;5)$ k) $(-\infty;5)\cup(5;\infty)$

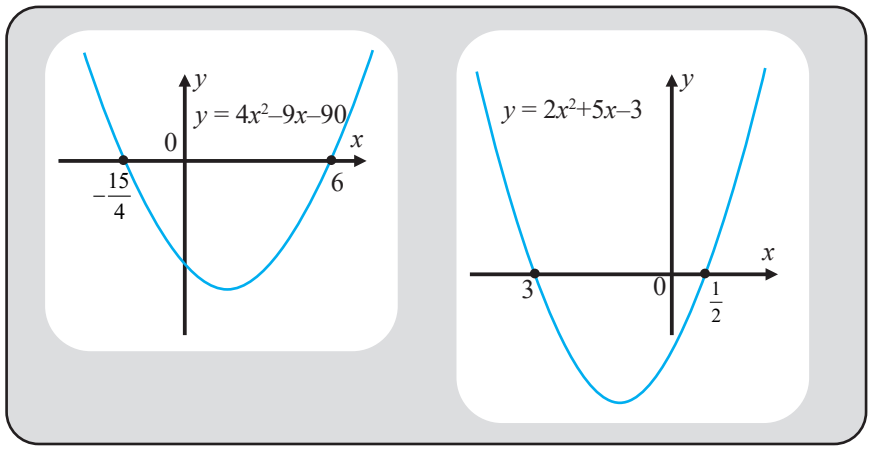
l) $(2;4)$ m) $x\in R$ n) $\left(-\frac{2}{3};\frac{10}{3}\right)$ o) $x\in\varnothing$

5. a) например, $x^2-3x-18>0$ b) например, $3x^2-3x+20>0$ **6.** 5 единиц **7.** 6

8. a) $(-\infty;-6)\cup(1;\infty)$ b) $(-\infty;-1)\cup(2;\infty)$ c) $x\in R$ d) $x\in\varnothing$ e) $\left(-\frac{1}{2};3\right)$ f) $\left(-\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$ g) $x\in\varnothing$ h) $x=\frac{2}{7}$

9. a) $(-\infty;-1]\cup\left[\frac{5}{8};\infty\right)$ b) $x\in\varnothing$ c) $\left(-\infty;\frac{5}{7}\right)\cup\left(\frac{5}{7};\infty\right)$ d) $[-3;\infty)$ e) $\left(-1;\frac{5}{3}\right)\cup(7;\infty)$

10. a) $(-\infty;-3)\cup\left(\frac{1}{2};\infty\right)$ b) $\left(-\infty;-\frac{15}{4}\right)\cup(6;\infty)$



11. a) $x\neq 1$ b) $x=1$ **12.** a) 6 b) 285 c) –1 **13.** $x\in\varnothing$

14. a) $(1;3)$ b) $[1;3]$ c) $(-\infty;1)\cup(3;\infty)$ d) $(-\infty;1]\cup[3;\infty)$ **15.** $[0;4)$

16. $(-4;1)\cup(1;2)$ **17.** a) $(-\infty;-1)$ b) $(-\infty;-1]\cup\{0,1\}$ c) $(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;\infty)$

d) $[-1;\infty)$ **18.** a) $x\in R$ b) $x\in R$ **19.** $x\in\varnothing$ **20.** $x\in R$

21. $x=-\frac{b}{2a}$ **22.** $\left(-\infty;-\frac{1}{7}\right)\cup(1;\infty)$ **23.** $(12;14)$ **24.** $(0;9)$

25. a) $(-6;-2)$ b) $(3;\infty)$ c) $(-\infty;-6]$ **26.** a) $(0;28)$ b) $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$

27. a) $(-1;1)$ b) $\left(0;\frac{5}{4}\right)$ c) $\left(-\infty;-\frac{9}{16}\right)$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

Цель урока: Научить учащихся использовать тригонометрические тождества.

Все учащиеся	Знают и умеют применять основное тригонометрическое тождество, соотношения между $\sin\alpha, \cos\alpha, tg\alpha, ctg\alpha$. Зная одно из выражений $\sin\alpha, \cos\alpha, tg\alpha, ctg\alpha$ смогут найти остальные.
Большинство учащихся	Знают применение формул приведения, сложения и двойного угла.
Некоторые учащиеся	Знают формулы сложения, умножения и половинного угла.

Активизирующие вопросы

1. Как определяются знаки координат заданной точки на плоскости?
2. Как можно определить знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса заданного угла?
3. Что вы понимаете под термином «тождество«? Приведите примеры тождественных выражений.
4. Напишите примеры известных вам тригонометрических тождеств.

Допустимые ошибки и рекомендации по их устранению

Учащиеся нередко допускают ошибки при определении знаков синуса, косинуса, тангенса и котангенса для заданного угла α. Повторить, как определяются координаты точки $P(1;0)$, образованной поворотом точки $A(x;y)$ на угол α.

Домашнее задание

2, 4(d), 5(d), 6(d), 8(b), 10(b), 12(b), 13(d, f,), 15(c), 17(b), 21.

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

Основные тригонометрические тождества

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2. $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \ \cos\alpha \neq 0$
3. $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \ \sin\alpha \neq 0$
4. $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$
5. $1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}, \ \cos\alpha \neq 0$
6. $1 + ctg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}, \ \sin\alpha \neq 0$

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса некоторых углов

α	$0^0\,(0)$	$30°\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45°\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60°\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$90°\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$180°(\pi)$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

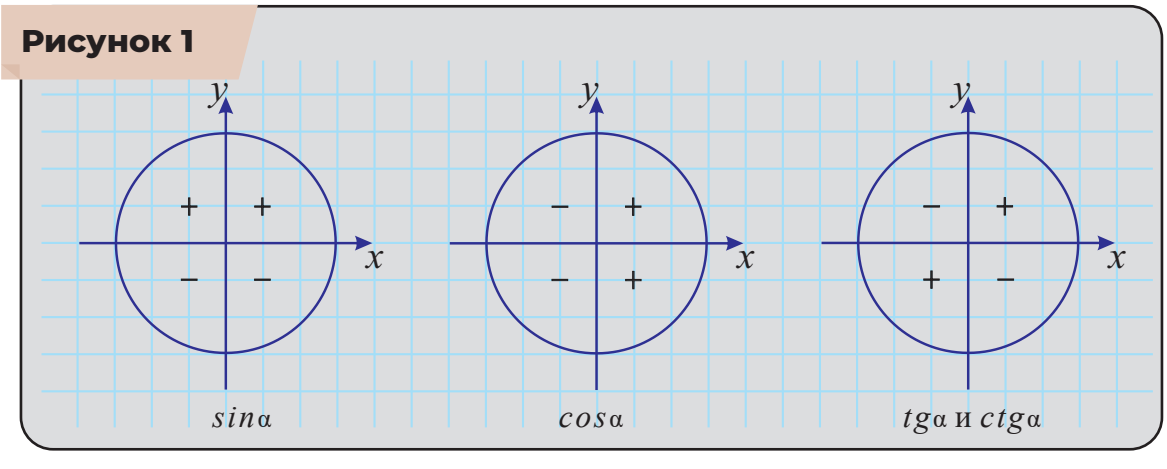
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не существует	0
$ctg\alpha$	не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	не существует

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса некоторых углов

	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$tg\,\alpha$
$ctg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$

Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса

Рисунок 1



α и (–α) Синус, косинус, тангенс и котангенс углов

1. $sin(-\alpha)=-sin\alpha$ 2. $cos(-\alpha)=cos\alpha$ 3. $tg(-\alpha)=-tg\alpha$ 4. $ctg(-\alpha)=-ctg\alpha$

ПРИМЕРЫ

1. Если $ctg\alpha = -\frac{3}{4}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, то найдите $cos\alpha$.

2. Если $tg\alpha = -\sqrt{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то найдите $sin\alpha$.

3. Если $tg\alpha = \frac{3}{2}$, то найдите $\frac{2sin\alpha + 5cos\alpha}{3sin\alpha - 4cos\alpha}$.

4. Упростите.

a) $\frac{2sin^2\alpha - 1}{2cos^2\alpha - 1}$ b) $\frac{ctg\left(2\sin^2\alpha + tg\alpha\right)}{\left(\sin\alpha + \cos\alpha\right)^2}$ c) $\frac{1 - cos^2\alpha}{sin^4\alpha} - ctg^2\alpha$ d) $2 - \frac{1 - sin^4\alpha}{cos^2\alpha}$

5. Вычислите.

a) $4cos150° - sin240° - 3tg210°$ b) $2cos135° + tg60° - ctg240°$

c) $sin300° - 3cos135° + 2cos210°$ d) $tg150° - ctg315° + 5sin135°$

6. Вычислите.

a) $tg\frac{7\pi}{6} - 2tg\frac{5\pi}{3} + 3tg\frac{11\pi}{6}$ b) $2cos\frac{4\pi}{3} + sin\frac{5\pi}{4} - cos\frac{4\pi}{3}$

c) $20ctg\frac{3\pi}{2} - sin\frac{2\pi}{3} + cos\frac{4\pi}{3}$ d) $ctg\frac{7\pi}{4} + 2ctg\frac{4\pi}{3} - 2cos\frac{5\pi}{6}$

7. Упростите.

a) $\frac{1 - tg(360° - \alpha)tg\alpha}{tg(270° - \alpha) + tg\alpha}$ b) $\frac{cos(90° + \alpha) + sin(90° - \alpha)}{cos(270° - \alpha) + cos(180° + \alpha)}$

8. Упростите.

a) $\frac{sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}{tg^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\right) - ctg^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2}\right)}$ b) $\frac{cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2a\right) + sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2a\right)}{cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2a\right) + sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2a\right)}$

9. Докажите тождество.

a) $\frac{sin(\pi - 2\alpha) - 2sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{sin^2(\pi + \alpha) - cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} = 2ctg\alpha$ b) $\frac{sin^4\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - cos^2(2\alpha + \pi)}{1 - 3cos(2\alpha + \pi)} = \frac{sin^2\alpha}{2}$

10. Вычислите.

a) $sin(-43°)cos88° + cos(-43°)sin88°$ b) $cos11°cos19° - sin19°sin11°$

11. Вычислите.

a) $sin\frac{2\pi}{7}cos\frac{3\pi}{14} + cos\frac{2\pi}{7}sin\frac{3\pi}{14}$ b) $\frac{1 + tg33°tg78°}{tg78° - tg33°}$

12. Вычислите.

a) $cos\left(-\frac{19\pi}{36}\right)cos\frac{7\pi}{9}-sin\frac{7\pi}{9}sin\left(-\frac{19\pi}{36}\right)$

b) $\frac{1-tg\frac{\pi}{11}tg\frac{5\pi}{66}}{tg\frac{5\pi}{66}+tg\frac{\pi}{11}}$

13. Упростите.

a) $cos(\alpha-\beta)-sin\alpha sin\beta$

b) $sin(\alpha-\beta)+sin(\alpha+\beta)$

c) $sin4\alpha\,cos\alpha-cos4\alpha\,sin\alpha$

d) $cos\alpha\,cos2\alpha+sin2\alpha\,sin\alpha$

e) $\frac{1}{2}cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}sin\alpha$

f) $\frac{1}{\sqrt{2}}cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}sin\alpha$

a) Если $cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$, то найдите $cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$.

b) Если $cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, то найдите $sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$.

15. Вычислите.

a) $\frac{6sin10°cos10°}{sin20°}$

b) $\frac{sin88°}{sin22°cos22°cos44°}$

c) $sin\frac{\pi}{12}\left(2sin^2\frac{\pi}{24}-1\right)$

a) Если $cos\alpha=0,4$, то найдите $cos2\alpha$.

b) Если $sin\alpha=-0,7$, то найдите $cos2\alpha$.

17. a) Если $cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$, то найдите $sin2\alpha$.

b) Если $sin\alpha=\frac{1}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, то найдите $sin2\alpha$.

18. Упростите.

a) $2cos^2\frac{\alpha}{2}(cos\alpha-1)$

b) $\frac{sin2\alpha}{1+cos2\alpha}$

19. Если $tg\alpha=-2$, то найдите $sin2\alpha$, $cos2\alpha$, $tg2\alpha$, $ctg2\alpha$.

a) Определите знак выражения $cos123°tg231°sin312°$.

b) Определите знак выражения $sin\frac{1}{3}cos\frac{7}{8}tg4ctg5,7$.

21. Сравните $sin200°$ и $sin(-200°)$.

Могут ли быть совместно верны равенства $sin\ =\frac{12}{13}$ и $cos\alpha=\frac{5}{13}$?

23. Докажите тождество.

a) $\left(sin\alpha+\frac{1}{sin\alpha}\right)^2+\left(cos\alpha+\frac{1}{cos\alpha}\right)^2-\left(tg^2\alpha+ctg^2\alpha\right)=7$

b) $\frac{tg3\alpha}{tg^23\alpha-1}\cdot\frac{1-ctg^23\alpha}{ctg3\alpha}=1$

24. Упростите выражение.

a) $\dfrac{1-ctg^2(-\alpha)}{\cos\alpha+\sin(-\alpha)}\cdot\sin(-\alpha)+ctg(-\alpha)$ b) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)-\sin(\beta-\alpha)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\beta-\alpha)}$

25. Докажите тождество.

a) $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$ b) $2\sin2\alpha\cos5\alpha=\sin7\alpha-\sin3\alpha.$

26. Найдите $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$; $\sin\beta=-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$; $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$; $\pi<\beta<\dfrac{3\pi}{2}$, если $\cos(\alpha+\beta)$.

27. Докажите тождество: $\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{tg\alpha+tg\beta}=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$.

28. Вычислите: $\sin(-300^0)\cos(-135^0)tg(-210^0)ctg(-120^0)$.

29. Найдите $\sin\alpha\cos\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$.

30. Найдите $\sin\alpha+\cos\alpha$, если $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$ и $\pi<a<\dfrac{3\pi}{2}$.

Решение: $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$, если $\sin\alpha+\cos\alpha<0$.

$$\sin\alpha+\cos\alpha=-\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=-\sqrt{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}=-\sqrt{1+2\cdot\frac{1}{3}}=-\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Ответ: $-\sqrt{\dfrac{5}{3}}$.

ОТВЕТЫ

1. $\dfrac{3}{5}$ 2. $\sqrt{\dfrac{5}{6}}$ 3. 16 4. a) –1 b) 1 c) 1 d) $\cos^2 a$

5. a) $-\dfrac{5\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$ $-\dfrac{2}{2}$ b) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-\sqrt{2}$ c) $\dfrac{-3\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{2}$ d) $1+\dfrac{5}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 6. a) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ b)

c) $-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ d) $-1+\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ 7. a) $\operatorname{tg}\alpha$ b) $\dfrac{\sin(\alpha-45^\circ)}{\sin(\alpha+45^\circ)}$ 8. a) $\dfrac{1}{4}\sin^2\beta$

b) $\dfrac{\cos\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}$ 9. a) $\dfrac{\sin(\pi-2\alpha)-2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin^2(\pi+\alpha)-\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+a\right)}=\dfrac{\sin2\alpha-2\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{2\cos\alpha(\sin\alpha-1)}{\sin\alpha(\sin\alpha-1)}=2ctg\alpha$

b) $\dfrac{\sin^4\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos^2(2\alpha+\pi)}{1-3\cos(2\alpha+\pi)}=\dfrac{\cos^4\alpha-\cos^2 2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+3\cos2\alpha}=\dfrac{\cos^4\alpha-\cos^4\alpha-\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{4\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha}=$

$= \dfrac{\sin^2\alpha(2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}{2(2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)} = \dfrac{\sin^2\alpha}{2}$ **10.** a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 11. a) 1b) 1

12. a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sqrt{3}$ **13.** a) $\cos\alpha\cos\beta$ b) $2\sin\alpha\cos\beta$ c) $\sin 3\alpha$

d) $\cos\alpha$ e) $\cos(60^\circ - \alpha)$ f) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$ **14.** a) $\dfrac{4+\sqrt{2}}{6}$ b) $\dfrac{-3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$

15. a) 3 b) 4 c) $-\dfrac{1}{4}$ **16.** a) –0,68 b) 0,02 **17.** a) $-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

b) $-\dfrac{4\sqrt{6}}{25}$ 18. a) $-\sin^2\alpha$ b) $tg\alpha$ **19.** $-\dfrac{4}{5}; -\dfrac{3}{5}; \dfrac{4}{3}; \dfrac{3}{4}$

20. a) плюс b) минус **21.** $\sin 200^\circ < \sin(-200^\circ)$ **22.** Да, могут.

23. a) $\left(\sin\alpha + \dfrac{1}{\sin\alpha}\right)^2 + \left(\cos\alpha + \dfrac{1}{\cos\alpha}\right)^2 - (tg^2\alpha + ctg^2\alpha) =$

$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2 + 2 + \dfrac{1}{\sin^2\alpha} + \dfrac{1}{\cos^2\alpha} - \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} =$

$= 5 + \dfrac{1 - \cos^4\alpha - \sin^4\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = 5 + \dfrac{1 - 1 + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = 7$ b) $\dfrac{tg3\alpha}{tg^2 3\alpha - 1} \cdot \dfrac{1 - ctg^2 3\alpha}{ctg3\alpha} = \dfrac{tg3\alpha - ctg3\alpha}{tg3\alpha - ctg3\alpha} = 1$

24. a) 1 b) $tg(\alpha - \beta)$

25. a) $\sqrt{2}\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\alpha\cos\dfrac{\pi}{4} + \sin\alpha\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin\alpha + \cos\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha$

b) $\sin 7\alpha - \sin 3\alpha = 2\sin\dfrac{7\alpha - 3\alpha}{2}\cos\dfrac{7\alpha + 3\alpha}{2} = 2\sin 2\alpha\cos 5\alpha$ **26.** $-\dfrac{6+\sqrt{35}}{12}$

27. Способ 1.

$$\frac{tga - tg\beta}{tg\alpha + tg\beta} = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} \cdot \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

28. $\dfrac{\sqrt{6}}{12}$ **29.** $-\dfrac{5}{18}$

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Цель урока: Привить учащимся навыки применения правил арифметической и геометрической прогрессии в последовательностях.

Все учащиеся	Знают и умеют применять формулы нахождения n-го члена и суммы первых n членов арифметической прогрессии. Знают и умеют применять формулы нахождения n-го члена и суммы первых n членов геометрической прогрессии.
Большинство учащихся	Знают и могут использовать свойства арифметической и геометрической прогрессии.
Некоторые учащиеся	Умеют решать более сложные задачи на арифметическую и геометрическую прогрессию.

Активизирующие вопросы

1. Какая числовая последовательность называется арифметической прогрессией?
2. Какие свойства арифметической прогрессии знаете?
3. По какой формуле вычисляется сумма первых n членов арифметической прогрессии?
4. Какая числовая последовательность называется геометрической прогрессией?
5. С какими свойствами геометрической прогрессии вы знакомы?
6. По какой формуле вычисляется сумма первых n членов геометрической прогрессии?
7. Какая последовательность называется бесконечно убывающей геометрической прогрессией?
8. Вы слышали о премии за решение шахматной задачи?
9. Приведите пример последовательности, которая может быть как арифметической, так и геометрической прогрессией.

Допустимые ошибки и рекомендации по их устранению

Учащиеся могут написать ответы без проверки соответствия полученного значения знаменателя геометрической прогрессии условию задачи. Для устранения погрешностей такого типа следует, например, потренироваться в определении знаменателя геометрической прогрессии положительными членами; отрицательными членами; знакочередующимися членами; а также убывающей или возрастающей геометрической прогрессии.

Домашнее задание

2(d), **6**(d), **9**, **13**(b), **16**(c), **18**(c), **20**, **25**, **35**(b).

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

Арифметическая прогрессия

1. $a_{n+1} = a_n + d$, $n \in N$;
2. $a_n = a_1 + (n-1)d$, $n \in N$;
3. $a_n = a_k + (n-k)d$, $n,k \in N$, $n>k$;
4. $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $n \in N$;
5. $a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$, $n,k \in N$, $n>k$;

6. Для членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$ имеем $a_n + a_m = a_k + a_l$, здесь $n + m = k + l$;

7. $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$;

8. $S_n = \dfrac{(2a_1 + (n-1)d)n}{2}$.

Геометрическая прогрессия

1. $b_{n+1} = b_n \cdot q$, $n \in N$;

2. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $n \in N$;

3. $b_n = b_k \cdot q^{n-k}$, $n, k \in N$ и $n > k$;

4. $b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$, $n, k \in N$, $n > k$;

5. Для членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$ имеем $b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_l$, здесь $n + m = k + l$;

6. $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, $q \neq 1$. Если $q = 1$ то $S_n = b_1 \cdot n$;

7. $S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1}$, $q \neq 1$;

8. Сумма (всех членов) бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$S = \frac{b_1}{1-q}, \quad |q| < 1, q \neq 0.$$

ПРИМЕРЫ

1. Найдите восьмидесятый член арифметической прогрессии, если $a_1 = -3$ и $d = 6$.

2. Последовательность 2, 6, 10, 14, 18, ... составляет арифметическую прогрессию. Напишите формулу её n-члена.

3. В арифметической прогрессии:
a) найдите a_1 и d, если $a_7 = -5$, $a_{32} = 70$;
b) найдите a_7, если $a_5 = 2$, $a_{40} = 142$;
c) найдите a_{13}, если $a_{14} = 5$, $a_{12} = 1$;
d) найдите a_{10}, если $a_{25} - a_{20} = 10$, $a_{16} = 13$.

4. Если $b_2 = 4$ и $b_3 = 6$ в геометрической прогрессии, найдите b_7.

5. Если $b_1 = 3$ и $q = -2$ в геометрической прогрессии, найдите b_8.

6. В геометрической прогрессии:

a) если $b_1 = 18$, $q = \dfrac{1}{9}$, найдите b_2;

b) если $b_1 = \dfrac{1}{2}$, $q = \dfrac{1}{2}$, найдите b_7;

c) если $b_4 = 8$, $b_8 = 128$, найдите b_1 и q;

d) если $b_9 = -1$, $q = -1$, найдите b_1 и b_{17}.

7. Если $b_1 = 3$, $q = 2$ в геометрической прогрессии, найдите S_6.

8. Если $b_2 = 6$, $q = 3$ в геометрической прогрессии, найдите S_8.

9. В геометрической прогрессии $b_1 = 4$, $q = \dfrac{1}{2}$. Найдите сумму её первых 10 членов.

10. Первый член геометрической прогрессии равен 5, шестой член равен 1215. Найдите её знаменатель.

11. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии $b_1 = 8, q = \frac{1}{2}$. Найдите её сумму.

12. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии 12, 4, $\frac{4}{3}$, ...

13. В геометрической прогрессии:

a) если $b_1 = 24$, $b_2 = 36$, найдите q;

b) если $b_5 = 36$, $b_7 = 144$, найдите b_6;

c) если $b_6 = \frac{1}{486}$, $b_8 = \frac{1}{4374}$, найдите b_7.

14. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 150.

Если $q = \frac{1}{3}$, найдите b_1.

15. Если $b_1 = \frac{1}{4}$, $S = 16$ в бесконечно убывающей геометрической прогрессии, найдите q.

16. В геометрической функции:

a) если $b_1 = 3$, $q = 5$, найдите S_4;

b) если $b_2 = 8$, $b_3 = 4$, найдите S_6;

c) если $b_1 = -2$, $b_6 = -486$, найдите S_6.

17. Если $q = -\frac{1}{2}$, $S_8 = \frac{85}{64}$ в геометрической прогрессии, найдите b_1.

18. Напишите формулу нахождения n-ого члена арифметической прогрессии.

a) $a_1 = 5, a_2 = -5$ b) $a_1 = -3, a_6 = 12$ c) $a_1 = 6, a_{10} = 33$

19. Если четвёртый и шестой члены в арифметической прогрессии равны соответственно 16 и 19, найдите её первый член.

20. Найдите сумму первых 25 натуральных чисел.

21. Если $a_3 + a_7 = 5$ и $a_4 = 1$ в арифметической прогрессии (a_n), найдите сумму её первых десяти членов.

22. Начиная с какого номера все члены арифметической прогрессии будут положительными, если $a_1 = -20{,}7$, $d = 1{,}8$?

23. Если $a_{12} + a_{15} = 20$ в арифметической прогрессии, найдите S_{26}.

24. Если $a_2 + a_6 = 44$, $a_5 - a_1 = 20$ в арифметической прогрессии, найдите a_{100}.

25. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найдите сумму первых одиннадцати её членов.

26. Если $S_n = 3n^2 + n$ в арифметической прогрессии, найдите a_1 и d.

27. Если $b_{12} = 4 \cdot b_{10}$ и $b_3 = 6$ в возрастающей геометрической прогрессии, найдите b_7.

$b_5 = \sqrt[3]{2}$ в геометрической прогрессии. Найдите произведение первых девяти её членов.

29. Если $S_4 = 10\frac{5}{8}$, $S_5 = 42\frac{5}{8}$, $b_1 = \frac{1}{8}$ в геометрической прогрессии, найдите q.

30. Если $b_1 = 1$ и $b_3 + b_5 = 90$ в геометрической прогрессии, найдите q.

31. Три числа x, y и 12 образуют убывающую геометрическую прогрессию. Если 12 заменить на 9, то полученная тройка чисел образует арифметическую прогрессию. Найдите $x + y$.

Решение. Так как числа x, y и 12 образуют геометрическую прогрессию, то согласно формуле $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$, справедливой для каждой последовательной тройки членов b_{n-1}, b_n и b_{n+1} геометрической прогрессии, имеем $y^2 = 12x$. С другой стороны, из равенства $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$, верного для произвольной последовательной тройки членов a_{n-1}, a_n и a_{n+1} арифметической прогрессии, имеем $y = \frac{x+9}{2}$. Решая систему $\begin{cases} y^2 = 12x, \\ y = \frac{x+9}{2}, \end{cases}$ получим $x_1 = 3$, $x_2 = 27$ и $y_1 = 6$, $y_2 = 18$.

При $x = 27$ и $y = 18$ получается убывающая геометрическая прогрессия.

Ответ: $x + y = 45$.

32. В геометрической прогрессии $b_2 \cdot b_4 \cdot b_6 = 216$ и $b_3 = 12$. Найдите сумму её первых шести членов.

33. Сумма всех членов с нечётными номерами бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 36. Сумма всех членов с чётными номерами равна 12. Найдите знаменатель и второй член этой прогрессии.

34. Сумма первого и четвёртого членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 54, сумма второго и третьего членов равна 36. Найдите сумму этой прогрессии.

35. В арифметической прогрессии:

a) найдите S_{12}, если $a_1 = -3$, $a_3 \cdot a_7 = 24$;

b) найдите S_{10}, если $a_2 + a_9 = 20$;

c) найдите S_8, если $a_3 + a_6 = 19$;

d) найдите S_{16}, если $S_4 = -28$, $S_6 = 58$.

ОТВЕТЫ

1. 471 **2.** $a_n = 4n - 2$, $n \in N$ **3.** a) $a_1 = -23, d = 3$ b) $a_7 = 10$ c) $a_{13} = 3$ d) $a_{10} = 1$

4. $\frac{243}{8}$ **5.** –384 **6.** a) 2 b) $\frac{1}{128}$ c) $b_1 = 1, q = 2$ или $b_1 = -1, q = -2$

d) $b_1 = -1, b_{17} = -1$ **7.** 189 **8.** 6560 **9.** $\frac{1023}{128}$ **10.** 3 **11.** 16

12. 18 **13.** a) $\frac{3}{2}$ b) 72 или –72 c) $\frac{1}{1458}$ или $-\frac{1}{1458}$

14. 100 **15.** $\frac{63}{64}$ **16.** a)468 b) $\frac{63}{2}$ c)–728 **17.** 2

18. a) $a_n = -10n + 15, n \in N$ b) $a_n = 3n - 6, n \in N$ c) $a_n = 3n + 3, n \in N$

19. 11,5 **20.** 325 **21.** $\frac{65}{2}$ **22.** 13 **23.** 260 **24.** 502 **25.** 44

26. $a_1 = 4, d = 6$ **27.** 96 **28.** 8 **29.** **30.** –3 или 3. **32.** $\frac{189}{2}$

33. $q = \frac{1}{3}$, $b_2 = \frac{32}{3}$ **34.** 96 **35.** a) –69 или 129 b)100 c)76 d)1488

ФУНКЦИИ

ФУНКЦИЯ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

Цель урока: Учащиеся определяют свойства функций, заданных разными способами, изображают графики элементарных функций.

Все учащиеся	Знают определение функции, способы задания функции.
Большинство учащихся	Знают определение функции, аналитический и табличный способы задания функции. Понимают концепции аргумента и функции.
Некоторые учащиеся	Знают определение функции, аналитический, табличный, графический и текстовый способы задания функции. Понимают концепции аргумента и функции. Представляют соответствия, не являющиеся функциями.

Активизирующие вопросы

1. Что такое функция?
2. Что вы подразумеваете под аргументом?
3. Какими способами можно задать функцию?
4. Что вы понимаете, когда говорят, что функция задана аналитически?
5. Приведите пример функции, заданной табличным способом.
6. В каком учебнике функции обычно задаются текстовым способом? (физика)
7. Можно ли говорить о том, что заданная фигура на рисунке определяет функцию или нет?

Домашнее задание

4. (b, d, f), 5. (a, b, c, d).

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

При изучении связи между величинами, рассматриваемыми в природе, производстве, экономике и других областях, значительную роль играет понятие, называемое функцией.

Пусть X и Y – числовые множества. Правило, ставящее в соответствие каждой точке $x \in X$ единственную точку $y \in Y$, называется функцией.

Функции могут быть заданы следующими способами:

1. Аналитический способ задания функций. Если функция задана одной или несколькими формулами, или уравнениями, то говорят, что эта функция задана аналитически. Например, уравнение $s = 20 - 5t + \frac{1}{4}t^2$ движения материальной точки – функция, заданная аналитическим способом.

2. Табличный способ задания функции обычно устанавливает взаимосвязи между переменными в практических экспериментах.

Например, ежедневное изменение температуры можно привести в виде таблицы.

3. В некоторых практических работах зависимость переменных даётся графически. Например, месячное и годовое изменение стоимости доллара по отношению к суму можно выразить графически. Здесь даты являются аргументом, а стоимость доллара по отношению к суму – функцией.

4. Функция может быть задана в виде словесного описания. Например, в задаче: «Семья, состоящая из 4 человек, использует 1 kg риса для приготовления плова. Сколько риса понадобится, если придут 2 гостя?» – количество риса является функцией от количества людей. Иными словами, количество людей – аргумент, а количество риса – функция.

ПРИМЕРЫ

1. Напишите в аналитическом виде функцию, заданную словесным описанием (например, функция, заданная текстом «вычесть 5 из квадрата аргумента», имеет следующий аналитический вид: $f(x) = x^2 - 5$).

a) умножьте аргумент на 3 и вычтите из него 5;

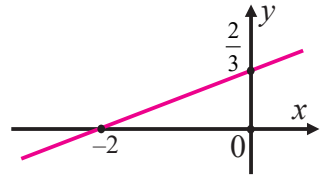
b) возведите аргумент в квадрат, а затем прибавьте к результату 2;

c) вычтите 1 из аргумента, а затем возведите его в квадрат;

d) прибавьте к аргументу 1, а затем извлеките из него квадратный корень и разделите на 6.

Решение. a) Заданная функция имеет аналитическую форму $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$. Её табличная форма (для отдельных значений аргумента) и графическая форма выглядят так:

–3	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	$-\frac{1}{3}$	0	–	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$



2. Задано текстовое правило функции. Найдите (a) аналитический, (b) табличный, (c) графический виды функции.

a) чтобы найти $f(x)$, разделите аргумент на 3, а затем прибавьте $\frac{2}{3}$;

b) чтобы найти $g(x)$, вычтите из аргумента 4, а затем умножьте на $\frac{3}{4}$;

c) пусть функция $T(x)$ – сумма налогов на продукт, купленный за x сумов. Вычислите 8% от цены товара, чтобы найти сумму налогов на продукт;

d) пусть функция $V(d)$ – правило нахождения объёма шара диаметром d. Чтобы найти объём, умножьте π на третью степень диаметра и разделите на 6.

Заполните таблицу значений заданной функции:

a) $f(x) = 2(x-1)^2$

x	$f(x)$
–1	
0	
1	
2	
3	

b) $g(x) = |2x+3|$.

x	$g(x)$
-3	
-2	
0	
1	
3	

4. Вычислите значения функции в заданных аргументах.

a) $f(x) = x^2-6$ $\quad f(-3), f(3), f(0), f\left(\frac{1}{2}\right)$

b) $f(x) = x^3+2x$ $\quad f(-2), f(-1), f(0), f\left(\frac{1}{2}\right)$

c) $f(x)=\frac{|x|}{x}$ $\quad f(-2), f(-1), f(0), f(5), f(x^2), f\left(\frac{1}{x}\right)$

d) $f(x)=\frac{1-2x}{3}$ $\quad f(2), f(-2), f\left(\frac{1}{2}\right), f(a), f(-a), f(a-1)$

e) $h(x)=\frac{x^2+4}{5}$ $\quad h(2), h(-2), h(a), h(-x), h(a-2), h\left(\sqrt{x}\right)$

f) $f(x)=x^2+2x$ $\quad f(0), f(3), f(-3), f(a), f(-x), f\left(\frac{1}{a}\right)$

g) $h(t)=t+\frac{1}{t}$ $\quad h(-1),\ h(2),\ h\left(\frac{1}{2}\right),\ h(x-1),\ h\left(\frac{1}{x}\right)$

5. Определите, являются ли заданные уравнения функциями от переменной x.

a) $3x-5y=7$ b) $3x^2-y=5$ c) $x=y^2$ d) $x^2+(y-1)^2=4$

e) $2x-4y^2=3$ f) $2x^2-4y^2=3$ g) $2xy-5y^2=4$ h) $\sqrt{y}-x=5$

i) $2|x|+y=0$ j) $2x+|y|=0$ k) $x=y^3$ l) $x=y^4$

Решение. h) Запишем данное уравнение в виде $\sqrt{y}=x+5$ Ясно, что данное равенство имеет смысл при $y\geq 0$ и $x\geq -5$ Теперь сделаем следующие действия:

$$\sqrt{y}=x+5 \Rightarrow \left(\sqrt{y}\right)^2=(x+5)^2 \Rightarrow y=(x+5)^2$$

Так как в полученной зависимости $y=(x+5)^2$ имеет место $x\geq -5$ при всех $x\geq -5$, то переменная x в равенстве $\sqrt{y}-x=5$ является функцией от x при $x\geq -5$.

Внимание! При $x<-5$ и $y\geq 0$ левая часть равенства $x<-5$ является неотрицательной, а правая – отрицательной. Поэтому при $x<-5$ переменная y в равенстве $\sqrt{y}-x=5$ не может быть функцией от x.

6. Какая из следующих таблиц является функцией от переменной x?

a)

x	y
−5	−12
9	2
11	2

b)

x	y
−10	−9
$3\frac{1}{2}$	−6
−10	−1

c)

x	y
2	0
−5	−3
−17	7
6	17
11	7

d)

x	y
−4	$3\frac{1}{2}$
$3\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{2}$
$9\frac{3}{5}$	−10

Решение. В таблице значению $x = -10$ переменной x приписаны два значения $y = -9$ и $y = -1$ переменной y. Поэтому переменная y не может быть функцией от переменной x.

ОТВЕТЫ

1. a) $f(x)=3x-5$; b) $f(x)=x^2+2$; c) $f(x)=(x-1)^2$; d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{6}$.

2. a) $f(x)=\dfrac{x}{3}+\dfrac{2}{3}$; b) $g(x)=\dfrac{3}{4}(x-4)$; c) $T(x)=0,08x$; d) $V(x)=\dfrac{\pi d^3}{6}$.

3. a) $8;2;0;2;8$. b) $3;1;3;5;9$.

4. a) $f(-3)=3$; $f(3)=3$; $f(0)=-6$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-5\dfrac{3}{4}$;

b) $f(-2)=-12$; $f(-1)=-3$; $f(0)=0$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1\dfrac{1}{8}$;

c) $f(-2)=-1$; $f(-1)=-1$; не существует $f(0)$; $f(5)=1$; $f(x^2)=1$; $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$, при $x>0$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-1$, при $x<0$;

d) $f(2)=-1$; $f(-2)=1\dfrac{2}{3}$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$; $f(a)=\dfrac{1-2a}{3}$; $f(-a)=\dfrac{1+2a}{3}$; $f(a-1)=\dfrac{3-2a}{3}$;

e) $h(2)=1\dfrac{3}{5}$; $h(-2)=1\dfrac{3}{5}$; $h(a)=\dfrac{a^2+4}{5}$; $h(-x)=\dfrac{x^2+4}{5}$; $h(a-2)=\dfrac{a^2-4a+8}{5}$; $h\left(\sqrt{x}\right)=\dfrac{x+4}{5}$;

f) $f(0)=0$; $f(3)=15$; $f(-3)=3$; $f(a)=a^2+2a$; $f(-x)=x^2-2x$; $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{2}{a}$;

g) $h(-1)=-2$; $h(2)=2\dfrac{1}{2}$; $h\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\dfrac{1}{2}$; $h(x-1)=x-1+\dfrac{1}{x-1}$; $h\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\dfrac{1}{x}$.

ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И МНОЖЕСТВО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

Цель урока: Научить учащихся определять свойства функций, заданных разными способами, строить графики элементарных функций.

Все учащиеся	Понимают, что область определения $D(f)$ $y=f(x)$ состоит из множества всевозможных допустимых значений аргумента x .
Большинство учащихся	Понимают, что область определения $D(f)$ функции $y=f(x)$ состоит из множества всевозможных допустимых значений аргумента x. Понимают, что множество значений $E(f)$ функции $y=f(x)$ – это множество всех значений, которые может принимать функция y .
Некоторые учащиеся	Понимают, что область определения $D(f)$ функции $y=f(x)$ состоит из множества всевозможных допустимых значений аргумента x. Знают, что выражение не имеет смысл при любом значении x, взятом вне области определения $D(f)$. Понимают, что множество значений $E(f)$ функции $y=f(x)$ – это множество всех значений, которые может принимать функция y. Знают, что значение $D(f)$ при любом значении x из области определения $f(x)$ принадлежит множеству $E(f)$.

Активизирующие вопросы

1. Что такое область определения функции?
2. Что такое множество значений функции?
3. При каком условии выражение в квадратном корне имеет смысл?
4. При каком условии выражение в знаменателе опр?

Домашнее задание

1 (a, b), 2 (a, b, c, d).

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

Область определения и множество значений функции

Рассмотрим функцию $y=f(x)$. Множество элементов, которые может принимать аргумент x, называется областью определения функции $y=f(x)$. Множество значений, которые может принимать функция y, называется множеством значений функции $y=f(x)$. Обычно они обозначаются как $D(f)$ и $E(f)$, соответственно.

Таблица области определения и множества значений некоторых функций:

Функция	Область определения	Множество значений
1) $y=kx+b$	$D(y)=(-\infty;+\infty)$	$E(y)=(-\infty;\ +\infty)$
2) $y=x^2$	$D(y)=(-\infty;+\infty)$	$E(y)=[0;\ +\infty)$
3) $y=\lvert x\rvert$	$D(y)=(-\infty;+\infty)$	$E(y)=[0;\ +\infty)$
4)	$D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$	$E(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$
5) $y=\sqrt{x}$	$D(y)=[0;+\infty)$	$E(y)=[0;\ +\infty)$
6)	$D(y)=[0;+\infty)$	$E(y)=[0;\ +\infty)$
7) $y=\sqrt[3]{x}$	$D(y)=(-\infty;+\infty)$	$E(y)=(-\infty;\ +\infty)$
8)	$D(y)=(-\infty;+\infty)$	$E(y)=(-\infty;\ +\infty)$

Пример 1. Найдите область определения функции $y=\dfrac{1}{x^2-x}$.

Решение. Знаменатель рационального выражения не может быть равным нулю, т. е.

$$x^2-x\neq 0$$
$$x(x-1)\neq 0$$
$$x\neq 0 \text{ и } x\neq 1.$$

Значит, аргумент x не может принимать значения 0 и 1. Поэтому область определения функции – множество всех действительных чисел, кроме 0 и 1.

Ответ: $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$.

Пример 4. Постройте графики следующих функций.

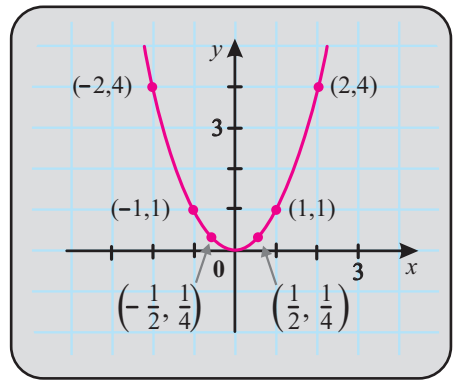
a) $y=x^2$ b) $y=x^3$ c) $y=\sqrt{x}$

Решение. Чтобы построить графики этих функций, сначала составляем таблицу некоторых её значений. Затем отмечаем эти точки на координатной плоскости и соединяем их плавной кривой.

a)

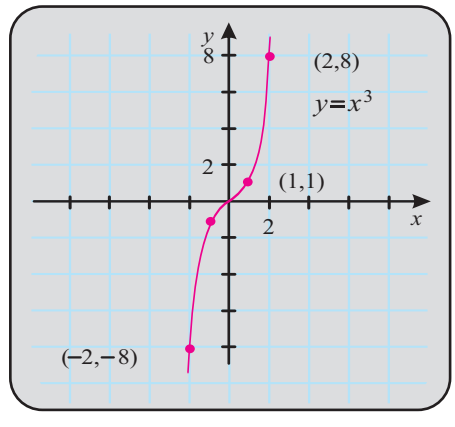
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y=x^2$	9	4	1	0	1	4	9

скачано с сайта www.idum.uz



b)

x	–2	–1	–1/2	0	1/2	1	2
$y = x^3$	–8	–1	–1/8	0	1/8	1	8



ПРИМЕРЫ

1. Найдите область определения и множество значений функции.

a) $f(x)=3x$ b) $f(x)=3x,\ 2\le x\le 6$

c) $f(x)=5x^2+2$ d) $f(x)=5x^2+2,\ 0\le x\le 2$

2. Найдите область определения функции.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{3x-6}$ c) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-1}$

d) $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2+x-6}$ e) $f(t)=\sqrt{t+1}$ f) $g(t)=\sqrt{t^2+9}$

g) $f(t)=\sqrt[3]{t-1}$ h) $g(x)=\sqrt{7-3x}$ i) $f(x)=\sqrt{1-2x}$

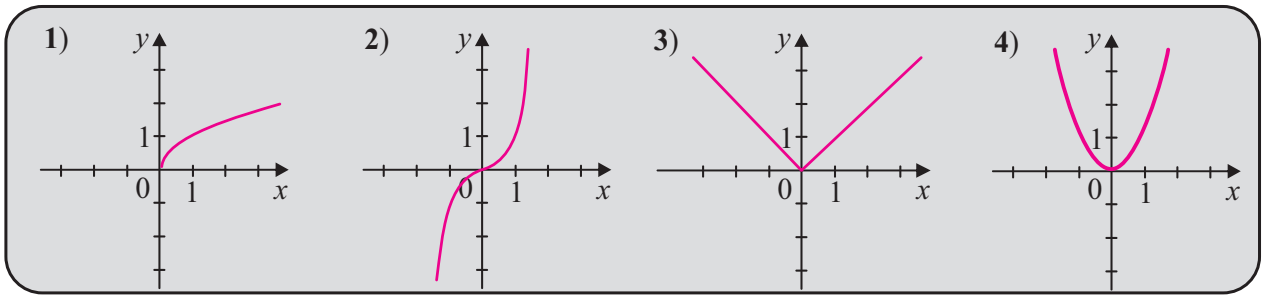
Решение. c) Так как нельзя делить на нуль, то знаменатель дроби $\dfrac{x+2}{x^2-1}$ не может быть равен нулю:

$$x^2-1\neq 0 \Rightarrow (x+1)(x-1)\neq 0 \Rightarrow x\neq 1,\ x\neq -1.$$

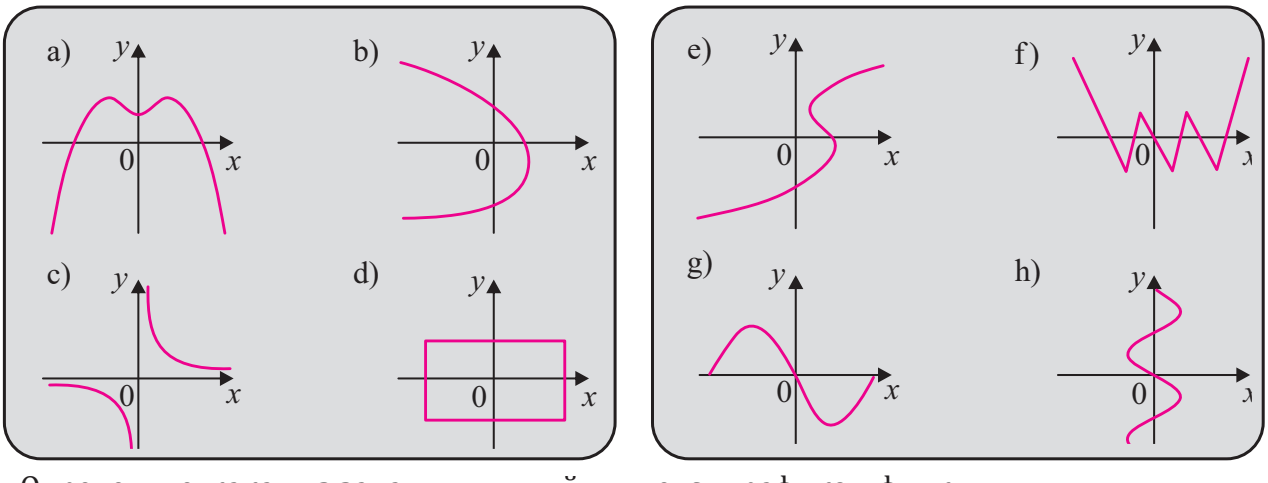
Отсюда следует, что областью определения данной функции является $D=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$.

3. Укажите график, соответствующий функции:

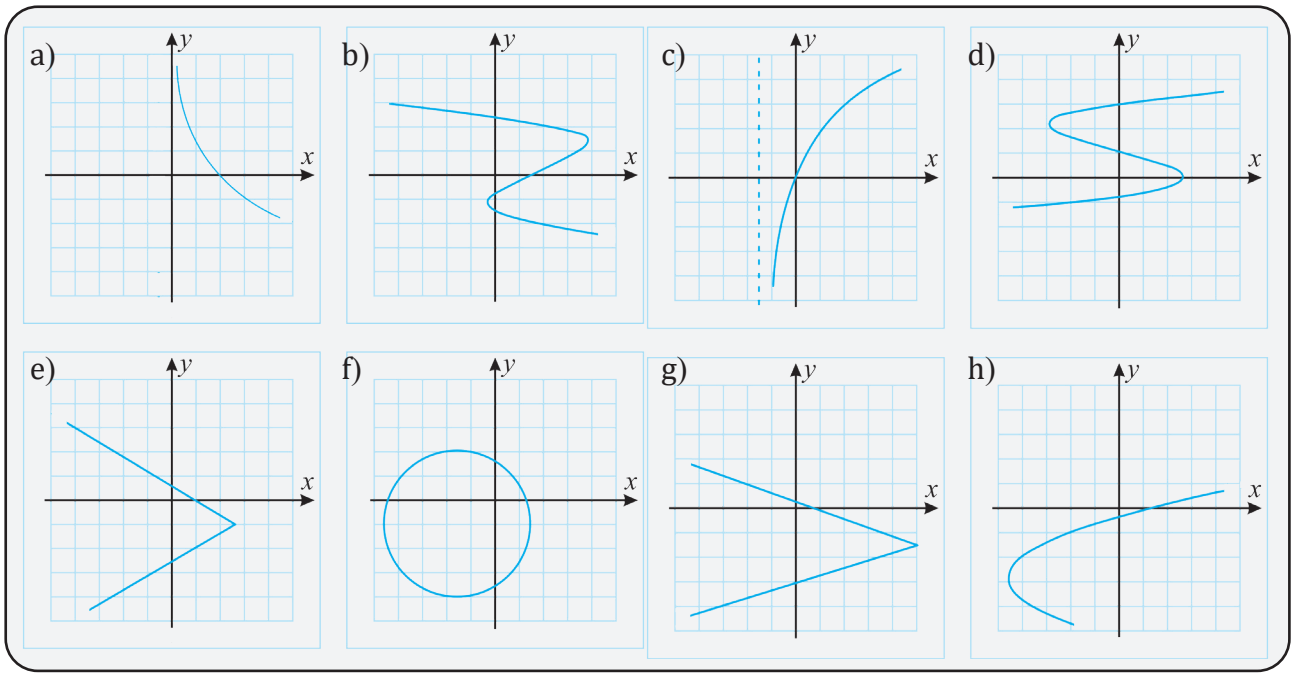
a) $f(x)=x^2$ b) $f(x)=x^3$ c) $f(x)=\sqrt{x}$ d) $f(x)=|x|$



4. Определите, какая из заданных линий является графиком функции.



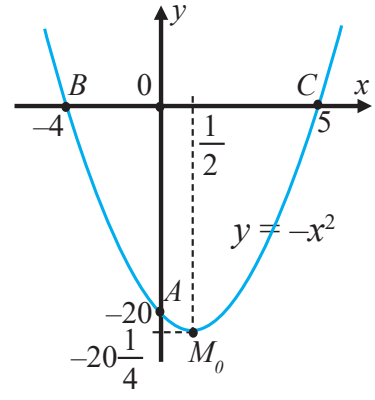
5. Определите, какая из заданных линий является графиком функции.



6. Постройте график заданных функций.

a) $f(x)=8x-x^2$ b) $g(x)=x^2-x-20$ c) $h(x)=x^3-5x-4$

Решение. Уточним следующее:



1) Поскольку $a=1>0$, то ветви параболы направлены вверх.

2) Находим координаты вершины параболы:

$$x_0=-\frac{b}{2a}\Rightarrow x_0=-\frac{-1}{2\cdot 1}=\frac{1}{2},$$

$$y_0=g(x_0)=g\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)-20=-\frac{81}{4}=-20\frac{1}{4}$$

Значит, вершина параболы – в точке $M_0\left(\frac{1}{2},-20\frac{1}{4}\right)$.

3) Находим точку пересечения параболы с осью Oy: $x=0\Rightarrow y=g(0)=-20$. Отсюда заключаем, что график данной функции пересекается с осью Oy в точке $A(0,-20)$.

4) Находим нули функции:

$$g(x)=0\Rightarrow x^2-x-20=0\Rightarrow(x-5)(x+4)=0\Rightarrow x_1=-4,\ x_2=5.$$

Значит, график заданной функции пересекает ось Ox в точках $B(-4,0)$ и $C(5,0)$.

5) Используя приведенную выше информацию, построим график функции.

7. Составьте таблицу значений и начертите графики заданных функций.

a) $f(x)=-x^2$ b) $f(x)=x^2-4$ c) $g(x)=-(x+1)^2$ d) $r(x)=3x^4$

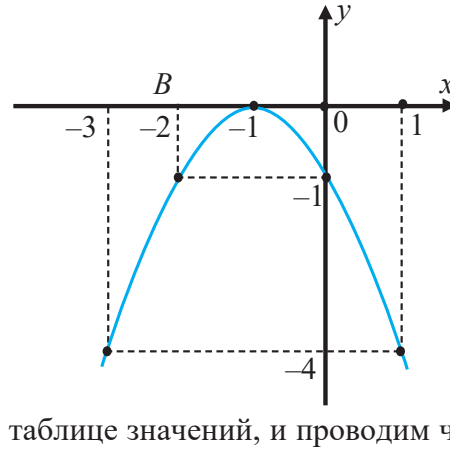
e) $r(x)=1-x^4$ f) $g(x)=x^3-8$ g) $k(x)=\sqrt[3]{-x}$ h) $k(x)=-\sqrt[3]{x}$

i) $f(x)=1+\sqrt{x}$ j) $C(t)=\frac{1}{t^2}$ k) $C(t)=-\frac{1}{t+1}$ l) $H(x)=|2x|$

m) $G(x)=|x|+x$ n) $G(x)=|x|-x$ o) $f(x)=|2x-2|$

Решение. c) Составим таблицу значений функции, соответствующих значениям аргумента $x=-2,-1,0,1,2$:

x	y
–2	–1
–1	0
0	–1
1	–4
2	–9



Отмечаем на плоскости Oxy точки, соответствующие таблице значений, и проводим через них плавную кривую. Полученная линия является эскизом графика заданной функции.

ОТВЕТЫ

1. a) $D(f)=(-\infty;\infty)$, $E(f)=(-\infty;\infty)$; b) $D(f)=[2;6]$, $E(f)=[6;18]$;
c) $D(f)=(-\infty;\infty)$, $E(f)=[2;\infty)$; d) $D(f)=[0;2]$, $E(f)=[2;22]$.

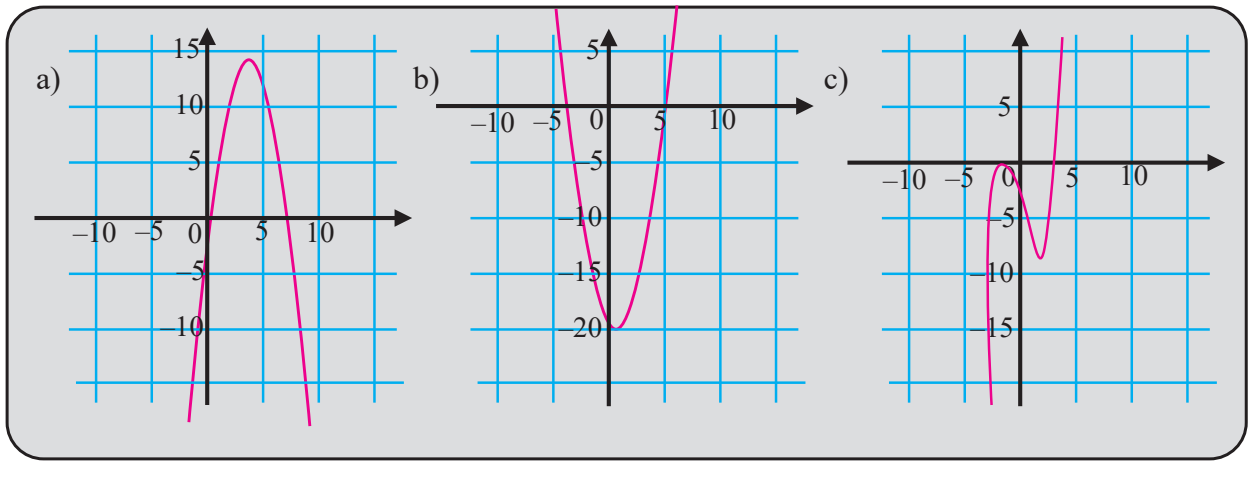
2. a) $D(f)=(-\infty;3)\cup(3;\infty)$; b) $D(f)=(-\infty;2)\cup(2;\infty)$;
c) $D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$; d) $D(f)=(-\infty;-3)\cup(-3;2)\cup(2;\infty)$;
e) $D(f)=[-1;\infty)$; f) $D(g)=(-\infty;\infty)$; g) $D(g)=(-\infty;\infty)$;
h) $D(f)=\left(-\infty;2\frac{1}{3}\right]$; i) $D(f)=\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]$.

3. a) 4; b) 2; c) 1; d) 3.

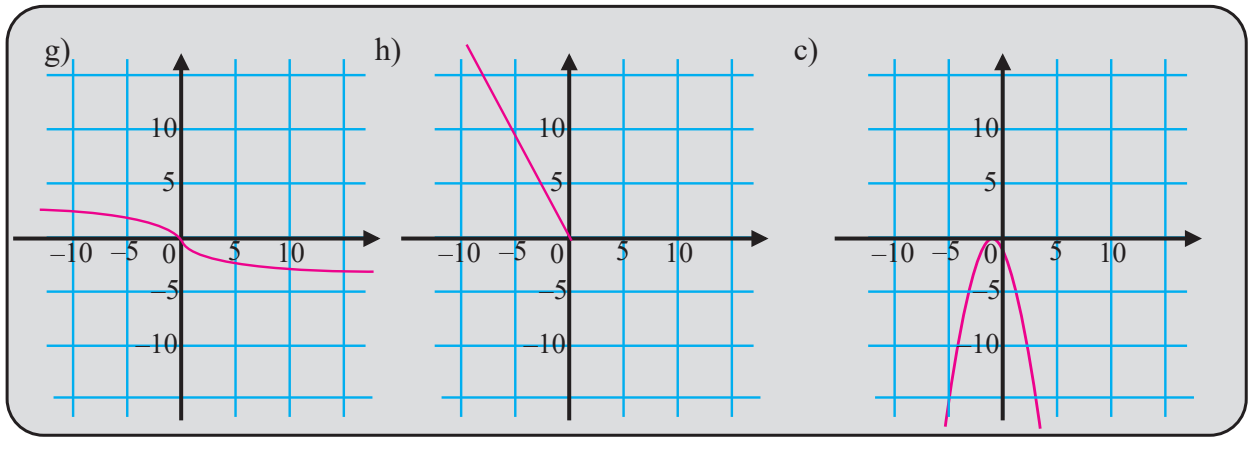
4. a), c), f), g).

5. a), c).

6.



7.



АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ФУНКЦИЯМИ

Цель урока: Научить учащихся определять свойства функций, заданных разными строить, изображают графики элементарных функций.

Все учащиеся	Знают, что над функциями можно выполнять арифметические действия: сложение (+), вычитание (–), умножение (×), деление (÷).
Большинство учащихся	Могут выполнять арифметические действия сложение (+), вычитание (–), умножение (×), деление (÷) над функциями с общей областью определения.
Некоторые учащиеся	Могут выполнять арифметические действия сложение (+), вычитание (–), умножение (×), деление (÷) над функциями с общей областью определения. Понимают, что над функциями с непересекающимися областями определения нельзя выполнять арифметические операции.

Активизирующие вопросы

1. Что вы понимаете под сложением двух функций?
2. Что вы подразумеваете под вычитанием двух функций?
3. Что вы понимаете под произведением двух функций?
4. Что вы подразумеваете под делением двух функций?
5. Как найти область определения при сложении функций, области определения которых пересекаются? А как при вычитании, умножении и делении?

Домашнее задание

1 (a, b), 2 (a, b, c, d).

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

Над функциями можно выполнять арифметические операции: сложение (+), вычитание (–), умножение (×), деление (÷).

Пусть областью определения функций $f(x)$ и $g(x)$ являются множества A и B, соответственно. Суммой этих функций в множестве $A \cap B$ называется функция, принимающая значение $f(x) + g(x)$ в каждом элементе $x \in A \cap B$. Сумма функций $f(x)$ и $g(x)$ обозначается как $(f + g)(x)$. Значит,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Таким же образом можно определить разность, умножение и деление функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Обратите внимание!

1. Если $A \cap B = \varnothing$, эти операции не определены.

2. При определении деления двух функций $f(x)$ и $g(x)$ требуется, чтобы $g(x) \neq 0$ для каждого элемента x, взятого из A ∩ B.

ПРИМЕРЫ

1. Сложите и вычтите функции.

a) $f(x) = 5x + 1,\ g(x) = -2x$

b) $f(x) = -3x + 3,\ g(x) = -5x + 4$

c) $f(x) = 2x + 1,\ g(x) = -5x + 3$

d) $f(x) = -3x^2 + 7x,\ g(x) = 2x + 4$

2. Умножьте функции.

a) $f(x) = -x^2,\ g(x) = -3x + 1$

b) $f(x) = -3x^2 + 3,\ g(x) = -x$

c) $f(x) = -x + 3,\ g(x) = 5x + 6$

d) $f(x) = -4x + 5,\ g(x) = -3x + 1$

3. Найдите $(f+g)(x), (f-g)(x), (f \cdot g)(x)$ и $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ и их области определения.

a) $f(x) = x,\ g(x) = 2x$

b) $f(x) = x,\ g(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = x^2 + x,\ g(x) = x^2$

d) $f(x) = 3 - x^2,\ g(x) = x^2 - 4$

e) $f(x) = 5 - x,\ g(x) = x^2 - 3x$

f) $f(x) = x^2 + 2x,\ g(x) = 3x^2 - 1$

g) $f(x) = \sqrt{25 - x^2},\ g(x) = \sqrt{x + 3}$

h) $f(x) = \sqrt{16 - x^2},\ g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

i) $f(x) = \frac{2}{x},\ g(x) = \frac{4}{x+4}$

j) $f(x) = \frac{2}{x+1},\ g(x) = \frac{x}{x+1}$

Решение. j) Суммой функций f и g является $(f+g)(x) = \frac{2}{x+1} + \frac{x}{x+1} = \frac{2+x}{x+1}$, а областью её определения является $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$, или $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

Разностью функций f и g является $(f-g)(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{x}{x+1} = \frac{2-x}{x+1}$, а областью её определения является $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$, или $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

Произведением функций f и g является $(f \cdot g)(x) = \frac{2}{x+1} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{2x}{(x+1)^2}$, а областью её определения является $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$, или $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

Деление $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\frac{2}{x+1}}{\frac{x}{x+1}}=\frac{2}{x}$ функций f и g определено при $g(x)=\frac{x}{x+1}\neq 0$, т. е. при $x\neq 0$. Значит, область определения частного $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{2}{x}$ состоит из значений аргумента $x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.

4. Найдите область определения функции.

a) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{3-x}$

b) $f(x)=\sqrt{x+4}-\dfrac{\sqrt{1-x}}{x}$

c) $h(x)=(x-3)^{-\frac{1}{4}}$

d) $k(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x-1}$

Решение. b) Для того чтобы найти область определения функции $f(x)=\sqrt{x+4}+\dfrac{\sqrt{1-x}}{x}$, требуется решение системы $\begin{cases}x+4\geq 0,\\1-x\geq 0,\\x\neq 0.\end{cases}$ Решаем её:

$$\begin{cases}x+4\geq 0,\\1-x\geq 0,\\x\neq 0.\end{cases}\Rightarrow x\in[-4,0)\cup(0,1].$$

Ответ: $D=[-4,0)\cup(0,1]$.

5. Пользуясь графиками (рис. 3-4), начертите график функции $f+g$ с помощью метода графического сложения.

Рисунок 3

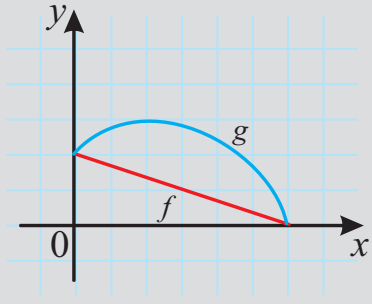
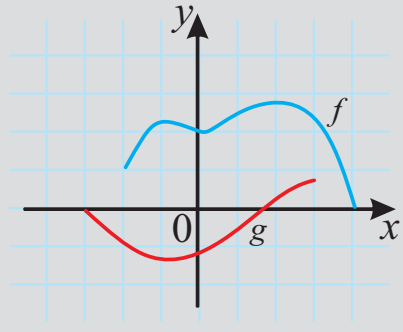


Рисунок 4



ОТВЕТЫ

1. a) $(f+g)(x)=3x+1$;

b) $(f-g)(x)=2x-1$;

c) $(f+g)(x)=-3x+4$;

d) $(f-g)(x)=-3x^2+5x-4$.

2. a) $(f\cdot g)(x)=3x^3-x^2$;

b) $(f\cdot g)(x)=3x^3-3x$;

c) $(f\cdot g)(x)=-5x^2+9x+18$; d) $(f\cdot g)(x)=12x^2-19x+5$.

3. Если $D(y)=(-\infty;\infty)$, то:

a) $(f+g)(x)=3x$, $(f-g)(x)=-x$, $(f\cdot g)(x)=2x^2$, если $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;\infty)$, то: $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{1}{2}$

b) Если $D(y)=[0;\infty)$, то: $(f+g)(x)=x+\sqrt{x}$, $(f+g)(x)=x+\sqrt{x}$, $(f-g)(x)=x-\sqrt{x}$, $(f\cdot g)(x)=x\sqrt{x}$, $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;\infty)$, то: $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\sqrt{x}$;

c) Если $D(y)=(-\infty;\infty)$, то: $(f+g)(x)=2x^2+x$, $(f-g)(x)=x$, $(f\cdot g)(x)=x^4+x^3$, Если $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;\infty)$, то: $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x+1}{x}$;

d) Если $D(y)=(-\infty;\infty)$, то: $(f+g)(x)=-1$, $(f-g)(x)=-2x^2+7$, $(f\cdot g)(x)=-x^4+7x^2-12$, Если $D(y)=(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;\infty)$, то: $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{3-x^2}{x^2-4}$;

e) Если $D(y)=(-\infty;\infty)$, то: $(f+g)(x)=x^2-4x+5$, $(f-g)(x)=-x^2+2x+5$, $(f\cdot g)(x)=-x^3+8x^2-15x$, Если $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;3)\cup(3;\infty)$, то: $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{5-x}{x^2-3x}$;

f) Если $D(y)=(-\infty;\infty)$, то: $(f+g)(x)=4x^2+2x-1$, $(f-g)(x)=-2x^2+2x+1$, $(f\cdot g)(x)=3x^4+6x^3-x^2-2x$, $x\neq\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, то: $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2+2x}{3x^2-1}$;

g) Если $D(y)=[-3;5]$, то: $(f+g)(x)=\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x+3}$, $(f-g)(x)=\sqrt{25-x^2}-\sqrt{x+3}$, $(f\cdot g)(x)=\sqrt{-x^3-3x^2+25x+75}$, Если $D(y)=(-3;5]$, то: $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sqrt{25-x^2}}{\sqrt{x+3}}$;

h)Если $D(y)=[-4;-1]\ \ [1;4]$,то: $(f+g)(x)=\sqrt{16-x^2}+\sqrt{x^2-1}$, $(f-g)(x)=\sqrt{16-x^2}-\sqrt{x^2-1}$ $(f\cdot g)(x)=\sqrt{-x^4+17x^2-16}$, Если $D(y)=[-4;-1)\cup(1;4]$, то: $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sqrt{16-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}$;

4. a) $D(y)=[0;3]$; b) $D(f)=[-4;0)\cup(0;1]$;

c) $D(h)=(3;\infty)$; d) $D(k)=[-3;1)\cup(1;\infty)$.

СЛОЖНЫЕ, ОБРАТНЫЕ, ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Цель урока: Научить учащихся определять свойства функций, заданных разными способами, строить графики элементарных функций; различать сложную функцию, обратную функцию, периодическую функцию и знать их свойства.

Все учащиеся	Знают, что сложные отношения между величинами могут быть описаны математически. Знают, что для функции может быть определена обратная функция. Знают, что периодические процессы могут описаны математически.
Большинство учащихся	Понимают определение сложной функции. Имеют представление о процессах, описываемых сложной функцией. Понимают, что для некоторых функций можно определить обратную. Умеют находить обратную функцию для заданной.. Знают определение периодической функции. Знают период периодической функции. Знают понятие основного периода.
Некоторые учащиеся	Понимают определение сложной функции. Имеют представление о процессах, описываемых сложной функцией. Умеют интерпретировать две и более последовательные связи одной переменной с другой как сложную функцию; могут выделить составные функции сложной функции. Понимают, что для некоторых функций можно определить обратную. Умеют находить обратную функцию для заданной. Умеют строить график обратной функции, используя график заданной функции. Знают, что если основным периодом функции $y = f(x)$ является T_0, то основным периодом функции $y = kf(ax+b)$ будет $T = \frac{T_0}{a}$ (здесь $a \neq 0$).

Активизирующие вопросы

1. Что вы подразумеваете под сложной функцией?
2. Как вы думаете, можно ли интерпретировать разговор по телефону как сложную функцию?
3. Что вы понимаете под функцией, обратной для данной функции?
4. Имеется ли какая-либо связь между графиками данной функции и обратной ей функции?
5. Определена ли обратная функция для квадратичной функции? Рекомендуется подкрепить свой ответ графиками.
6. Приведите примеры на периодические процессы.
7. Как бы вы определили периодическую функцию?
8. Что такое период периодической функции?
9. Что такое основной период?

Домашнее задание

1 (a, b), 2 (a, b, c, d).

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

Сложная функция

В результате последовательного применения функций образуются новые зависимости переменных. Если на множестве X задана функция $y = f(x)$, а аргумент x есть функция $x = g(t)$, определённая на множестве T, то зависимость $y = f(g(t))$ называется сложной функцией, определённой на множестве T.

Например, рассмотрим функцию $y = 2x^2 - 3x$, заданную на множестве $X = (-\infty; +\infty)$, и функцию $x = \sqrt{t}$, заданную на множестве $T = [0; +\infty)$. Тогда функция $y = 2t - 3\sqrt{t}$ является сложной функцией функций $y = 2x^2 - 3x$ и $x = \sqrt{t}$ на $T = [0; +\infty)$.

Обратная функция

Если уравнение $f(x) = y$ разрешимо относительно x и для каждого y имеет единственный корень $g(y)$, то зависимость $x = g(y)$ называется обратной функцией для функции $y = f(x)$. Вместо записи $x = g(y)$ по правилу используется запись $y = g(x)$. Обычно обратная к $y = f(x)$ функция записывается в виде $y = f^{-1}(x)$.

Периодические функции

Пусть задана функция $y = f(x)$, а $D(f)$ её область определения. Функция $y = f(x)$ называется периодической функцией, если существует такое $T \neq 0$, что для каждого $x \in D(f)$:

1) значения $x - T$ и $x + T$ принадлежат $D(f)$,

2) выполнены равенства $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$.

Если число T является периодом периодической функции $y = f(x)$, то тогда для любого целого n число nT также является её периодом:

$$f(x + nT) = f(x), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Наименьший положительный период T периодической функции $f(x)$ называется её основным периодом.

Знание периодичности функции полезно при построении её графика. При этом достаточно построить фрагмент графика периодической функции в одном периоде, и этот фрагмент графика повторяется в других периодах.

Её основной период равен $T_0 = 1$, т. е. $(x + 1) \in (-\infty; +\infty)$ для произвольного числа $x \in (-\infty; +\infty)$ и справедливо равенство $\{x + 1\} = \{x\}$.

Если основной период функции $y = f(x)$ равен T_0, то основным периодом функции $y = kf(ax + b) + c$ будет число $T_1 = \dfrac{T_0}{|a|}$ $(a \neq 0)$.

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = 3x - 5$. Выразим x через y:

$$3x - 5 = y \Rightarrow 3x = y + 5 \Rightarrow x = \frac{y + 5}{3}.$$

В последнем равенстве, меняя местами x и y, получим функцию $y = \dfrac{x + 5}{3}$. Эта функция является обратной для функции $y = 3x - 5$.

Замечание. Для заданной функции $y=f(x)$ и её обратной функции $y=f^{-1}(x)$ имеет место $D\left(f^{-1}\right)=E(f)$ и $E\left(f^{-1}\right)=D(f)$.

Внимание! Отметим, что $\left(f(x)\right)^{-1}=\dfrac{1}{f(x)}$, здесь (-1) означает показатель степени. В записи $f^{-1}(x)$ число (-1) означает обратную функцию, а не показатель степени. В общем случае, $\left(f(x)\right)^{-1}\neq f^{-1}(x)$. Например:

для функции $f(x)=3x-5$ имеют место $f^{-1}(x)=\dfrac{x+5}{3}$ и $\left(f(x)\right)^{-1}=\dfrac{1}{3x-5}$.

Пример 2. Найдите функцию, обратную заданной. $f(x)=\dfrac{x^5-3}{2}$.

Решение. Перепишем функцию в виде $y=\dfrac{x^5-3}{2}$ и решим её относительно x: $y=\dfrac{x^5-3}{2}$

$$2y=x^5-3$$

$$x^5=2y+3$$

$$x=\sqrt[5]{2y+3}\,.$$

Теперь поменяем местами x и y: $y=\sqrt[5]{2x+3}$. Следовательно, обратная функция: $f^{-1}(x)=\sqrt[5]{2x+3}$.

ПРИМЕРЫ

1. Найдите значения сложных функций, используя $f(x)=2x-3$ и $g(x)=4-x^2$.

a) $f\left(g(0)\right)$ b) $g\left(f(0)\right)$ c) $f\left(f(2)\right)$ d) $g\left(g(3)\right)$

e) $f(g(-2))$ f) $g(f(-2))$ g) $f(f(-1))$ h) $g(g(-1))$

2. Найдите функции $f(g(x))$, $g(f(x))$, $f(f(x))$ и $g(g(x))$ и их область определения.

a) $f(x)=2x+3$, $g(x)=4x-1$ b) $f(x)=6x-5$, $g(x)=\dfrac{x}{2}$

c) $f(x)=x^2$, $g(x)=x+1$ d) $f(x)=x^3+2$, $g(x)=\sqrt[3]{x}$

e) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=2x+4$ f) $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x-3}$

g) $f(x)=|x|$, $g(x)=2x+3$ h) $f(x)=4-x$, $g(x)=|x+4|$

i) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$, $g(x)=2x-1$ j) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x)=x^2-4x$

k) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$ l) $f(x)=\dfrac{2}{x}$, $g(x)=\dfrac{x}{x+2}$

3. Найдите функции, используя $f(x)=3-x$ и $g(x)=x^2+1$.

a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$ c) $f(f(x))$ d) $g(g(x))$

4. Составьте сложную функцию $f(g(h(x)))$.

a) $f(x)=x-1,\ g(x)=\sqrt{x},\ h(x)=x-1$ b) $f(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=x^3,\ h(x)=x^2+2$

c) $f(x)=x^4+1,\ g(x)=x-5,\ h(x)=\sqrt{x}$ d) $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=\frac{x}{x-1},\ h(x)=\sqrt[3]{x}$

Решение. a) $f(g(h(x)))=g(h(x))-1=\sqrt{h(x)}-1=\sqrt{x-1}-1$.

5. Из сложной функции вида $F(x)=f(g(x))$ выделите её составляющие функции f и g.

a) $F(x)=(x-9)^5$ b) $F(x)=\sqrt{x}+1$ c) $F(x)=\frac{x^2}{x^2+4}$

d) $F(x)=\frac{1}{x+3}$ e) $F(x)=|1-x^3|$ f) $F(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}}$

6. Найдите функцию, обратную заданной f.

a) $f(x)=3x+5$ b) $f(x)=7-5x$ c) $f(x)=5-4x^3$

d) $f(x)=3x^3+8$ e) $f(x)=\frac{1}{x+2}$ f) $f(x)=\frac{5}{x-6}$

g) $f(x)=\frac{3-4x}{8x-1}$ h) $f(x)=\frac{3x}{x-2}$ i) $f(x)=\frac{2x+5}{x-7}$

j) $f(x)=\sqrt{5+8x}$ k) $f(x)=2+\sqrt[3]{x}$ l) $f(x)=x^6,\ x\geq 0$

m) $f(x)=\frac{1}{x^2},\ x>0$ n) $f(x)=4-x^2,\ x\geq 0$ o) $f(x)=x^2+x,\ x\geq -\frac{1}{2}$

7. Найдите функцию, обратную заданной. Нарисуйте график функции $f^{-1}(x)$, используя график функции f.

a) $f(x)=3x-6$ b) $f(x)=16-x^2,\ x\geq 0$

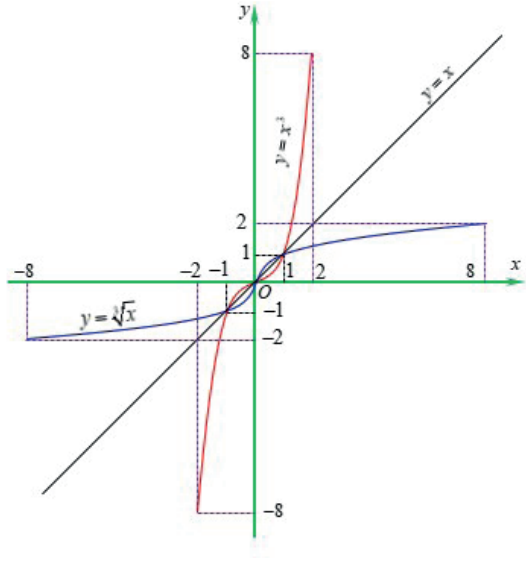
c) $f(x)=\sqrt{x+1}$ d) $f(x)=x^3$

Решение. d) Запишем заданную функцию в виде $y=x^3$ и решим её относительно x:

$$y=x^3 \Rightarrow x=\sqrt[3]{y}.$$

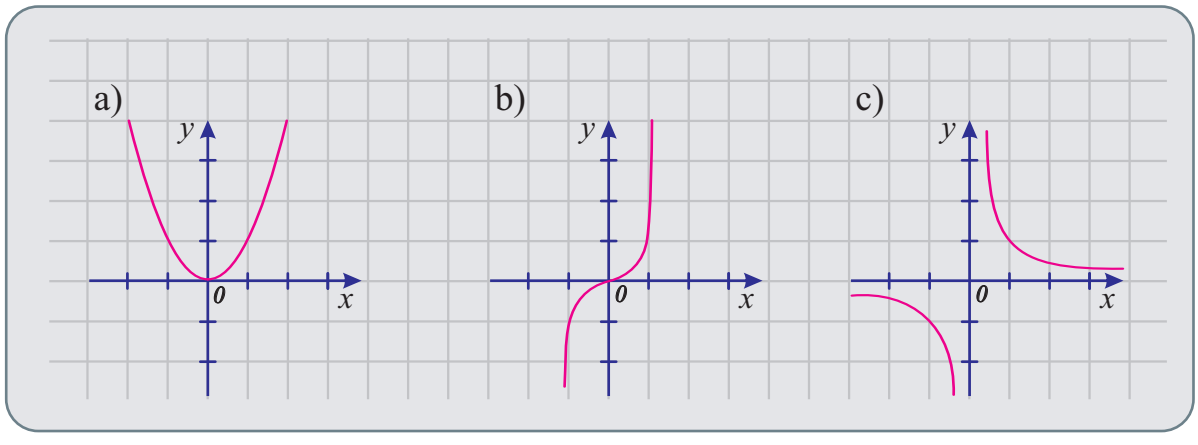
В этом уравнении поменяв местами x и y, получим обратную функцию $y=\sqrt[3]{x}$ для заданной функции.

Учитывая, что графики обратных функций симметричны относительно прямой $y=x$, по графику функции $y=x^3$ построим график обратной функции $y=\sqrt[3]{x}$, как показано на рисунке.



8. Найдите функции, соответствующие графикам, приведённым на рис. 6, и начертите график их обратной функции:

1) $f(x)=x^3$; 2) $f(x)=\frac{1}{x}$; 3) $f(x)=x^2$



9. Докажите, что число $T=\sqrt{2}$ является периодом функции $f(x)=5$,

10. Покажите, что следующие функции не являются периодическими.

a) $f(x)=\frac{1}{x-3}$ b) $f(x)=-\frac{2}{x-2}$ c) $f(x)=\frac{x}{x}$

d) $f(x)=x^2-4$ e) $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2+5x+8}$ f) $f(x)=\sqrt[3]{x}+3x-1$

ОТВЕТЫ

1. a) $f(g(0))=5$; b) $g(f(0))=-5$; c) $f(f(2))=-1$; d) $g(g(3))=-21$;

e) $f(g(-2))=-3$; f) $g(f(-2))=-45$; g) $f(f(-1))=-13$; h) $g(g(-1))=-5$.

2. a) $f(g(x))=11-2x$, $g(f(x))=8x+11$, $f(f(x))=4x+9$, $g(g(x))=16x-5$;

b) $f(g(x))=3x-5$, $g(f(x))=\frac{6x-5}{2}$, $f(f(x))=36x-35$, $g(g(x))=\frac{x}{4}$;

c) $f(g(x))=(x+1)^2$, $g(f(x))=x^2+1$, $f(f(x))=x^4$, $g(g(x))=x+2$;

d) $f(g(x))=x+2$, $g(f(x))=\sqrt[3]{x^3+2}$, $f(f(x))=(x^3+2)^3+2$, $g(g(x))=\sqrt[9]{x}$;

e) $f(g(x))=\frac{1}{2x+4}$, $g(f(x))=\frac{2}{x}+4$, $f(f(x))=x$, $g(g(x))=4x+12$;

f) $f(g(x))=x-3$, $g(f(x))=\sqrt{x^2-3}$, $f(f(x))=x^4$, $g(g(x))=\sqrt{\sqrt{x-3}-3}$;

g) $f(g(x))=|2x+3|$, $g(f(x))=2|x|+3$, $f(f(x))=\|x\|$, $g(g(x))=4x+9$;

h) $f(g(x))=4-|x+4|$, $g(f(x))=|8-x|$, $f(f(x))=x$, $g(g(x))=||x+4|+4|$;

i) $f(g(x))=\dfrac{2x-1}{2x}$, $g(f(x))=\dfrac{x-1}{x+1}$, $f(f(x))=\dfrac{x}{x+1}$, $g(g(x))=4x-3$;

3. a) $f(g(x))=2-x^2$; b) $g(f(x))=x^2-6x+10$;

c) $f(f(x))=x$; d) $g(g(x))=x^4+2x^2+2$.

4. a) $f(g(h(x)))=\sqrt{x-1}-1$; b) $f(g(h(x)))=\dfrac{1}{(x^2+2)^3}$;

c) $f(g(h(x)))=(\sqrt{x}-5)^4+1$; d) $f(g(h(x)))=\dfrac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}$.

5. a) $f(x)=x^5$ и $g(x)=x-9$; b) $f(x)=x+1$ и $g(x)=\sqrt{x}$;

c) $f(x)=\dfrac{x}{x+4}$ и $g(x)=x^2$; d) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ и $g(x)=x+3$;

e) $f(x)=|1-x|$ и $g(x)=x^3$; f) $f(x)=\sqrt{1+x}$ и $g(x)=\sqrt{x}$.

6. a) $y=\dfrac{x-5}{3}$; b) $y=\dfrac{7-x}{5}$; c) $y=\sqrt[3]{\dfrac{5-x}{4}}$; d) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-8}{3}}$;

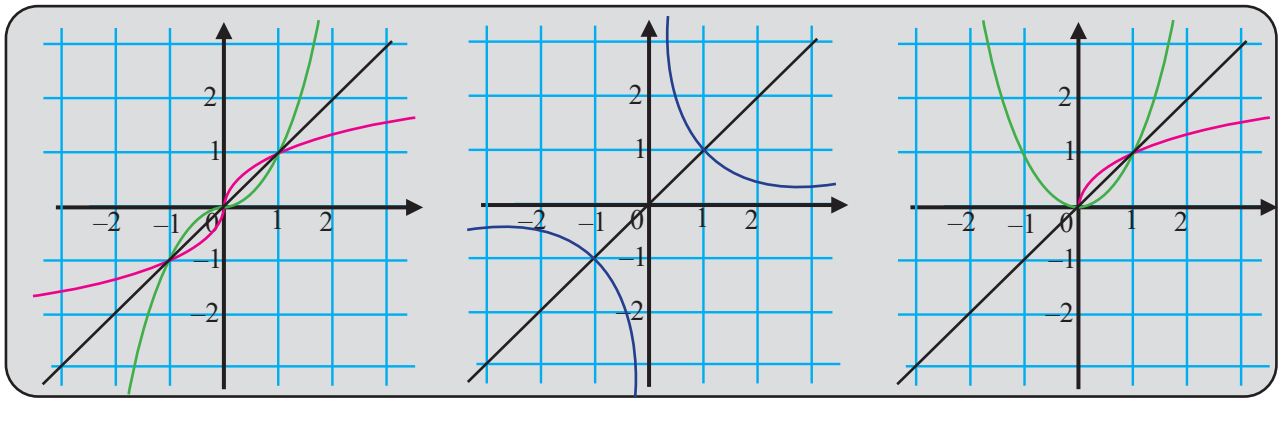
e) $y=\dfrac{1}{x}-2$; f) $y=\dfrac{5}{x}+6$; g) $y=\dfrac{3+x}{8x+4}$; h) $y=\dfrac{2x}{x-3}$;

i) $y=\dfrac{7x+5}{x-2}$; j) $y=\dfrac{x^2-5}{8}$; k) $y=(x-2)^3$;

l) $y=\sqrt[6]{x}$; m) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; n) $y=\sqrt{4-x}$; o) $y=\sqrt{\dfrac{4x+1}{4}}-\dfrac{1}{2}$.

7. a) y $\dfrac{x}{3}$ $\dfrac{6}{}$; b) $y=\sqrt{16-x}$; c) $y=x^2-1$; d) $y=\sqrt[3]{x}$.

8. 1) 2) 3)



СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

Цель урока: Знать четные и нечетные, возрастающие и убывающие функции, точки экстремума и экстремумы функции; находить интервалы монотонности и точек экстремума элементарных функций; определять функцию на основе ее графика.

Все учащиеся	Знают, что существуют классы четных функций, нечетных функций. Имеют представление о возрастающих, убывающих, невозрастающих, неубывающих функциях. Знакомятся с понятиями максимума функции и минимума функции.
Большинство учащихся	Умеют проверять функций на четность и нечетность. Знают, что существуют функции, не являющиеся ни четными, ни нечетными. Знают, что функции могут быть возрастающими, убывающими, невозрастающими, неубывающими на некоторых интервалах. Знают понятия точки максимума функции, максимума функции, точки минимума функции, минимума функции и различают эти объекты друг от друга.
Некоторые учащиеся	Знают, что график четной функции симметричен относительно оси ординат, а нечетной функции – относительно начала координат. Знают, что такое монотонная функция. Понимают, что функция, обратная возрастающей (убывающей) функции также является возрастающей (убывающей). Знает понятие экстремума. Узнают, что некоторые функции не имеют экстремумов.

1. Является ли возрастающей сложная функция, образованная последовательным применением двух возрастающих функций? Как насчет сложной функции, образованной двумя убывающими функциями?

2. Отличается ли точка максимума функции от максимума функции? Что можете сказать о точке минимума функции и минимуме функции?

3. Как вы думаете, какая точка является точкой максимума функции, график которой представляет собой прямую? А минимальная точка?

Домашнее задание

1 (a, b, d), 2 (a, b, c, d)

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

Чётные и нечётные функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, область определения которой $D(f)$ симметрична относительно нуля. Если для произвольной точки $x \in D(f)$ выполнено равенство $f(-x) = f(x)$, то $y = f(x)$ называется **чётной функцией**. График чётной функции является симметричным относительно оси Oy (рис. 1).

Если для произвольного элемента $x \in D(f)$ выполнено равенство $f(-x) = -f(x)$, то $y = f(x)$ называется **нечётной функцией.** График нечётной функции является симметричным относительно начала координат $O(0; 0)$.

Если не выполнено ни одно из двух вышеуказанных равенств, то функция $y = f(x)$ не является **ни чётной, ни нечётной функцией.**

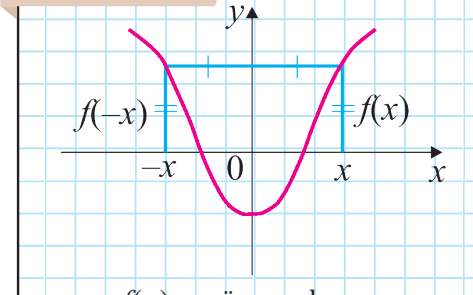
Пример 1. Проверьте функцию $f(x) = 2x^2 + 5$ на чётность или нечётность.

Решение.

$$f(-x) = 2(-x)^2 + 5 = 2x^2 + 5 = f(x),$$

то есть, поскольку $f(-x) = f(x)$, то функция $f(x) = 2x^2 + 5$ является чётной.

Рисунок 1



$f(x)$ – чётная функция

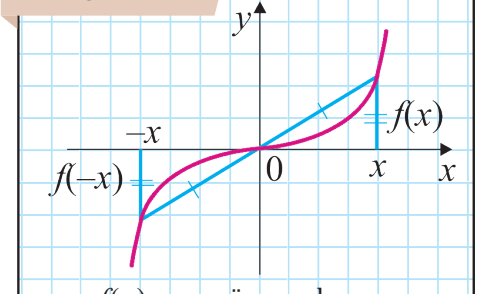
Пример 2. Проверить функцию $f(x) = 2x^3 + 5x$ на чётность или нечётность.

Решение.

$$f(-x) = 2(-x)^3 + 5(-x) = -(2x^3 + 5x) = -f(x),$$

то есть $f(-x) = -f(x)$, следовательно, $f(x) = 2x^3 + 5$ является нечётной функцией.

Рисунок 2



$f(x)$ – нечётная функция

Пример 3. Проверьте функцию $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 1$ на чётность или нечётность.

Решение.

$$f(-x) = 2(-x)^3 + 5(-x)^2 - 3(-x) + 1 = -2x^3 + 5x^2 + 3x + 1 =$$
$$= (2x^3 - 5x^2 - 3x - 1)$$

Возрастание и убывание функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана на интервале $(a; b)$. Если для всех $x_1, x_2 \in (a; b)$, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$ выполнено:

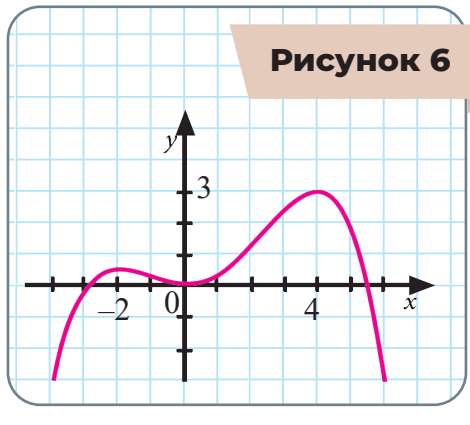
- $f(x_1) < f(x_2)$, то $y = f(x)$ называется возрастающей;
- $f(x_1) > f(x_2)$, то $y = f(x)$ – убывающей;
- $f(x_1) \geq f(x_2)$, то $y = f(x)$ – невозрастающей;
- $f(x_1) \leq f(x_2)$, то $y = f(x)$ – неубывающей функцией на интервале $(a; b)$.

Пример 4. График функции $f(x)$ приведён на рисунке 6. Покажите промежутки её возрастания и убывания.

Решение.

Из рисунка определим, что функция $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty; -2]$ и $[0; 4]$ и убывает на промежутках $[-2; 0]$ и $[4; \infty)$.

Рисунок 6



Точки экстремума и экстремумы функции

- Если:

1) функция $f(x)$ определена на интервале $(a; b)$, которому принадлежит точка x_1;

2) неравенство $f(x) < f(x_1)$ выполнено во всех точках x интервала $(a; b)$, отличных от x_1, то точка x_1 называется **точкой максимума функции** $f(x)$ (рис. 4).

Если $x_1 \in D(f)$ точка максимума функции $f(x)$, то значение $f(x_1)$ функции называется **максимумо функции** $f(x)$ и обозначается как y_{max}. Итак,

$$y_{max} = f(x_1).$$

- Если:

1) функция $f(x)$ определена на интервале $(a; b)$, которому принадлежит точка x_2;

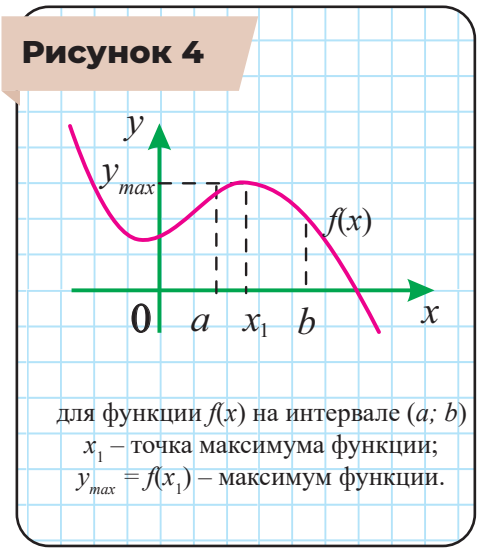
2) неравенство $f(x) > f(x_2)$ выполнено во всех точках x интервала $(a; b)$, отличных от x_2, то точка x_2 называется **точкой минимума функции** $f(x)$ (рис. 5).

Если $x_1 \in D(f)$ – точка минимума функции $f(x)$, то значение $f(x_2)$ функции называется **минимумом функции** $f(x)$ и обозначается как y_{min}. Итак,

$$y_{min} = f(x_2).$$

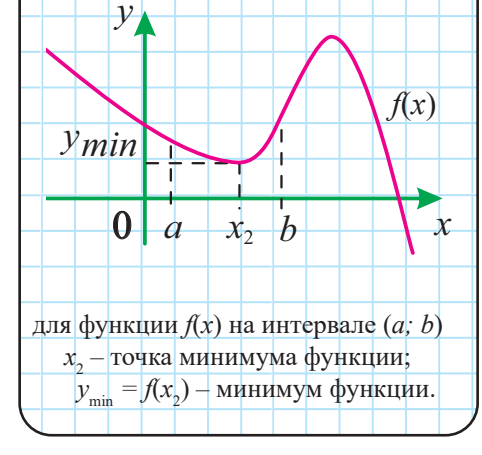
Точка максимума и точка минимума функции обобщаются под одним названием **точкой экстремума** функции. В свою очередь, максимум и минимум функции обобщаются под одним названием **экстремумом функции.**

Рисунок 4



для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$
x_1 – точка максимума функции;
$y_{max} = f(x_1)$ – максимум функции.

Рисунок 5



для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$
x_2 – точка минимума функции;
$y_{min} = f(x_2)$ – минимум функции.

ПРИМЕРЫ

1. Проверьте заданные функции на чётность или нечётность.

a) $f(x) = x^4$ b) $f(x) = x^3$

c) $f(x) = x^2 + x$ d) $f(x) = x^4 - 4x^2$

e) $f(x) = x^3 - x$ f) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$

g) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$ h) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

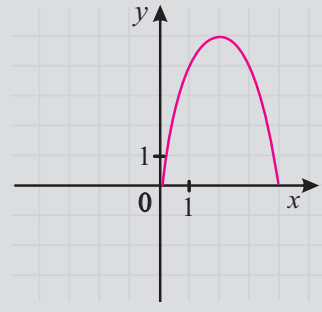
Решение. Чтобы определить, является ли данная функция четной или нечетной, вместо аргумента x поставим $-x$ и находим, что

$$f(-x) = 1 - \sqrt[3]{-x} = 1 - \left(-\sqrt[3]{x}\right) = 1 + \sqrt[3]{x} \neq f(x) \text{ и}$$

$$f(-x)=1+\sqrt[3]{x}=-\left(-1-\sqrt[3]{x}\right)\neq -f(x)$$

Значит, данная функция не является ни четной, ни нечетной.

Рисунок 7



2. На рис. 7 приведён график функции для области $x \geq 0$. В области $x<0$ постройте график так, чтобы образовался график:
a) чётной функции;
b) нечётной функции.

3. На рисунке 8 даны графики функций $f(x)=x^2-4$ и $g(x)=\left|x^2-4\right|$. Объясните, как график функции g получается из графика функции f.

Рисунок 8

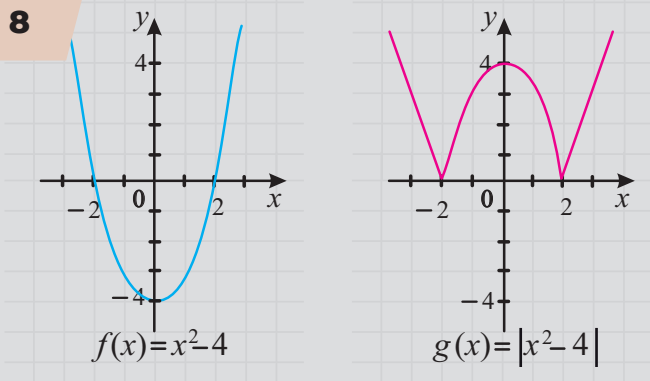
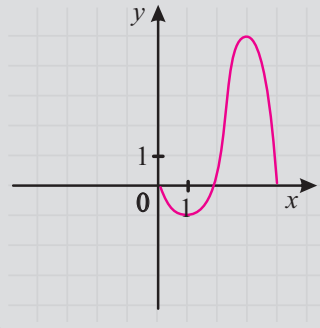
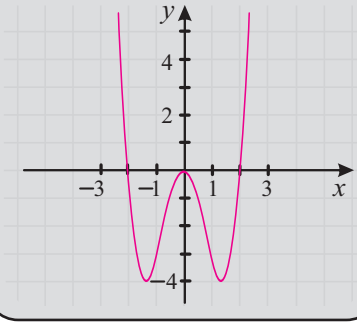


Рисунок 9



4. На рисунке 9 показан график функции для области $x \geq 0$. В области $x<0$ постройте график так, чтобы получился график:
a) чётной функции;
b) нечётной функции.

Рисунок 10



5. Дан график функции $f(x)=x^4-4x^2$ (рис. 10). Используя этот график, постройте график функции $g(x)=\left|x^4-4x^2\right|$.

6. На рис. 11 дан график функции f. Используя его, определите:

1) область определения и множество значений;

2) интервалы возрастания и убывания функции f.

Решение. 2) Из рисунка видно, что функция f :

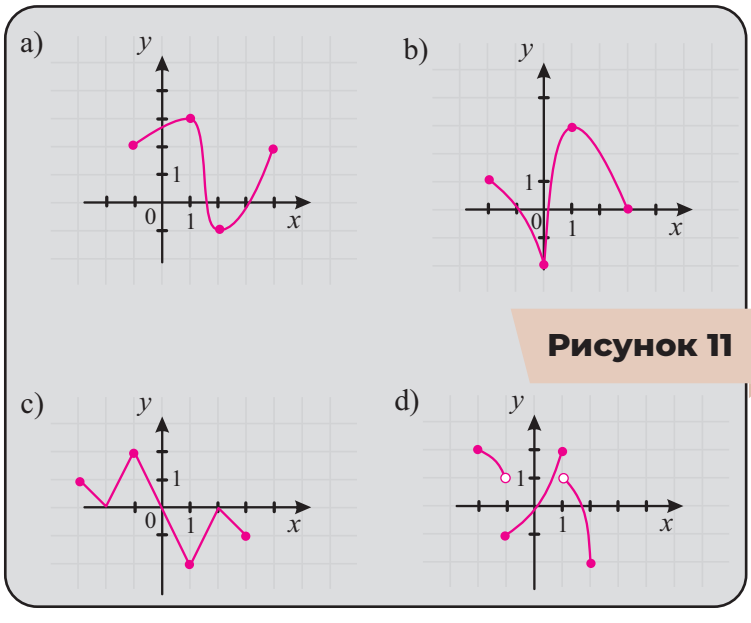


Рисунок 11

(a) возрастает на $[0, 1]$, убывает на $[1, 2]$, возрастает на $[2, 4]$;

(b) убывает на $[-2, 0]$, возрастает на $[0, 1]$, убывает на $[1, 3]$;

(c) убывает на $[-3, -2]$, возрастает на $[-2, -1]$, убывает на $[-1, 1]$, возрастает на $[1, 2]$, убывает на $[2, 3]$;

(d) убывает на $[-2, -1)$, возрастает на $[-1, 1]$, убывает на $(1, 2]$.

7. Постройте графики заданных функций, определите их область определения и множество значений, найдите приближённые промежутки возрастания и убывания.

a) $f(x) = x^2 - 5x$

b) $f(x) = x^3 - 4x$

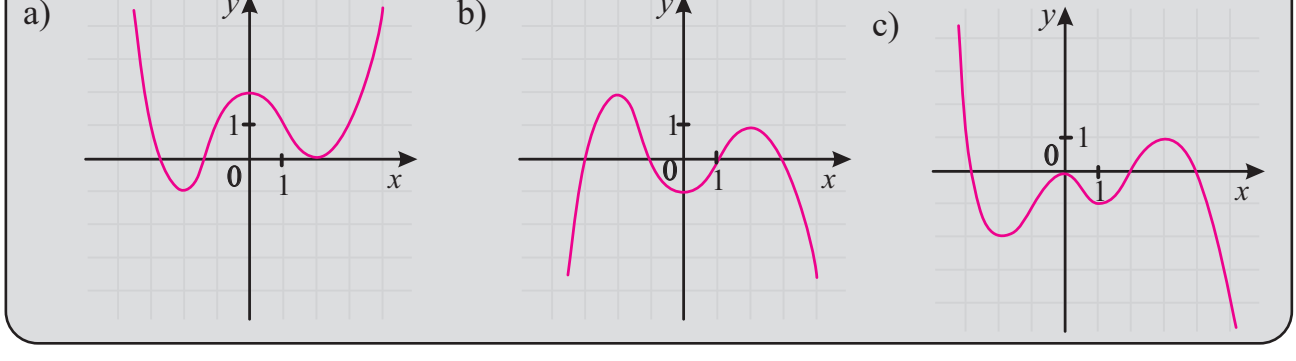
c) $f(x) = x^4 - 16x^2$

8. Дан график функции f (рис. 12). Используя его, приближённо укажите:

1) все экстремальные точки и все экстремумы;

2) интервалы возрастания и убывания функции f.

Рисунок 12



9. Постройте эскиз графика следующих функций:

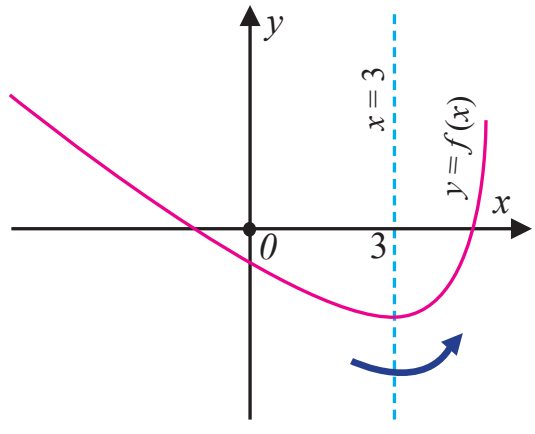
a) функция убывает на $(-\infty;3]$, возрастает на $[3;+\infty)$;

b) функция убывает на $(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$, постоянна на $[0;1]$;

c) функция убывает на $(-\infty;-6]$, возрастает на $[-6;0]$ и постоянна на $[0;+\infty)$;

d) функция убывает на $[-5;10]$, постоянна на $[10;+\infty)$ и принимает наименьшее значение в точке $x=-5$.

Решение. a) На плоскости введем систему Координат Oxy. На оси Ox отметим точку с абсциссой 3 и проведем прямую $x=3$, параллельную оси Oy. На плоскости Oxy в указанном направлении проведем плавную кривую такую, чтобы она:



1) убывала до пересечения с прямой x 3;

2) возрастала после пересечения с прямой $x=3$;

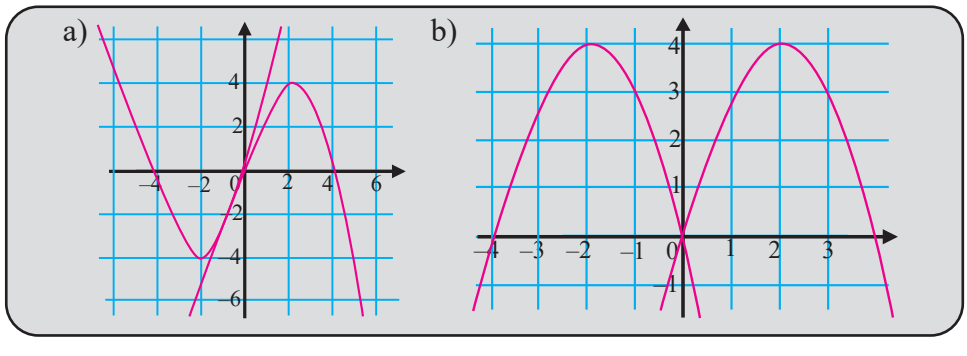
3) пересекалась лишь в одной точке с любой прямой, параллельной оси Oy.

Кривая с этими тремя свойствами является графиком некоторой функции $y=f(x)$, убывающей на промежутке $(-\infty, 3]$ и возрастающей на промежутке $[3, +\infty)$. Смотрите на рисунок.

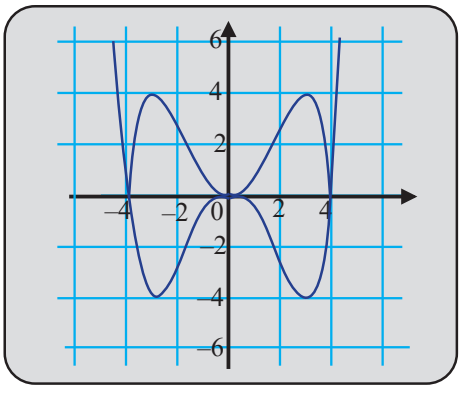
ОТВЕТЫ

1. a) чётная; b) нечётная; c) ни чётная, ни нечётная; d) чётная; e) нечётная; f) ни чётная, ни нечётная; g) ни чётная, ни нечётная; h) нечётная.

2.



5.



6. a) $D(f)=[-1;4]$, $E(f)=[-1;3]$; возрастает при $[-1;1]\cup[2;4]$, убывает при $[1;2]$;

b) $D(f)=[-2;3]$, $E(f)=[-2;3]$; возрастает при $[0;1]$, убывает при $[-2;0]\cup[1;3]$;

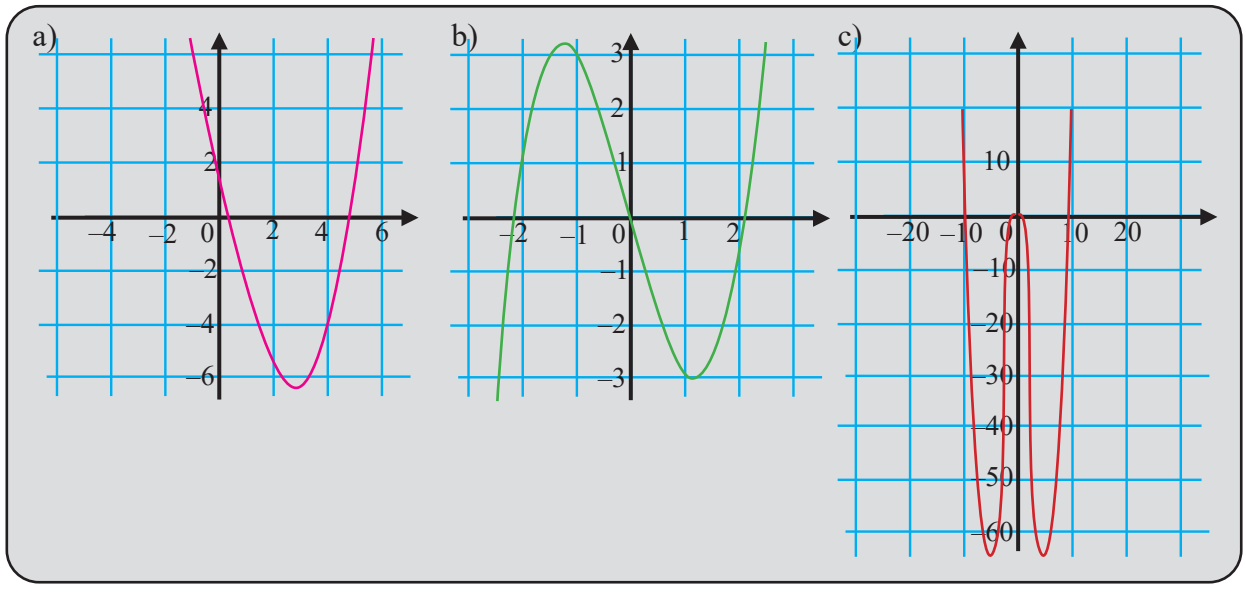
c) $D(f)=[-3;3]$, $E(f)=[-2;2]$, убывает при $[-3;-2]\cup[-1;1]\cup[2;3]$, возрастает при $[-2;-1]\cup[1;2]$;

d) $D(f)=[-2;2]$, $E(f)=[-2;2]$, возрастает при $[-1;1]$, убывает при $[-2;-1]\cup[1;2]$.

7. a) $D(f)=(-\infty;\infty)$, $E(f)=\left[-6\frac{1}{4};\infty\right)$, убывает при $(-\infty;2,5]$, возрастает при $[2,5;\infty)$;

b) $D(f)=(-\infty;\infty)$, $E(f)=(-\infty;\infty)$, возрастает при $(-\infty;-1]\cup[1;\infty)$, убывает при $[-1;1]$;

c) $D(f)=(-\infty;\infty)$, $E(f)=[-64;\infty)$.



8. a) Точки экстремума: $x_1=-2, x_2=0, x_3=2$; $y_{\min}=-1$; $(-\infty;-2]\cup[0;2]$ убывает при, $[-2;0]\cup[2;\infty)$ возрастает при;

b) Точки экстремума: $x_1=-2, x_2=0, x_3=2$; $y_{\max}=2$; $(-\infty;-2]\cup[0;2]$ возрастает при, $[-2;0]\cup[2;\infty)$ убывает при;

c) Точки экстремума: $x_1=-2, x_2=0, x_3=1, x_4=3$, $(-\infty;-2]\cup[0;1]\cup[3;\infty)$ убывает при, $[-2;0]\cup[1;3]$ возрастает при;

d) Точки экстремума: $x_1=-2, x_2=-1, x_3=1, x_4=2$, $(-\infty;-2]\cup[-1;1]\cup[2;\infty)$ убывает при, $[-2;-1]\cup[1;2]$ возрастает при.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Цель урока: Уметь знают перемещать, сжимать, растягивать график функции; определять функцию на основе её графика

Все учащиеся	Знают, что график данной функции можно сдвинуть. Знают, что график данной функции можно сжимать или растягивать.
Большинство учащихся	Умеют перемещать график функции по оси Ox, по оси Oy а также в направлении известного вектора. Умеют сжимать и растягивать график функции по оси Ox и по оси Oy.
Некоторые учащиеся	Знают, что при сдвиге графика функции $y=f(x)$ на: x_0 единиц по оси Ox она принимает вид $y=f(x-x_0)$; y_0 единиц по оси Oy она принимает вид $y=f(x)+y_0$; в направлении вектора $\vec{p}=(x_0,\ y_0)$ она принимает вид $y=f(x-x_0)+y_0$. Знают, что при $k>1$ график функции $y=f(x)$ принимает вид: $y=k\,f(x)$ при растяжении k раз от оси Ox вдоль оси Oy; $y=\frac{1}{k}f(x)$ при сжатии k раз к оси Ox вдоль оси Oy; $y=f(k\,x)$ при сжатии k раз к оси Oy вдоль оси Ox; $y=f\left(\frac{1}{k}x\right)$ при растяжении k раз от оси Oy вдоль оси Ox.

Активизирующие вопросы

1. В каком направлении сдвигается график функции при $x_0>0$? А при $y_0<0$, $x_0<0$, $y_0>0$?
2. На сколько единиц смещается график функции при перемещении его в направлении вектора $\vec{p}=(x_0,\ y_0)$?
3. В каком направлении график функции $y=kf(x)$ сжимается относительно графика функции $y=f(x)$ при $0<k<1$? А как насчёт графика функции $y=f(k\,x)$?

Домашнее задание

1 (a, b), 2 (a, b, c, d)

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

Перемещение графика функции

График заданной функции $y=f(x)$может быть перемещён в плоскости Oxy. Рассмотрим следующие сдвиги графика функции.

1. Перемещение графика функции по оси Ox.

2. Перемещение графика функции по оси Oy.

3. Перемещение графика функции по направлению некоторого вектора.

1. Перемещение графика функции по оси Ox на x_0 единиц.

a) если $x_0 > 0$, то график перемещается на x_0 единиц в направлении оси Ox;

b) если $x_0 < 0$, то график перемещается на $|x_0|$ единиц против направления оси Ox.

2. Перемещение графика функции по оси Oy на y_0 единиц.

a) если $y_0 > 0$, то график перемещается на y_0 единиц по направлению оси Oy;

b) если $y_0 < 0$, то график перемещается против направления оси Oy на $|y_0|$ единиц (рис. 3).

3. Перемещение графика функции в направлении вектора $\vec{p} = (x_0; y_0)$.

a) на $|x_0|$ единиц по направлению (если $|x_0 > 0|$) или против направления (если $|x_0 < 0|$) оси;

b) на $|y_0|$ единиц по направлению (если $|y_0 > 0|$) или против направления (если $|y_0 < 0|$) оси.

Пример 1. Постройте график следующих функций, используя график функции $f(x) = x^2$.

a) $g(x) = (x+4)^2$ b) $h(x) = (x-2)^2$

Решение.

Как показано на рис. 2,

a) перемещаем график функции f на 4 единицы влево для построения графика g,

b) перемещаем график функции f на 2 единицы вправо для построения графика h.

Рисунок 2



Сжатие и растяжение графика функций

График заданной функции $y = f(x)$ можно деформировать (сжать или растянуть) в плоскости Oxy. Рассмотрим два важных случая.

Случай 1. В этом случае заданная функция $y = f(x)$ становится $y = kf(x)$ (рис. 7). При этом:

a) если $k > 1$, то график растягивается k раз от оси Ox вдоль оси Oy;

b) если $0 < k < 1$, то график сжимается k раз по оси Oy к оси Ox;

c) если $k < 0$, то график функции $y = kf(x)$ симметричен графику функции $y = |k|f(x)$ относительно оси Ox.

Случай 2. В этом случае заданная функция $y = f(x)$ становится $y = f(mx)$ (рис. 7). При этом:

a) если $m > 1$, то график сжимается m раз к оси Oy по оси Ox;

b) если $0 < m < 1$, то график растягивается m раз от оси Oy по оси Ox;

c) если $m < 0$, то график функции $y = f(mx)$ симметричен графику функции $y = f(|m|x)$ относительно оси Oy.

Пример 5. Постройте графики следующих функций, используя график функции $f(x) = x^2$ на рисунке 10.

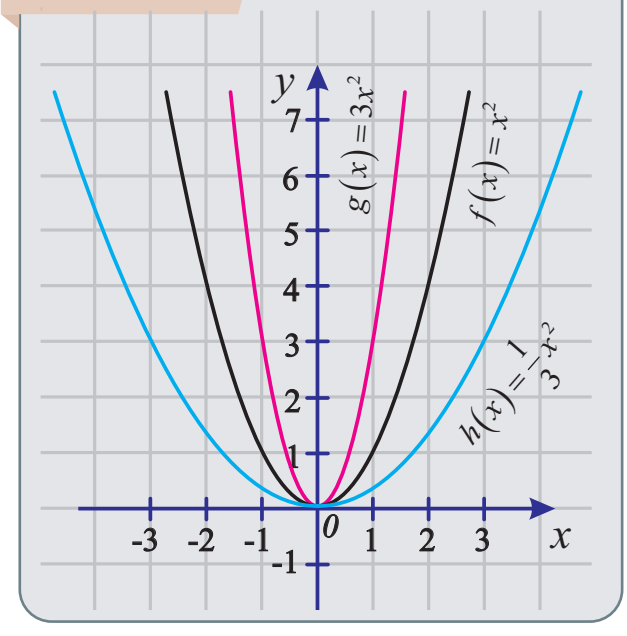
a) $g(x) = 3x^2$; b) $h(x) = \frac{1}{3}x^2$.

Решение.

График функции g строится путём умножения координаты y каждой точки графика функции на 3. То есть для формирования графика функции g график функции f необходимо растянуть по вертикали 3 раза. Полученная парабола «тоньше» по сравнению с исходной параболой.

b) График функции h строится путём умножения координаты y каждой точки графика функции f на $\frac{1}{3}$. То есть для формирования графика функции h график функции f необходимо сжать в 3 раза по вертикали к оси x. Полученная парабола «толще», чем исходная парабола (рисунок 10).

Рисунок 10



ПРИМЕРЫ

1. Зная график функции $f(x)$, объясните, как построить графики следующих функций.

a) $y=f(x)-1$ b) $y=f(x-2)$ c) $y=f\left(\frac{1}{4}x\right)$

d) $y=f(x)+4$ e) $y=f(-x)$ f) $y=3f(x)$

g) $y=-f(x)$ h) $y=\frac{1}{3}f(x)$ i) $y=f(x-5)+2$

j) $y=f(x+1)-1$ k) $y=4f(x+1)+3$ l) $y=f(4x)$

m) $y=-f(x)+5$ n) $y=3f(x)-5$ o) $y=1-f(-x)$

Решение. i) Если задан график функции $f(x)$, то для построения графика функции $y=f(x-5)+2$ переместим график функции $f(x)$ на 5 единиц вправо по оси Ox, а по оси Oy – вверх на 2 единицы.

2. Объясните, с помощью каких преобразований график функции g формируется из графика функции f.

a) $f(x)=x^2,\ g(x)=(x+2)^2$ b) $f(x)=x^2,\ g(x)=x^2+2$

c) $f(x)=x^3,\ g(x)=(x-4)^3$ d) $f(x)=x^3,\ g(x)=x^3-4$

e) $f(x)=|x|,\ g(x)=|x+2|-2$ f) $f(x)=|x|,\ g(x)=|x-2|+2$

g) $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=-\sqrt{x}+1$ h) $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=\sqrt{-x}+1$

3. Постройте графики следующих функций, используя график функции $y = x^2$.

a) $g(x) = x^2 + 1$
b) $g(x) = (x-1)^2$
c) $g(x) = -x^2$
d) $g(x) = (x-1)^2 + 3$

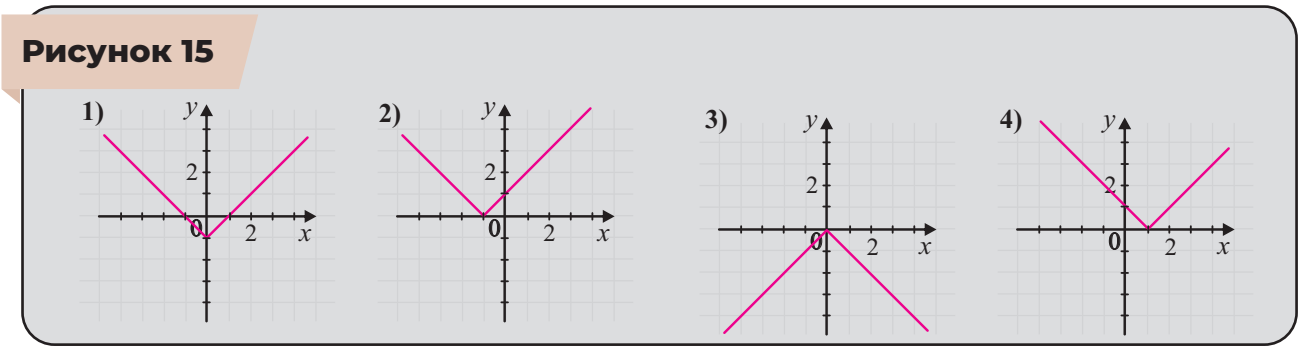
4. Постройте графики следующих функций, используя график функции $y = \sqrt{x}$.

a) $g(x) = \sqrt{x-2}$
b) $g(x) = \sqrt{x} + 1$
c) $g(x) = \sqrt{x+2} + 2$
d) $g(x) = -\sqrt{x} + 1$

5. Для заданных функций найдите соответствующие графики на рисунке 15.

a) $y = |x+1|$
b) $y = |x| - 1$
c) $y = |x-1|$
d) $y = -|x|$

Рисунок 15



6. Постройте графики следующих функций, сделав соответствующие преобразования на графике стандартной функции.

a) $f(x) = x^2 + 3$
b) $f(x) = \sqrt{x} + 1$
c) $f(x) = |x| - 1$
d) $f(x) = \sqrt{x} + 1$
e) $f(x) = (x-5)^2$
f) $f(x) = (x+1)^2$
g) $f(x) = |x+2|$
h) $f(x) = \sqrt{x-4}$
i) $f(x) = -x^3$
j) $f(x) = -|x|$
k) $y = \sqrt[4]{-x}$
l) $y = \sqrt[3]{-x}$
m) $y = \frac{1}{4}x^2$
n) $y = -5\sqrt{x}$
o) $y = 3|x|$
p) $y = \frac{1}{2}|x|$
q) $y = (x-3)^2 + 5$
r) $y = \sqrt{x+4} - 3$
s) $y = 3 - \frac{1}{2}(x-1)^2$
t) $y = 2 - \sqrt{x+1}$
u) $y = |x+2| + 2$
v) $y = 2 - |x|$
w) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x+4} - 3$
x) $y = 3 - 2(x-1)^2$.

Решение. t) Разобьем построение графика функции $y = 2 - \sqrt{x+1}$ на следующие этапы:

Этап 1. Сдвинув график стандартной функции $y = \sqrt{x}$ по оси Ox на 1 единицу влево, получается график функции $y = \sqrt{x+1}$.

Этап 2. График функции $y = \sqrt{x+1}$ располагается симметрично относительно оси Ox и образуется график функции $y = -\sqrt{x+1}$.

Этап 3. График функции $y=-\sqrt{x+1}$ перемещается на 2 единицы вверх по оси Oy.

В результате этих 3 этапов получаем искомый график функции $y=2-\sqrt{x+1}$. Смотрите на рисунки.

7. К графику данной функции f применяются преобразования в указанной последовательности. Напишите формулу полученной функции.

a) $f(x)=x^2$, переместите её график на 3 единицы вниз.

b) $f(x)=x^3$, переместите её график вверх на 5 единиц.

c) $f(x)=\sqrt{x}$, переместите её график на 2 единицы влево.

d) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, переместите её график вправо на 1 единицу.

e) $f(x)=|x|$, переместите её график на 2 единицы влево и на 5 единиц вниз.

f) $f(x)=|x|$, отразив симметрично её график относительно оси абсцисс, переместите на 4 единицы вправо и на 3 единицы вверх.

g) $f(x)=\sqrt[4]{x}$, отразив симметрично её график относительно оси Oy, переместите вверх на 1 единицу.

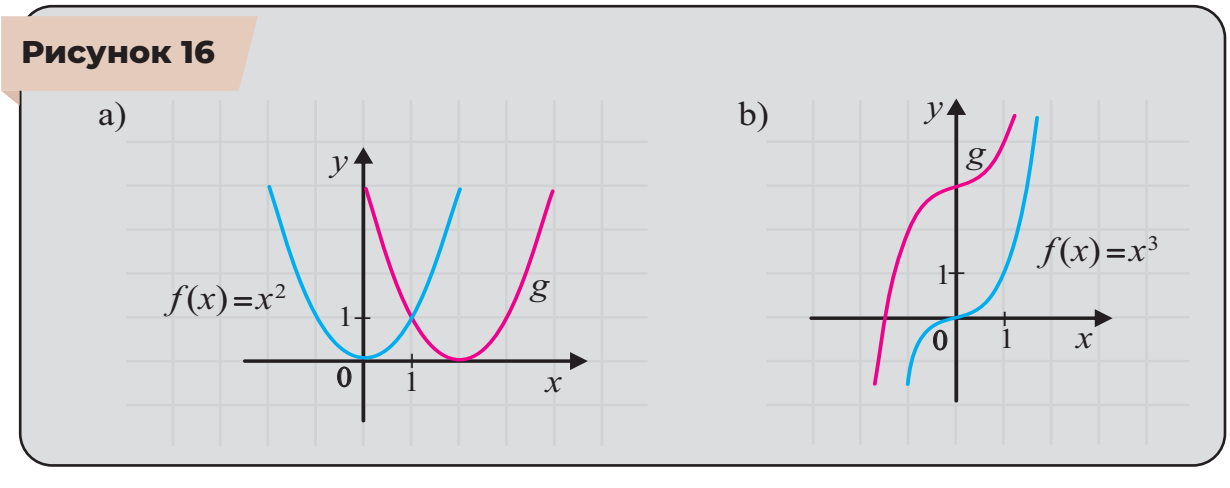
h) $f(x)=x^2$, переместите её график на 2 единицы влево и отразите симметрично относительно оси Ox.

i) $f(x)=x^2$, растяните её график 2 раза по вертикали, переместите на 2 единицы вниз и на 3 единицы вправо.

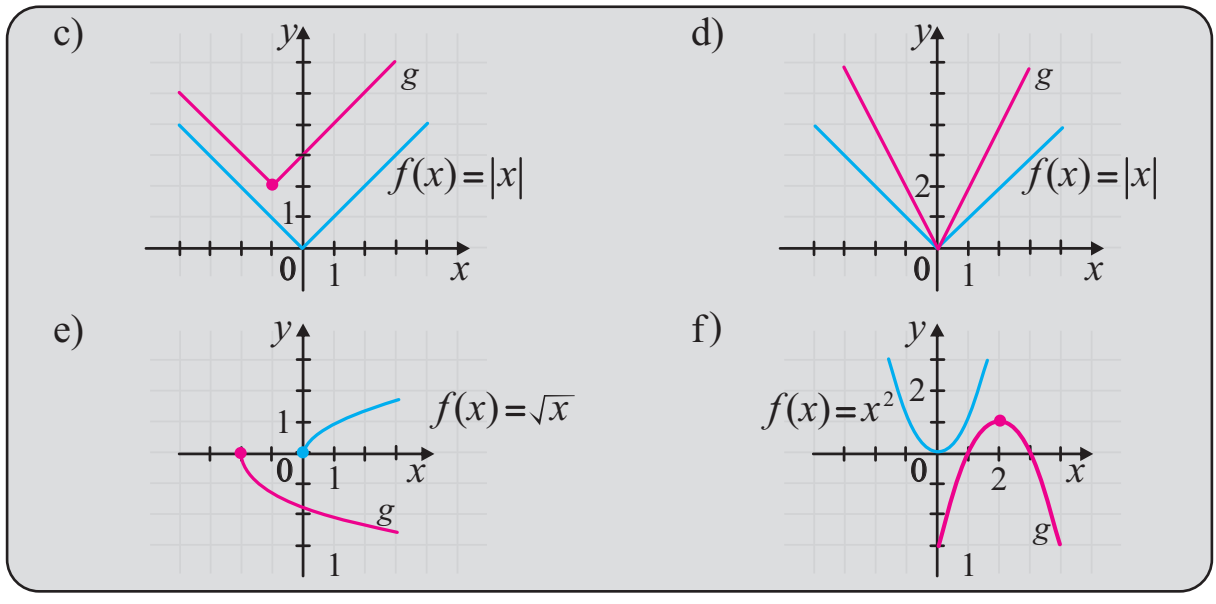
j) $f(x)=|x|$, сожмите её график на $\frac{1}{2}$ по вертикали, переместите на 1 единицу влево и на 3 единицы вверх.

8. Даны графики функций f и g (рис. 16). Найдите формулу функции g, используя функцию f.

Рисунок 16



Решение. c) Из рисунка видно, что график функции $f(x)$ сдвинут на 1 единицу влево по оси Ox. Полученная фигура описывает график функции $f(x+1)$. На следующем шаге график функции $f(x+1)$ перемещается вверх на 2 единицы по оси Oy. Обнаруженная фигура представляет собой график функции $f(x+1)+2$. Итак, должно быть $g(x)=f(x+1)+2$. Учитывая, что $f(x)=|x|$ как показано на рисунке, заключаем, что функция $g(x)$ имеет вид $g(x)=|x+1|+2$.



9. Дана функция $y = f(x)$. Исходя из рисунка 17, найдите соответствующие графики следующих функций.

a) $y = f(x-4)$

b) $y = f(x)+3$

c) $y = 2f(x+6)$

d) $y = -f(2x)$

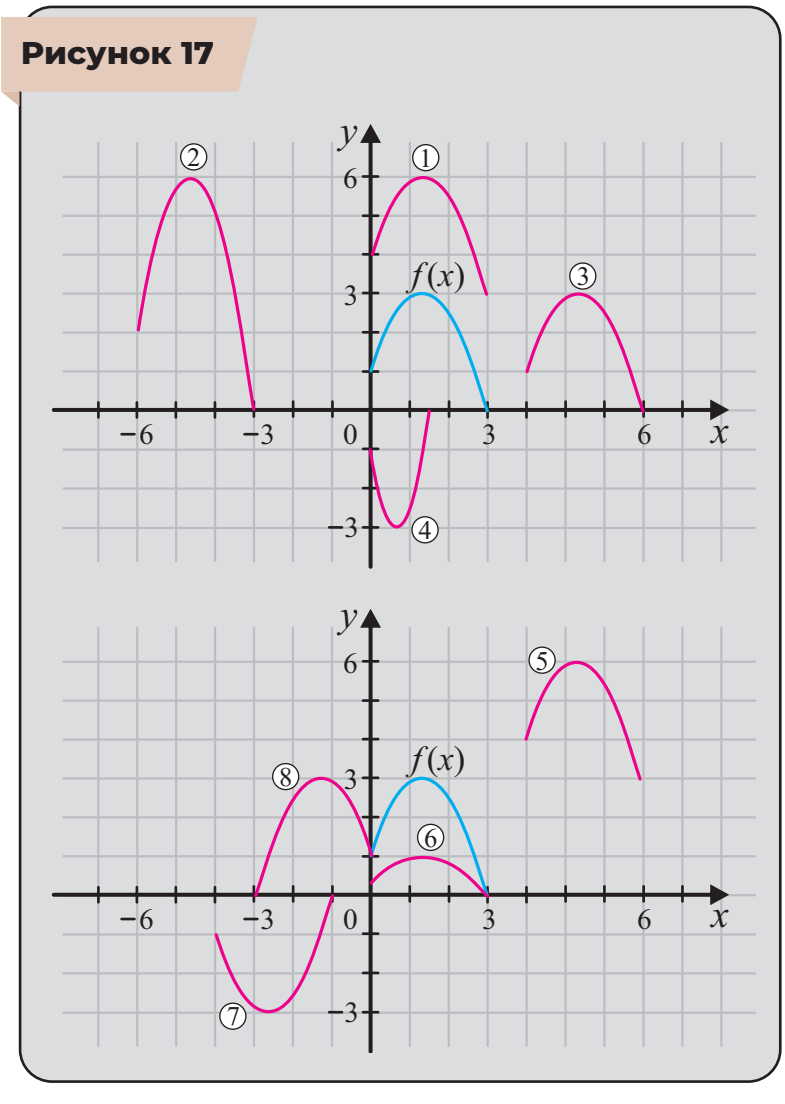
e) $y = \frac{1}{3} f(x)$

f) $y = -f(x+4)$

g) $y = f(x-4)+3$

h) $y = f(-x)$

Рисунок 17



ЛИНЕЙНОЕ И КВАДРАТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Цель урока: Решение жизненных задач (проблем) с помощью линейного или квадратичного моделирования.

Все учащиеся	Знают, что различные процессы в повседневной жизни можно выразить математическим языком через формулы.
Большинство учащихся	Знают, что описание различных процессов и событий повседневной жизни на математическом языке с помощью формулы называется «математическим моделированием». Могут составить математическую модель некоторых простых процессов.
Некоторые учащиеся	Знают, что описание различных процессов повседневной жизни на математическом языке с помощью формул называется «математическим моделированием». Могут построить математические модели процессов, изучаемых в таких предметах, как физика и химия.

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

Задача 1. Найдите наибольшую глубину, из которой поршневой насос может откачивать воду.

Решение. Как известно, давление водяного столбика в трубе насоса вычисляется по формуле

$p = \rho g h$.

Здесь $\rho = 1000$ kg/m^3 – плотность воды, $g = 10$ m/s^2 – ускорение свободного падения, h – высота водяного столбика.

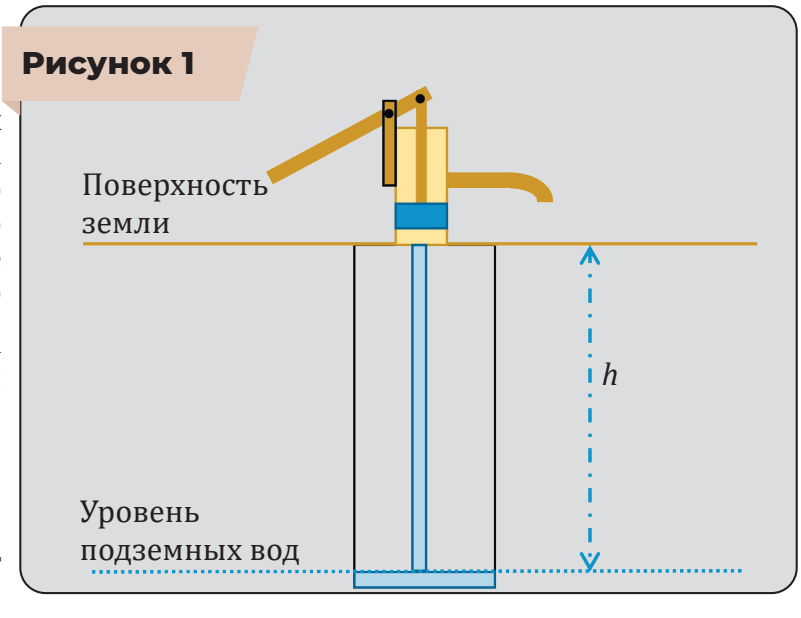
Поскольку насос расположен на уровне земли, то высоту водяного столба можно называть глубиной. Итак, глубина воды может быть найдена формулой

$$h = \frac{p}{\rho g}.$$

В 1643 году в опытах итальянского физика Эванджелиста Торричелли было доказано, что давление водяного столба не превышает атмосферное давление $p_0 = 100\ 000$ Pa, то есть $p \le p_0$. Поэтому глубина откачивания воды в поршневом насосе не может превышать

$$h = \frac{p}{\rho g} \le \frac{p_0}{\rho g} = \frac{100000}{1000 \cdot 10} = 10 \text{ m}.$$

Рисунок 1



Ответ: Поршневой насос может добывать воду с максимальной глубины 10 м.

Пример 2. Ученик выбрал координатную плоскость Oxy таким образом, что он принял свой дом за начало координат $O(0; 0)$ (рис. 2). Затем выяснил, что школа, в которой он учится, находится в точке $C(4; 3)$. Он вычислил, что отрезок прямолинейного участка дороги между домом и школой пересекает ось Ox в точке $(6; 0)$ и ось Oy в точке $(0; 4)$.

Известно, что в школе установлена антенна компании мобильной связи. Ученик заинтересовался нахождением точки дороги, в которой сотовый телефон пассажира движущегося по дороге автомобиля будет лучше всего принимать волну, излучаемую антенной.

Задание. Как бы вы решили эту задачу?

Решение. Очевидно, что в ближайшей к школе точке дороги сотовый телефон имеет наилучший приём. Для решения этой задачи необходимо составить уравнение прямой, описывающей дорогу (AB), и найти координаты её ближайшей к школе точки. Для этого необходимо представить ситуацию графически (см. рис. 2).

Затем строится уравнение прямой, проходящей через точки $A(6; 0)$ и $B(0; 4)$. Для этого, подставив координаты точек $A(6; 0)$ и $B(0; 4)$ в уравнение прямой $y = kx+b$, составляются уравнения

$$0 = k\cdot 6+b$$
$$4 = k\cdot 0+b$$

Из них находятся коэффициенты

$$b = 4,\ k = -\frac{2}{3}.$$

Итак, уравнение прямой (AB) имеет вид

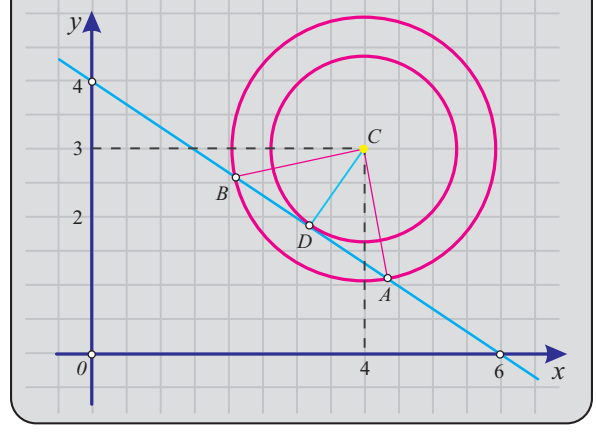
$$y = -\frac{2}{3}x + 4.$$

Решение задачи состоит в нахождении ближайшей точки $D(x; y)$ прямой (AB) к точке $C(4; 3)$. Математическая модель этой ситуации записывается следующим образом:

$$F = \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} \to min,$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 4.$$

Рисунок 2



Математические модели такого типа называются ***квадратичными моделями***, потому что переменные в этой модели имеют первый и второй порядок. Процесс приведения данной задачи к форме квадратичной модели называется ***квадратичным моделированием***.

ПРИМЕРЫ

1. Запишите линейную модель каждого задания:

a) Вы арендовали велосипед с первоначальным взносом 10 000 сумов и тарифом 5 000 сумов в час.

b) Автомастерская установила базовую плату в размере 50 000 сумов и почасовую оплату в размере 15 000 сумов.

c) Длина свечи 30 cm, скорость горения 1,4 cm в час.

d) Специалист по программированию берет 75 долларов за консультацию и 35 долларов за каждый дополнительный час.

e) Текущая температура составляет 25 °C, и ожидается, что ночью она будет снижаться на 2 °C каждый час.

f) Население кишлака составляет 6791 человек и ежегодно уменьшается на 7 человек.

2. Определите, какой является функция в данной таблице – линейной или квадратичной.

x	0	1	3	4	6
y	5	10	20	25	35

3. Когда мяч подпрыгивает вверх и вниз, высота, которую он достигает, постоянно уменьшается. На приведённой ниже таблице показана высота прыжка с течением времени.

a) Найдите наиболее подходящую квадратичную функцию.

b) Найдите максимальную высоту, на которую подпрыгивает мяч.

c) Определите, на какой высоте был мяч через 2,5 секунды.

t (s)	2	2,2	2,4	2,6	3
h (дюйм)	42	33	26	16	2

4. Камень брошен с крыши 70-метрового здания, высота камня как функция времени определяется квадратичной функцией $h(t) = -5t^2 + 25t + 70$, где t выражено в секундах, а высота указана в метрах. Через сколько секунд камень упадёт на землю?

5. Умиде требуется на уборку своей комнаты в два раза больше времени, чем Чарос. Мохичехре на уборку требуется на 10 минут больше, чем Чарос. В общей сложности они тратят 90 минут на уборку своих комнат. Сколько времени нужно Умиде, чтобы убрать свою комнату?

6. Дильшод нырнул в море за жемчугом. Глубина его погружения через t секунд составила $h(t) = -4t^2 + 4t + 3$ метра, $t \geq 0$.

a) На какой глубине находится жемчуг?

b) Сколько времени нужно Дильшоду, чтобы добыть жемчуг?

c) С какой высоты нырнул в воду Дильшод?

7. Зулайхо получила заказ на пошив рубашек. Если она сошьёт x рубашек за один день, то заработает $P(x) = -x^2 + 20x$ (тысяч) сумов.

a) Сколько рубашек она должна сшить, чтобы получить максимальную прибыль?

b) Каким может быть её наибольший доход?

8. В 2005 году население Зарафшана составляло около 55 000 человек. В то время население росло со скоростью около 2 000 человек в год. Постройте линейную модель, чтобы найти население Зарафшана для любого года. Какова была численность населения Зарафшана в 2010 году? Определите численность населения Зарафшана в 2025 году.

ПРОЕКТНАЯ РАБОТА

Цель урока: Цель занятия: учить давать словесную сводку ситуации, описанной на графике, описывать свойства функции на основе её графика.

Все учащиеся	Могут описать ситуацию, изображенную на графике, составлять рассказ по заданному графику.
Большинство учащиеся	Могут подробно описать ситуацию, изображенную на графике, учитывая обе переменные, составлять рассказ по заданному графику.
Некоторые учащиеся	Могут подробно описать ситуацию, изображенную на графике, связав двум переменным, составлять рассказ по заданному графику.

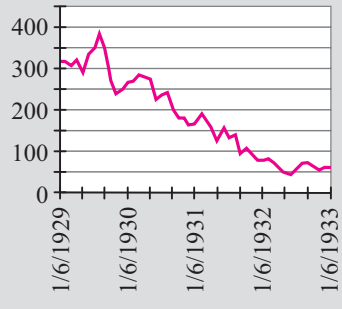
Выделенное время	**Учитель**	**Учащиеся**	**Необходимые учебные материалы**
2 мин.	делит учащихся на малые группы по 5-6 человек.	делятся на небольшие группы	
3 мин.	объясняет рисунки 1 и 2 в учебнике.	внимательно слушают учителя	Рисунки 1 и 2 в учебнике, стр. 82.
10 мин.	объясняет группам условие задания 1, дает каждой группе лист формата А4 для создания нового рассказа.	а) сопоставляют каждую историю с одним из графиков на рисунке 3 . б) пишут соответствующий рассказ для графика, который не сопоставлен ни одной истории.	Графики на рисунке 3 должны быть предварительно нарисованы на доске. (Если имеется проектор, то уместно показать на экране). Бумага формата А4 (для каждой группы).
	обеспечит, что каждая группа поделится своими ответами с классом; слушает, проверяет, интерпретирует ответы групп.	Выйдет по 1 представителю от каждой группы и поделится своими ответами, расскажет составленный группой рассказ	Наличие регламента. Каждой группе дается не более 1 минуты.
10 мин.	объясняет группам условие задания 2, объясняет , что пройденный путь каждого бегуна на графике показан как функция от времени. Каждой группе дается 8 минут на обсуждение.	описывают, что график на рис. 4 говорит о гонке, кто выиграл гонку, завершил ли гонку каждый бегун и что случилось со спортсменом *B*.	График на рисунке 4 должен быть предварительно нарисован на доске. (Если имеется проектор, то уместно показать на экране). Бумага формата А4 (для каждой группы).
	обеспечит, что каждая группа поделится своими ответами с классом; слушает, проверяет, интерпретирует ответы групп.	Выходит по 1 представителю от каждой группы (не тот учащийся, который ответил на предыдущее задание) и делится своими ответами, рассказывает версию происшествия, случившегося со спортсменом *B*.	

10 мин.	говорит, что каждая группа составила рассказ, соответствующий графику, изображенному на рисунке 5 (включая любую ситуацию); слушает, проверяет и комментирует ответы групп.	Выходит по 1 представителю из каждой группы (не учащиеся, ответившие в предыдущих заданиях) и поделятся своими ответами. *Учащиеся понимают и осознают, что на одном графике можно создавать разные рассказы.*	График на рисунке 5 должен быть предварительно нарисован на доске. (Если имеется проектор, то уместно показать на экране). Бумага формата А4 (для каждой группы).
5 мин.	дает каждой группе тему проектной работы в качестве домашнего задания; объясняет порядок выполнения и требования проектной работы.	внимательно слушают учителя; обсуждают порядок проведения проектных работ; делят задачи между собой.	Лист бумаги с распечатанными на нем темами проектной работы. При каждой теме пишется имя и фамилия учащегося, выбравшего эту тему.
Рефлексия учителя: подчеркните, что на уроке было пройдено хорошо, а над чем нужно поработать.			

Любой график умеет рассказывать

Если картинка передаёт тысячи слов, то график объясняет хотя бы несколько предложений. На самом деле, график иногда может представить ситуацию быстрее и эффективнее, чем множество слов. Разрушительные последствия краха фондового рынка 1929 года чётко видны на графике промышленного индекса Доу Джонса (DJIA). Газеты того времени опубликовали такие графики как эффектный способ объяснения, насколько был велик размер ущерба.

Рисунок 1



Не нужно слов, чтобы передать смысл изображения рис. 2. Диаграмма рассказывает простую историю. Произошёл спад чего-то: может быть, продаж, прибыли или производительности – и ответственное лицо этим очень обеспокоено.

Рисунок 2



В этом исследовательском проекте мы изучим истории, которые рассказывают нам графики, и, в свою очередь, создадим график, рассказывающий историю.

Чтение истории по графику

1. На рисунке 3 изображены четыре графика зависимости температуры от времени (начиная с 8:00), за которыми следуют три истории.

a) сопоставьте каждую из историй с одним из графиков;

b) напишите соответствующую историю для графика, не соответствующего ни одной истории.

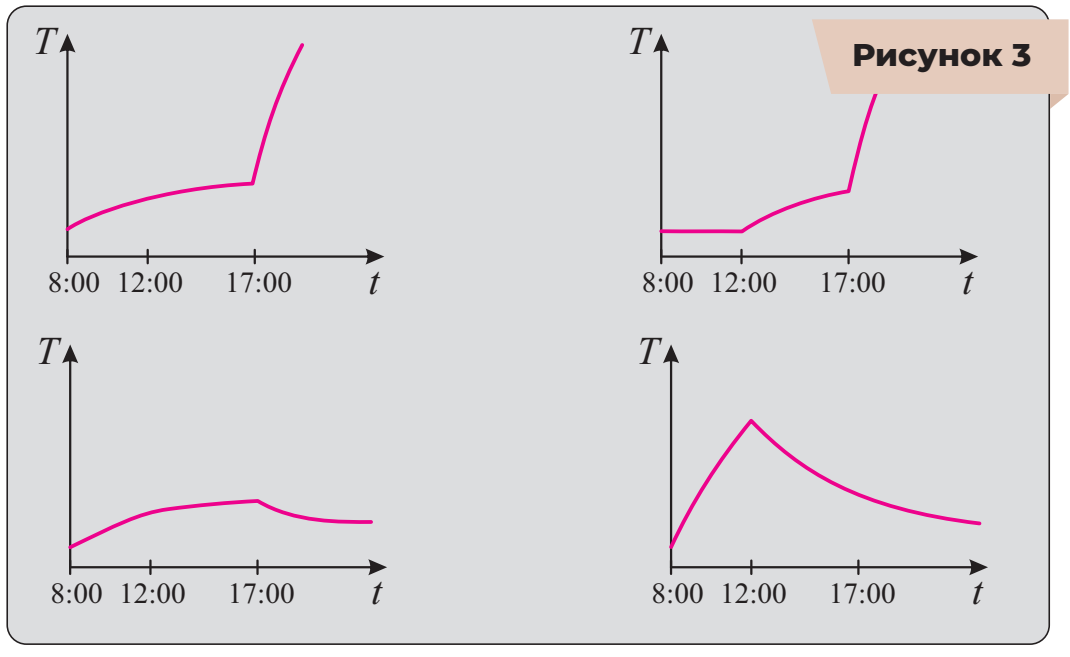


Рисунок 3

История 1	В полдень я достала мясо из морозилки и положила на стол, чтобы разморозить. Придя домой, я приготовила его в духовке.
История 2	Утром я достала мясо из морозилки и положила на стол, чтобы разморозить. Придя домой, я приготовила его в духовке.
История 3	Утром я достала мясо из морозилки и положила на стол, чтобы разморозить. Но забыла об этом и поела в кафе по дороге домой с работы. Когда я вернулась домой, то положила мясо обратно в морозилку.

2. В беге с препятствиями на 100 метров приняли участие трое бегунов. График на рис. 4 показывает пройденную дистанцию как функцию времени для каждого бегуна. Опишите, что график говорит вам об этой гонке. Кто её выиграл? Все ли бегуны дошли до финиша? Как вы думаете, что случилось со спортсменом *B*?

3. Составьте историю (о любой ситуации), соответствующую графику на рис. 5.

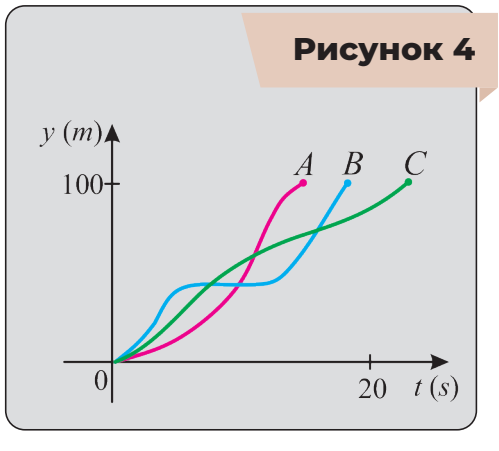


Рисунок 4

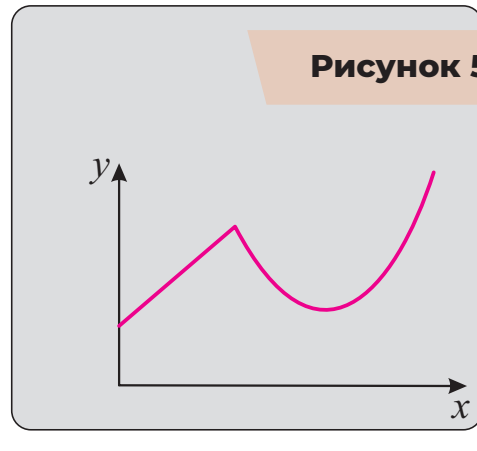


Рисунок 5

Порядок выполнения:

1. Нахождение информации о заданном графике (диаграмме).

2. Приведение видов заданных графиков (диаграмм).

3. Определение, для каких видов информации пригоден данный график (диаграмма) и его запись с примерами.

4. Нарисуйте 3 графика и придумайте рассказ для каждого графика.

Требования к работе:

1. Реферат (не менее 5 страниц), поля – стандартные (слева – 3, справа – 1,5, сверху – 2, снизу – 2, шрифт – Times New Roman 14 пт, межстрочный интервал 1,5 пт.

2. Презентация Power Point (не менее 8 слайдов).

3. Защита проектной работы (с презентацией) 5 минут.

Срок выполнения: 1 неделя

Критерии оценки: Рубрика

Категория/ Оценка	5	4	3	2
Реферат	Содержание реферата полностью соответствует теме. Содержит 5 и более страниц.	Большая часть реферата соответствует теме. Состоит из 4 страниц.	Содержание реферата частично соответствует теме. Состоит из 2 или 3 страниц.	Содержание реферата не соответствует теме. Состоит из 1 страницы или отсутствует.
Презентация (Power Point)	Состав презентации полностью соответствует теме. Содержит 8 и более страниц.	Большая часть презентации соответствует теме. Состоит из 6 или 7 страниц.	Состав презентации частично соответствует теме. Состоит из 4 или 5 страниц.	Состав презентации не соответствует теме. Состоит из менее 4 страниц или не выполнено.
Математический состав проекта (3 графика и 3 рассказа)	Все 3 графика подобраны правильно по теме. Они не похожи. Каждый график обеспечен соответствую-щим рассказом.	2 графика подобраны правильно по теме. Каждый график обеспечен соответствующим рассказом.	1 график подобран правильно по теме. Каждый график обеспечен соответствую-щим логически правильным рассказом.	Не приведены график и рассказ.
Соблюдение требований и порядкам	Требование и порядок были полностью соблюдены и работа представлена в срок.	Требование и порядок были соблюдены в большинстве части, и работа представлена в срок.	Требование и порядок не соблюдены в большинстве части, работа представлена в срок.	Требование и порядок не соблюдены в большинстве части, работа не представлена в срок.
Навык презентовать проекта	Информация была представлена с отличным знанием и творческим подходом.	Информация была представлена с приемлемым знанием и творческим подходом.	Информация была представлена с ограниченным знанием и творческим подходом.	Информация неясна или отсутствует, представлена с ограниченным творческим подходом.
Навык работать в группе	Каждый член группы внес свой вклад в материал проекта и презентацию.	Большинство из членов группы внес свой вклад в материал проекта и презентацию.	Некоторые члены группы внесли свой вклад в материал проекта и презентацию.	Отдельные члены группы внесли свой вклад в материал проекта и презентацию.

СУММАТИВНАЯ ОЦЕНКА. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1.

Вариант I

1. Функция $f(x)$ определяется делением суммы x и 3 на 2.

a) Запишите аналитическую форму функции $f(x)$.

b) Составьте таблицу значений $f(x)$, соответствующих значениям $x = -3,\ -1,\ 1,\ 3$.

c) Постройте график функции $f(x)$.

2. Найти область определения и множество значений функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

3. Даны функции $f(x) = \dfrac{2x+1}{3}$ и $g(x) = \dfrac{1}{2}x - 2$.

Найти функции $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ и $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$.

4. Даны функции $f(x) = \dfrac{4x-3}{2}$ и $g(x) = \dfrac{1}{4}x + 1$. Найти:

a) $f(g(x))$; b) $f^{-}(x)$.

5. Проверьте, является ли функция $f(x) = x^2 - \sqrt[3]{x}$ четной или нечетной.

Вариант II

1. Функция $f(x)$ определяется прибавлением 4 к половине x.

a) Запишите аналитическую форму функции $f(x)$.

b) Составьте таблицу значений $f(x)$, соответствующих значениям $x = -2,\ 0,\ 2,\ 2$.

c) Постройте график функции $f(x)$.

2. Найти область определения и множество значений функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$.

3. Даны функции $f(x) = 3x - 5$ и $g(x) = 2x + 1$. Найти функции $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ и $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$.

4. Даны функции $f(x) = 2x - 8$ и $g(x) = \dfrac{3}{2}x + 6$. Найти:

a) $g(f(x))$; b) $g^{-1}(x)$.

5. Проверьте, является ли функция $f(x) = x - \sqrt[3]{x^2}$ четной или нечетной.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Цель урока: Уметь решать элементарные рациональные уравнения.

Все учащиеся	Решают элементарные рациональные уравнения.
Большинство учащихся	Решают элементарные дробно-рациональные уравнения. Находят область определения.
Некоторые учащиеся	Решают дробно-рациональные уравнения методом замены переменных. Находят область определения. Проверяют корни.

Оценка

Учащиеся оцениваются в классе на основе формативной оценки.

Рекомендуется выполнить нечетные номера из примеров 1-35 за 2 занятия.

Рекомендуется использовать дифференцированный подход, основанный на успеваемости учащихся, при котором все учащиеся должны уметь решать зеленые примеры.

Рекомендуется показать решение по крайней мере 1 зеленого, 1 синего и 1 красного примера.

Активизирующие вопросы

1. Привести выражение $\frac{1}{x}+\frac{2}{x-2}$ к общему знаменателю.

2. Какова область определения приведенного выше выражения?

3. По какой формуле можно найти скорость, зная путь и время?

Допустимые ошибки и рекомендации по их устранению

1. Учащиеся могут допустить ошибки при приведении дробно-рациональных выражений к общему знаменателю. Для предотвращения этого рекомендуется в начале урока напомнить правила приведения дробей к общему знаменателю.

2. Учащиеся часто не учитывают область определения дробно-рационального выражения. Рекомендуется объяснить важность область определения.

3. Учащиеся могут не учитывать, что некоторые из найденных корней не удовлетворяют заданному уравнению, то есть являются посторонним корнем уравнения. Чтобы избежать от этого, рекомендуется обучать учащимся проверке, подставляя каждый найденный корень в исходное уравнение.

Домашнее задание

Примеры **2–36,** чётные номера, страницы 68-69.

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

Определение

Равенство вида $f(x)=g(x)$ называется ***уравнением с одной неизвестной*** (здесь $f(x)$ и $g(x)$ функции, зависящие от переменной x).

Если при подстановке значения $x = a$ в уравнение образуется правильное числовое равенство $f(a) = g(a)$, то значение a называется ***корнем уравнения*** $f(x) = g(x)$.

Решить уравнение означает найти все его корни или доказать, что не существует ни одного корня. Совокупность всех корней уравнения называется решением уравнения.

Если не существует ни одного значения неизвестного x, являющегося корнем уравнения, то используется выражение «***Уравнение не имеет корня***» или «***Решением уравнения является пустое множество***», которое также можно записать как $x \in \varnothing$.

Пример 1. Решите уравнение $(x+3)(2x-1)(x-2)=0$.

Решение. Правая часть этого уравнения равна нулю, а левая часть является произведением трёх выражений. Поскольку произведение равно нулю только тогда, когда хотя бы один из его множителей равен нулю, то приравниваем в отдельности каждый множитель нулю: $x+3=0$, $2x-1=0$, $x-2=0$. Из этих полученных уравнений мы можем определить корни уравнения:

Ответ: $x_1=-3$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=2$.

Определение.

Если все корни уравнения $f(x)=g(x)$ являются корнями уравнения $f_1(x)=g_1(x)$ и наоборот, все корни уравнения $f_1(x)=g_1(x)$ являются корнями уравнения $f(x) = g(x)$, то есть если их решения совпадают, то такие уравнения называются ***эквивалентными уравнениями***.

Пример 3. Проверьте эквивалентность уравнений $3x - 6 = 0$ и $2x - 1 = 3$.

Решение. Уравнения $3x - 6 = 0$ и $2x - 1 = 3$ эквивалентны, поскольку $x = 2$ является единственным корнем каждого из этих уравнений.

Любые два уравнения, решением которых является пустое множество, эквивалентны.

Эквивалентные уравнения обозначаются следующим образом: $3x-6=0 \Leftrightarrow 2x-1=3$.

Уравнение переходит в эквивалентное в следующих случаях:

a) когда какое-нибудь слагаемое уравнения переносится из одной его части в другую с противоположным знаком. Например $f(x)=g(x)+t(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=t(x)$.

b) когда обе части уравнения умножаются или делятся на число, отличное от нуля.

Целые рациональные уравнения

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы целыми рациональными выражениями, то уравнение $f(x)=g(x)$ называется целым рациональным уравнением.

Областью определения такого уравнения является множество всех действительных чисел.

Определение

Уравнение вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, $a_0 \neq 0$, называется ***рациональным уравнением n-ой степени стандартного вида***. Здесь a_0, a_1, ..., a_{n-1} коэффициенты, a_n свободный член, $n \in N$.

Если $a_0 = 1$, то $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ называется ***приведённым целым рациональным уравнением n-ой степени***.

Теорема. Если корни приведённого целого рационального уравнения с целыми коэффициентами – целые числа, то они являются делителями свободного члена.

Пример 4. Решите уравнение $x^4+2x^3=11x^2-4x-4$.

Решение. Сначала приведём уравнение к стандартному виду $x^4+2x^3-11x^2+4x+4=0$.

Чтобы убедиться, что это уравнение имеет целые корни, запишем делители свободного члена 4: $\pm1, \pm2, \pm4$. Подставив эти числа в уравнение, определим, что $x_1=1$ и $x_2=2$ будут корнями уравнения. Следовательно, многочлен $x^4+2x^3-11x^2+4x+4$ делится на многочлен $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$ без остатка.

$$\begin{array}{r|l}
x^4+2x^3-11x^2+4x+4 & x^2-3x+2 \\
\underline{-\,x^4-3x^3+2x^2} & \underline{} \\
5x^3-13x^2+4x+4 & x^2+5x+2 \\
\underline{-\,5x^3-15x^2+10x} & \\
2x^2-6x+4 & \\
\underline{-\,2x^2-6x+4} & \\
0 &
\end{array}$$

Уравнение перепишем в виде $(x-1)(x-2)(x^2+5x+2)=0$.

Следовательно, полученное уравнение равносильно заданному. Приравняв каждый множитель нулю, найдём корни уравнения.

Ответ: $x_1=1;\ x_2=2,\ x_{3,4}=\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$.

Дробно-рациональные уравнения

Пример 8. Найдите корни уравнения $\dfrac{2x+3}{x-1}=0$.

Решение. $\begin{cases}2x+3=0\\x-1\neq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x=-3\\x\neq1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1,5\\x\neq1\end{cases}$

Ответ: $x=-1,5$.

Пример 9. Решите уравнение: $\dfrac{4x+4}{3(x+2)-3}=0$.

Решение. $\begin{cases}4x+4=0\\3(x+2)-3\neq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x=-4\\3x+6-3\neq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\x\neq-1\end{cases}$

Ясно, что значение x не может быть равно – 1. Поэтому

Ответ: $x\in\varnothing$.

Внимание! При решении дробно-рационального уравнения приравниванием числителя нулю всегда проверяйте принадлежность его корней области определения уравнения!

Рациональные уравнения также используются при решении текстовых задач. Ниже смоделированы и решены в виде рационального уравнения задачи о движении и работе.

Задача на действие. Вертолёт пролетел 120 km по ветру и затем вернулся. Он потратил на это 6 часов времени. Найдите скорость ветра, если скорость вертолета в безветренную погоду 45 km/h.

Решение. Пусть x km/h – скорость ветра. Тогда скорость вертолёта по направлению ветра равна $(45 + x)$ km/h, а против направления ветра равна $(45 – x)$ km/h. По условию вертолёт потратил всего 6 часов. Если разделить расстояние на каждую скорость и сложить полученное время полёта по ветру и против ветра, то получим общее время полёта:

$$\frac{120}{45+x}+\frac{120}{45-x}=6$$

Получилось дробно-рациональное уравнение $\frac{120}{45+x}+\frac{120}{45-x}-6=0$. Приводим его к общему знаменателю $\frac{120(45-x)+120(45+x)-6(45+x)(45-x)}{(45+x)(45-x)}=0$

Упрощаем числитель и находим его нули $6x^2-1350=0$

$$x^2=225$$

$$x_1=-15;\ x_2=15$$

Так как скорость ветра отрицательной (относительно своего направления) быть не может, то $x=-15$ km/h не является корнем. Тогда искомая скорость ветра будет равна 15 km/h.

Ответ: Скорость ветра 15 km/h.

Задача на работу. Два тракториста вместе вспахивают поле за 4 дня. Если первый тракторист обрабатывает один это поле на 6 дней меньше, чем второй тракторист, сколько дней потребуется каждому трактористу по отдельности?

Решение. Пусть 1-й тракторист вспашет поле за x дней. Тогда 2-му трактористу требуется $(x + 6)$ дней. Значит, 1-й тракторист может за 1 день вспахать $\frac{1}{x}$ часть поля, а 2-й тракторист вспашет $\frac{1}{x+6}$ часть. По условию за 1 день они вместе обрабатывают $\frac{1}{4}$ часть поля. Таким образом,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{4}$$

Преобразуем это уравнение в рациональное уравнение

$$\frac{4(x+6)+4x-x(x+6)}{4x(x+6)}=0$$

$$\frac{-x^2+2x+24}{4x(x+6)}=0$$

Полученное рациональное уравнение равносильно следующей системе

$$\begin{cases} x^2-2x-24=0 \\ 4x(x+6)\neq 0; \end{cases}$$

Решаем её $D=(-2)^2-4\cdot(-24)=100;\ x_{1,2}=\dfrac{2\pm10}{2}\Rightarrow x_1=6;\ \ x_2=-4$

Значение $x=-4$ не может быть корнем, хотя оно является корнем уравнения. Это связано с тем, что область определения составленного уравнения состоит из неотрицательных значений неизвестного (дни не могут быть отрицательными). Итак, $x+6=6+6=12$.

Ответ: 1-й тракторист вспашет поле за 6 дней, а 2-й тракторист – за $x+6=6+6=12$ дней.

ПРИМЕРЫ

Решите дробно-рациональные уравнения (1–10).

1. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2x}{x+1}=0$

2. $\dfrac{2y-5}{y+5}=\dfrac{3y+21}{2y-1}$

3. $\dfrac{5x-7}{x-3}=\dfrac{4x-3}{x}$

4. $\dfrac{x+1}{2(x-1)}=\dfrac{9}{2(x+4)}+\dfrac{1}{x-1}$

5. $\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{4x}{x^2-1}$

6. $\dfrac{x^2-2x}{x-2}=x^2-2$

Решение.

$$\frac{x^2-2x}{x-2}=x^2-2\Rightarrow\frac{x(x-2)}{x-2}=x^2-2\Rightarrow\begin{cases}x=x^2-2\\x\neq2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-x-2=0\\x\neq2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_{1,2}=-1;2\\x\neq2\end{cases}\Rightarrow x=-1$$

Ответ: x = -1.

7. $\dfrac{7}{2x+9}-6=5x$

8. $\dfrac{15}{x-2}=\dfrac{14}{x}+1$

9. $\dfrac{4}{x-2}+\dfrac{4}{x+2}=\dfrac{3}{2}$

10. $\dfrac{3x}{x^2-1}=2\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)$

Решите дробно-рациональные уравнения (11–30).

11. $\dfrac{1}{x^2-12x+36}+\dfrac{12}{36-x^2}=\dfrac{1}{x+6}$

12. $\dfrac{8c-3}{4c^2-2c+1}+\dfrac{6}{8c^3+1}=\dfrac{2}{2c+1}$

13. $\dfrac{3x-2}{x-1}+\dfrac{x-4}{x+3}=\dfrac{3x^2+1}{(x-1)(x+3)}$

14. $\dfrac{2-3x}{x+1}-\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{x+1}{2-3x}=\dfrac{4}{3}$

15. $\dfrac{x-49}{x+6}+\dfrac{2x+50}{x+5}=2$

16. $\dfrac{(x+2)^2-9}{x-1}\cdot(x-5)=-24$

17. $(x+4)(x^2-1)=4x^2+24x-\dfrac{4x^2+20x}{5x+x^2}$

Решение.

$$(x+4)(x^2-1)=4x^2+24x-\frac{4x^2+20x}{5x+x^2}\Rightarrow x^3+4x^2-x-4=4x^2+24x-\frac{4\,\cancel{x(x+5)}}{\cancel{x(5+x)}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^3-x-4=24x-4\\x\neq 0;x\neq -5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^3-25x=0\\x\neq 0;x\neq -5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0,x_{2,3}=\pm 5\\x\neq 0;x\neq -5\end{cases}\Rightarrow x=5$$

Ответ: $x=5$.

18. $\dfrac{25x-21}{2x^2+5x-12}=\dfrac{x-4}{2x-3}-\dfrac{2x-3}{x+4}$

19. $\dfrac{3}{x^2-2x+1}+\dfrac{2}{1-x^2}=\dfrac{1}{1+x}$

20. $\dfrac{6}{x-1}+\dfrac{6}{(x-1)(x-3)}+\dfrac{3}{3-x}=7$

21. $\dfrac{x^5-4x^3}{x-2}=16+2x^3$

22. $\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}-\dfrac{9}{(x+2)(x-7)}=1$

23. $x^2+x+1=\dfrac{15}{x^2+x+3}$

24. $\dfrac{x^2+2}{3x-2}-\dfrac{3x-2}{x^2+2}=2\dfrac{2}{3}$

Решение.

$$\frac{x^2+2}{3x-2}-\frac{3x-2}{x^2+2}=2\frac{2}{3}\Rightarrow\left[\frac{x^2+2}{3x-2}=t\right]\Rightarrow t-\frac{1}{t}=\frac{8}{3}\Rightarrow\begin{cases}3t^2-8t-3=0\\t\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_{1,2}=-\frac{1}{3};3\\t\neq 0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{cases}\frac{x^2+2}{3x-2}=-\frac{1}{3}\\x\neq\frac{2}{3}\end{cases}\right.\left.\begin{cases}\frac{x^2+2}{3x-2}=3\\x\neq\frac{2}{3}\end{cases}\right.\Rightarrow\left[\begin{cases}3x^2+6=2-3x\\x\neq\frac{2}{3}\end{cases}\right.\left.\begin{cases}x^2+2=9x-6\\x\neq\frac{2}{3}\end{cases}\right.\Rightarrow\left[\begin{cases}x\in\varnothing\\x_{1,2}=1;8\\x\neq\frac{2}{3}\end{cases}\right.\Rightarrow x_{1,2}=1;8.$$

25. $x^2-5x+\dfrac{24}{x^2-5x}+10=0$

26. $\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}=2\dfrac{1}{2}$

27. $\dfrac{2}{x^2+3}+\dfrac{4}{x^2+7}=1$

28. $\dfrac{1}{x(x+2)}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{12}$

29. $\dfrac{x^2-3x-1}{x^2-2x+4}=\dfrac{x^2-2x}{x^2-x+1}$

30. $\dfrac{x^2-4x-1}{x^2-3x+5}=\dfrac{x^2-3x+1}{x^2-2x+2}$

31. Расстояние между двумя пристанями составляет 80 km по реке. Катеру потребовалось 8 часов 20 минут, чтобы пройти от одной пристани до другой. Найдите скорость катера в стоячей воде, если скорость течения реки 4 km/h.

32. Если два рабочих работают вместе, то они выполнят работу за 12 дней. Если один из них выполняет первую половину, а затем отставшую половину выполняет другой, то работа будет выполнена за 25 дней. За сколько дней каждый рабочий выполнит эту работу, если они будут работать по отдельности?

33. Трактор «Беларусь» может вспахать 7 ha земли за 3 дня, а трактор «Case» – 17 ha за 2 дня. В фермерском хозяйстве «Dehqon qudrati» имеются 2 трактора «Беларусь» и 1 трактор «Case». Если эти тракторы будут работать вместе, за сколько дней можно вспахать 237 ha земли?

34. Автомобиль двигался со скоростью 120 km/h на 80-километровом участке дороги, где не было радара, 70 km/h на 35-километровом и 50 km/h на 25-километровом участках с радарами. Найдите среднюю скорость автомобиля на всём пути.

35. Работа выполняется первым рабочим в одиночку за a дней, второй рабочий выполняет работу на b дней дольше, а третий рабочий – на b дней быстрее. За сколько дней трое рабочих выполнят работу вместе?

Решение. Из того, что работу

1-й рабочий выполняет за $x_1 = 1$ $t_1 = a$ дней,
2-й рабочий выполняет за $t_2 = a + b$ дней,
3-й рабочий выполняет за $t_3 = a - b$ дней,

надо найти требуемые дни для совершения этой работу при совместной работе троих рабочих.

Из формулы работы $A = P \cdot t$ считая $A = 1$, находим мощность каждого рабочего $P_1 = \frac{1}{a}$, $P_2 = \frac{1}{a+b}$, $P_3 = \frac{1}{a-b}$. При совместной работе мощности складываются:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} = \frac{(a-b)(a+b) + a(a-b) + a(a+b)}{a(a-b)(a+b)} = \frac{a^2 - b^2 + a^2 \cancel{-ab} + a^2 \cancel{+ab}}{a(a^2-b^2)} = \frac{3a^2 - b^2}{a(a^2-b^2)}.$$

Поэтому для совершения работы при совместной работе требуется $\frac{1}{\frac{3a^2-b^2}{a(a^2-b^2)}} = \frac{a(a^2-b^2)}{3a^2-b^2}$ дней.

Ответ: $\frac{a(a^2-b^2)}{3a^2-b^2}$ дней.

36. Группа путешественников отправилась в плавание по реке на катере против течения. Они должны вернуться через 4 часа 40 минут. Если скорость катера в стоячей воде 12 km/h, а скорость течения 3 km/h, сколько километров должны пройти путешественники от пристани, чтобы они смогли отдохнуть 2 часа и вернуться вовремя?

ОТВЕТЫ

1. –0,5; **2.** –2; 50 **3.** –9; 1 **4.** 5 **5.** –0,5 **6.** –1 **7.** –4,7; –1 **8.** –4; 7

9. $-\frac{2}{3}$; 6 **10.** $\frac{1}{4}$; 2 **11.** 7 **12.** $-\frac{1}{4}$ **13.** $\varnothing$ **14.** 0; $1\frac{1}{7}$ **15.** –1; 5

16. –1 **17.** 5 **18.** $-\frac{1}{3}$ **19.** 4 **20.** $1\frac{3}{7}$ **21.** –2 **22.** 1; 4; $\frac{5 \pm \sqrt{41}}{2}$

23. –2; 1 **24.** 1; 8 **25.** 1; 2; 3; 4 **26.** $2 \pm \sqrt{3}$ **27.** ± 1 **28.** –3; 1

29. 0,2; 1 **30.** $\varnothing$ **31.** 20 km/h **32.** 20 дней, 30 дней **33.** 18 дней

34. 84 km/h **35.** $\frac{a(a^2-b^2)}{3a^2-b^2}$ дней **36.** 5 km

СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель урока: Уметь решать элементарные рациональные уравнения и системы элементарных рациональных уравнений.

Все учащиеся	Решают системы элементарных рациональных уравнений.
Большинство учащихся	Решают системы элементарных дробно-рациональных уравнений. Находят область определения системы.
Некоторые учащиеся	Решают системы дробно-рациональных уравнений методом замены переменных, а также и методом алгебраического сложения. Находят область определения системы. Проверяют корни.

Оценка

Учащиеся оцениваются в классе на основе формативной оценки.

Рекомендуется выполнить нечетные номера из примеров 1-29 за 3 занятия.

Рекомендуется использовать дифференцированный подход, основанный на успеваемости учащихся, при котором все учащиеся должны уметь решать зеленые примеры.

Рекомендуется показать решение по крайней мере 1 зеленого, 1 синего и 1 красного примера.

Активизирующие вопросы

1. Разложите на множители выражение x^3+8y^3.

2. Какие способы решения системы уравнений вы знаете?

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+2y=12 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$ методом подстановки и методом алгебраического сложения.

Допустимые ошибки и рекомендации по их устранению

1. В результате неумения упростить выражения, входящие в уравнения системы, учащиеся часто не знают, с чего начать решение. Чтобы избежать этого, в начале урока следует напомнить учащимся формулы краткого умножения, вынос общего множителя за скобки.

2. Во избежание неумения правильного использования методов решения системы уравнений рекомендуется показывать решение системы элементарных уравнений для каждого метода.

3. При решении системы уравнений методом деления учащиеся не могут представить дробное выражение, получающееся в результате деления. Для закрепления этого метода рекомендуется при решении 1-2 примеров показывать процесс деления выражений полностью. Например, в следующей системе первое уравнение разделим на второе и упростим:

$$\begin{cases} x^2(1+y+y^2+y^3)=160 \\ x^2(1-y+y^2-y^3)=-80 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2(1+y+y^2+y^3)}{x^2(1-y+y^2-y^3)}=\frac{160}{-80} \Rightarrow \frac{\cancel{x^2}(1+y)\cancel{(1+y^2)}}{\cancel{x^2}(1-y)\cancel{(1+y^2)}}=\frac{160}{-80} \Rightarrow \frac{1+y}{1-y}=-2$$

Домашнее задание

Примеры 2 - 30, чётные номера, страницы 72-73.

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

Метод подстановки

Пример 1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3xy = 21 \\ x - 8y = -1 \end{cases}$ методом подстановки.

Решение. Из второго уравнения системы получим $x = 8y - 1$. Подставляя полученное выражение вместо x в первом уравнении, получим: $3(8y-1)y = 21$. Решаем это уравнение.

$$y_1 = -\frac{7}{8}; y_2 = 1$$

Подставляя значения $y_1 = -\frac{7}{8}, y_2 = 1$ в $x = 8y - 1$, находим, что $x_1 = -8, x_2 = 7$

Ответ: $\left(-8; -\frac{7}{8}\right), (7; 1)$.

Метод алгебраического сложения

Пример 3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y = 27 \\ x - y = 3 \end{cases}$

Решение. Оба уравнения в системе содержат неизвестный y с противоположными коэффициентами. При сложении этих уравнений получится уравнение с одним неизвестным.

$$+\begin{cases} x^2 + y = 27 \\ x - y = 3 \end{cases}$$
$$x^2 + x = 30$$

Решая квадратное уравнение $x^2 + x - 30 = 0$, получим:

$$x_1 = \frac{-1-11}{2} = -6$$
$$x_2 = \frac{-1+11}{2} = 5$$

Подставляя эти корни во второе уравнение системы, находим соответствующие значения неизвестного y: $y_1 = -9, y_2 = 2$.

Ответ: (–6; –9), (5; 2).

Метод замены переменных

Пример 5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + xy + y = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$.

Решение. Вводим обозначения $x + y = a$ и $xy = b$

Тогда система будет выглядеть так: $\begin{cases} a + b = 11 \\ ab = 30 \end{cases}$

Решая эту систему, получим $a_1 = 6, b_1 = 5$ и $a_2 = 5, b_2 = 6$. Подставляя эти значения в обозначения, получим системы уравнений:

$$\begin{cases} x+y=6 \\ xy=5 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$$

Совокупность всех их корней есть решение данной системы уравнений.

Ответ: $(5;1)$, $(1;5)$, $(2;3)$, $(3;2)$.

ПРИМЕРЫ

1. $\begin{cases} y-x^2+x=1 \\ x=y-4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x^2-y=2 \\ 3x-2y=-1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x+3y=-1 \\ 2x^2=y+11 \end{cases}$

4. $\begin{cases} xy=20 \\ x-4y=2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2+y^2-2xy=1 \\ x+y=3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x-y=10 \\ x^2-y^2=20-xy \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} 3x-y=10 \\ x^2-y^2=20-xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3x-10 \\ x^2-(3x-10)^2=20-x(3x-10) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3x-10 \\ x^2-9x^2+60x-100=20-3x^2+10x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=3x-10 \\ 5x^2-50x+120=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3x-10 \\ x^2-10x+24=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_{1,2}=2;8 \\ x_{1,2}=4;6 \end{cases}.$$

Ответ: *(4;2), (6;8)*.

7. $\begin{cases} x+y=8 \\ x^2+y^2=36 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x\cdot y=300 \\ x+y=35 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2+y^2=74 \\ x+y=12 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+y=8 \\ xy=15 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x+y=1 \\ x^3+y^3=19 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^3+8y^3=35 \\ x^2-2xy+4y^2=7 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+2y}+\dfrac{x+2y}{xy}=2 \\ \dfrac{xy}{x-2y}+\dfrac{x-2y}{xy}=4 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2-xy+\dfrac{1}{4}y^2+x-\dfrac{1}{2}y=2 \\ \dfrac{1}{4}x^2+xy+y^2+2y+x=3 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=19 \\ x^2+xy+y^2=49 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2+y^2=x+y \\ x^4+y^4=\dfrac{1}{2}(x+y)^2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dfrac{x-y}{x+y}+6\dfrac{x+y}{x-y}=5 \\ xy=-2 \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{2x}{y}+\dfrac{3y}{x}+6=\dfrac{3}{xy} \\ \dfrac{6y}{x}+\dfrac{4x}{y}-1=\dfrac{45}{xy} \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{y}+\dfrac{3y}{x}+6=\dfrac{3}{xy} \\ \dfrac{6y}{x}+\dfrac{4x}{y}-1=\dfrac{45}{xy} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2x^2+3y^2}{xy}+6=\dfrac{3}{xy} \\ \dfrac{4x^2+6y^2}{xy}-1=\dfrac{45}{xy} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{2x^2+3y^2}{xy}=a \\ \dfrac{3}{xy}=b \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+6=b \\ 2a-1=15b \end{cases} \Rightarrow -\begin{cases} 2a-2b=-12 \\ 2a-15b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b-6 \\ 13b=-13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-7 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2x^2+3y^2}{xy}=-7 \\ \dfrac{3}{xy}=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2+3y^2=21 \\ xy=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{18}{y^2}+3y^2=21 \\ x=-\dfrac{3}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^4-7y^2+6=0 \\ x=-\dfrac{3}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_{1,2}=\pm 1; y_{3,4}=\pm\sqrt{6}; \\ x_{1,2}=\mp 3; x_{3,4}=\mp\dfrac{\sqrt{6}}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2};\sqrt{6}\right),\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2};-\sqrt{6}\right),(-3;1),(3;-1)$.

19. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=13 \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}+\dfrac{xy}{x+y}=2 \\ \dfrac{x-y}{xy}+\dfrac{xy}{x-y}=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

21. $\begin{cases} x^3-y^3=61(x-y) \\ (x+1)(y+1)=12 \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{9}{2} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

23. $\begin{cases} x^4+y^4=17(x+y)^2 \\ xy=2(x+y) \end{cases}$

24. $\begin{cases} x^2+y^2=x-y \\ x^4+y^4=\dfrac{1}{2}(x-y)^2 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x^2\left(1+y+y^2+y^3\right)=160 \\ x^2\left(1-y+y^2-y^3\right)=-80 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x^2y^2-3y^2+5xy-6=0 \\ 3x^2y^2-4y^2+3xy-2=0 \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases}2x^2y^2-3y^2+5xy-6=0,(1)\\3x^2y^2-4y^2+3xy-2=0,(2)\end{cases}\Rightarrow[(2)-(1)]\Rightarrow x^2y^2-y^2-2xy+4=0\Rightarrow y^2=x^2y^2-2xy+4\to(1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2y^2-3x^2y^2+6xy-12+5xy-6=0\Rightarrow x^2y^2-11xy+18=0\Rightarrow[xy=a]\Rightarrow\begin{vmatrix}a^2-11a+18=0\\a_{1,2}=2;9\end{vmatrix}\Rightarrow$$

1) $xy=2\to(1)$

$2\cdot2^2-3y^2+5\cdot2-6=0$

$3y^2=12\Rightarrow y^2=4\Rightarrow y_{1,2}=\pm2, x_{1,2}=\pm1$

2) $xy=9\to(1)$

$2\cdot81-3y^2+45-6=0$

$3y^2=201\Rightarrow y^2=67\Rightarrow y_{3,4}=\pm\sqrt{67}, x_{3,4}=\pm\dfrac{9}{\sqrt{67}}$

Ответ: (1; 2), (-1; -2), $\left(\dfrac{9}{\sqrt{67}};\sqrt{67}\right),\left(-\dfrac{9}{\sqrt{67}};-\sqrt{67}\right)$.

27. $\begin{cases}x^3y+xy^3=\dfrac{10}{9}(x+y)^2\\x^4y+xy^4=\dfrac{2}{3}(x+y)^3\end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases}x^3y+xy^3=\frac{10}{9}(x+y)^2\\x^4y+xy^4=\frac{2}{3}(x+y)^3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}xy(x^2+y^2)=\frac{10}{9}(x+y)^2\\xy(x^3+y^3)=\frac{2}{3}(x+y)^3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}xy((x+y)^2-2xy)=\frac{10}{9}(x+y)^2\\xy(x+y)(x^2-xy+y^2)=\frac{2}{3}(x+y)^3\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}xy((x+y)^2-2xy)=\frac{10}{9}(x+y)^2\\xy(x+y)((x+y)^2-3xy)=\frac{2}{3}(x+y)^3\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}x+y=a\\xy=b\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}b(a^2-2b)=\frac{10}{9}a^2\\ab(a^2-3b)=\frac{2}{3}a^3\end{cases}\Rightarrow[(1):(2)]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{a^2-2b}{a^2-3b}=\frac{5}{3}\Rightarrow\frac{a^2-2b}{a^2-3b}=\frac{5}{3}\Rightarrow5a^2-15b=3a^2-6b\Rightarrow a^2=4,5b\Rightarrow b(4,5b-2b)=\frac{10}{9}\cdot\frac{9}{2}b\Rightarrow$$

$$\Rightarrow2,5b^2=5b\Rightarrow\begin{bmatrix}b_1=0\\b_2=2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a^2=0\\a^2=9\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a_1=0\\a_{2,3}=\pm3\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}\begin{cases}x+y=0\\xy=0\end{cases}\\\begin{cases}x+y=3\\xy=2\end{cases}\\\begin{cases}x+y=-3\\xy=2\end{cases}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1=0;y_1=0\\x_2=1;y_2=2\\x_3=2;y_3=1\\x_2=-1;y_2=-2\\x_3=-2;y_3=-1\end{bmatrix}$$

Ответ: (0;0), (2; 1), (-2; -1), (1; 2), (-1; -2).

28. $\begin{cases} \dfrac{x\left(y^2+1\right)}{x^2+y^2}=\dfrac{3}{5} \\ \dfrac{y\left(x^2-1\right)}{x^2+y^2}=\dfrac{4}{5} \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dfrac{y^2}{x}+\dfrac{x^2}{y}=12 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

30. $\begin{cases} xy=6 \\ yz=15 \\ zx=10 \end{cases}$

ОТВЕТЫ

1. (3; 7),(–1; 3) **2.** (1; 2),$\left(-\frac{5}{8};-\frac{7}{16}\right)$ **3.** (2; –3),$\left(-\frac{8}{3};\frac{29}{9}\right)$ **4.**(10; 2), (–8;–2,5)

5. (2; 1), (1; 2) **6.** (6; 8), (4; 2) **7.** $\left(4+\sqrt{2};4-\sqrt{2}\right),\left(4-\sqrt{2};4+\sqrt{2}\right)$

8. (20; 15), (15; 20) **9.** (5; 7), (7; 5) **10.** (3; 5), (5; 3) **11.** (–2; 3), (3; –2)

12. (3; 1), $\left(2;\frac{3}{2}\right)$ **13.** $\left(2+2\sqrt{3};1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ **14.** $\left(-\frac{14}{5};-\frac{8}{5}\right),\left(-\frac{2}{5};-\frac{14}{5}\right),\left(-\frac{6}{5};\frac{8}{5}\right),\left(\frac{6}{5};\frac{2}{5}\right)$

15. (3; 5), (5; 3), (–3; –5), (–5; –3) **16.** (0; 0), (1; 1)

17. $\left(\sqrt{6};-\frac{\sqrt{6}}{3}\right),\left(-\sqrt{6};\frac{\sqrt{6}}{3}\right),(2;-1),(-2;1)$ **18.** $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2};\sqrt{6}\right),\left(\frac{\sqrt{6}}{2};-\sqrt{6}\right),(-3;1),(3;-1)$

19. $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$ **20.** $\left(-2;\frac{2}{3}\right),\left(4;\frac{4}{3}\right)$

21. $(-4;-5),(-5;-4),\left(-1+2\sqrt{3};-1+2\sqrt{3}\right),\left(-1-2\sqrt{3};-1-2\sqrt{3}\right),\left(4+\sqrt{13};4-\sqrt{13}\right),\left(4-\sqrt{13};4+\sqrt{13}\right)$

22. $(2;1),(1;2),\left(\frac{-1+\sqrt{\frac{11}{3}}}{2};\frac{-1-\sqrt{\frac{11}{3}}}{2}\right),\left(\frac{-1-\sqrt{\frac{11}{3}}}{2};\frac{-1+\sqrt{\frac{11}{3}}}{2}\right)$

23. (0; 0), (6; 3), (3; 6), (–2; 1), (1; –2) **24.** (0; 0), (1; –1) **25.** (2; 3), (–2; 3)

26. (1; 2), (–1; –2), $\left(\frac{9}{\sqrt{67}};\sqrt{67}\right),\left(-\frac{9}{\sqrt{67}};-\sqrt{67}\right)$ **27.** (0;0), (2; 1), (–2; –1), (1; 2), (–1; –2)

28. (3; 1), $\left(\frac{1}{3};-1\right)$ **29.** $(6;6),\left(\frac{3}{2}\left(\sqrt{5}-1\right);\frac{3}{2}\left(-\sqrt{5}-1\right)\right),\left(\frac{3}{2}\left(-\sqrt{5}-1\right);\frac{3}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\right)$

30. (2; 3; 5), (–2; –3; –5).

РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Цель урока: Уметь решать элементарные рациональные неравенства.

Все учащиеся	Решают элементарные рациональные неравенства.
Большинство учащихся	Решают системы элементарных дробно-рациональных неравенств. Находят область определения системы.
Некоторые учащиеся	Решают дробно-рациональные неравенства методом замены переменных. Находят область определения неравенства. Проверяют решения.

Оценка

Учащиеся оцениваются в классе на основе формативной оценки.

Рекомендуется выполнить нечетные номера из примеров 1-25 за 3 занятия.

Рекомендуется использовать дифференцированный подход, основанный на успеваемости учащихся, при котором все учащиеся должны уметь решать зеленые примеры.

Рекомендуется показать решение по крайней мере 1 зеленого, 1 синего и 1 красного примера.

Активизирующие вопросы

1. Решите неравенство $-2x<10$.
2. Решите неравенство $\frac{1}{x-2}\geq 0$.
3. Решите неравенство $x^2<9x$.
4. Приведите пример неравенства, решением которого является $(-\infty;-2)$.
5. Приведите пример неравенства, решением которого является (-1; 3).

Допустимые ошибки и рекомендации по их устранению

1. Сокращение к одинаковым выражениям обеих частей неравенства приводит к неверному решению. Например, $\frac{x^2+2x}{x-1}<\frac{x}{x+1}\Rightarrow\frac{\cancel{x}(x+2)}{x-1}<\frac{\cancel{x}}{x+1}\Rightarrow\frac{x+2}{x-1}<\frac{1}{x+1}$.

Чтобы избежать такой ошибки, поясняется, что все выражения в неравенстве следует переместить в левую часть, общий множитель вынести за скобки (и, при необходимости, решить методом интервалов).

2. Распространенной ошибкой является не менять неравенство на противоположное при умножении или делении его обеих частей на отрицательное число. Чтобы этого не допустить, в начале урока необходимо учащимся задать неравенство для самостоятельного решения. При этом, если учащиеся допускают ошибки, правило будет упомянуто.

3. Учащиеся могут допустить ошибки при приведении к одному знаменателю дробно-рациональных выражений в неравенстве. Во избежание этого рекомендуется в начале урока напомнить учащимся правила приведения дробей к одному знаменателю.

4. При решении неравенства методом интервалов рекомендуется учитывать, что выражение, входящее в неравенство, принимает один и тот же знак в соседних интервалах, ограниченных чётными его нулями.

5. Учащиеся часто не учитывают область определения алгебраического выражения. Рекомендуется объяснить важность области определения.

Домашнее задание

Примеры **2–24,** чётные номера, страницы 76-77.

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

Решение рациональных неравенств, как и решение рациональных уравнений, можно выполнять путём приведения неравенства к более простому равносильному неравенству. При этом соблюдаются следующие правила:

Правило 1. Произвольный член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком.

Правило 2. Обе части неравенства можно умножать или делить на одно и то же самое положительное число, при этом неравенство не меняет свой знак.

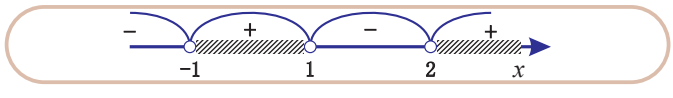
Правило 3. Обе части неравенства можно умножать или разделить на одно и то же самое отрицательное число, в этом случае неравенство меняет свой знак на противоположный.

При решении рационального неравенства можно использовать ***метод интервалов.***

Пример 1. Решите неравенство: $(x-1)(x+1)(x-2)>0$.

Решение. 1. Правая часть неравенства состоит из нуля, поэтому находим нули выражения в левой части: $x=1, x=-1, x=2$.

2. Отмечая эти значения x на числовой оси, определим знаки левой части неравенства на полученных интервалах.



3. Так как левая часть неравенства больше нуля, то интервалы, отмеченные с положительным знаком, являются решением неравенства.

Ответ: $x\in(-1;1)\cup(2;\infty)$

Дробно-рациональные неравенства

Неравенства, приводимые к виду $\frac{f(x)}{g(x)}>0$, $\frac{f(x)}{g(x)}<0$, $\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0$, $\frac{f(x)}{g(x)}\leq 0$, называются дробно-рациональными неравенствами. Здесь $f(x)$ и $g(x)$ – многочлены от переменной x.

Этапы решения дробно-рациональных неравенств:

- Находятся нули числителя;
- Находятся нули знаменателя;
- На числовой оси отмечаются нули. При этом числовая ось разбивается на интервалы;
- Отмечаются знаки (+ или –) частного $\frac{f(x)}{g(x)}$ на полученных интервалах;
- Интервалы, знаки (+ или –) которых соответствуют знаку ($>, \geq$ или $<, \leq$) неравенства, являются решением неравенства.

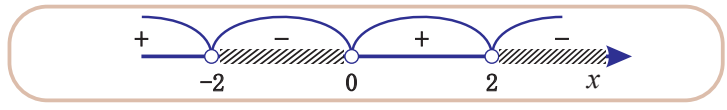
Пример 3. Решите неравенство: $\frac{4}{x}-x<0$.

Решение.

1. Приводим левую часть к общему знаменателю $\frac{4-x^2}{x}<0$.

2.Находим нули числителя и знаменателя $x = 2, x = -2, x = 0$.

3. Отмечаем нули на числовой оси и определяем знаки левой части на интервалах.



Поскольку знак неравенства меньше нуля, то интервалы, отмеченные с отрицательным знаком, являются решением неравенства.

Ответ: $x \in (-2;0) \cup (2;\infty)$.

Обратите внимание! При решении неравенств вида $\frac{f(x)}{g(x)} < a$ не начинайте его решение с умножения обеих частей на $g(x)$, предполагая $g(x) \neq 0$. Такие действия могут привести к неправильному решению.

ПРИМЕРЫ

Решите неравенства.

1. $\frac{x+4}{(x+5)x} < 0$ **2.** $\frac{x-4}{(x-3)x} < 0$ **3.** $\frac{5+4x}{(x-2)(x+1)} \geq 0$

4. $\frac{4-3x}{(x+2)(x-1)} \geq 0$ **5.** $\frac{4x+3}{x+2} > 5$ **6.** $\frac{4x-3}{x-5} > 5$

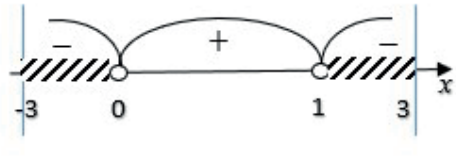
7. $\frac{25-16x^2}{x^2+4x+4} > 0$ **8.** $\frac{16-25x^2}{x^2-4x+4} > 0$

9. Укажите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $\frac{2x-7}{6} + \frac{7x-2}{3} < 3 - \frac{1-x}{2}$.

10. Найдите сумму всех целых чисел, удовлетворяющих неравенству $\frac{x-4}{2x+6} \leq 0$.

11. Сколько целых чисел из (–3; 3) удовлетворяют неравенству $\frac{1}{x} < 1$?

Решение: $\frac{1}{x} < 1 \Rightarrow \frac{1}{x} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{1-x}{x} < 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x \neq 0 \end{array}\right. \Rightarrow$ Отмечая на числовой прямой нули числителя и знаменателя, находим знаки интервалов:



Из рисунка видно, что решением неравенства является множество $(-\infty;0)\cup(1;\infty)$ Но из целых чисел только – 2, –1 и 2 принадлежат интервалу (–3; 3).

Ответ: 3 числа.

12. $\dfrac{(x+3)(x-5)}{x+1}\geq 0$ найти вычитание наибольшего из наименьшего из решений неравенства, состоящего из целых чисел.

13. $\dfrac{(x+4)^2-8x-25}{(x-6)^2}\geq 0$ сколько решений неравенства, состоящего из отрицательных целых чисел расположен в поперечном сечении [–5; 6]?

14. $\dfrac{6x-1}{4x+3}\leq\dfrac{3x-2}{2x-1}$

15. $\dfrac{5}{-6x+3}+\dfrac{6x}{1-2x}\geq 0$

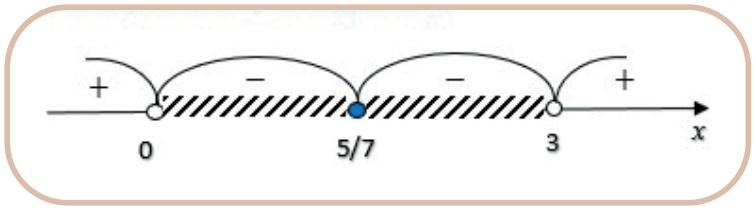
16. $\dfrac{x^2+3x}{49x^2+70x+25}\leq 0$

17. $\dfrac{6x+1}{4x-3}\leq\dfrac{3x+2}{2x+1}$

18. $\dfrac{6}{-4x+2}-\dfrac{5x}{1-2x}\leq 0$

19. $\dfrac{49x^2-70x+25}{x^2-3x}\leq 0$

Решение: $\dfrac{49x^2-70x+25}{x^2-3x}\leq 0\Rightarrow\dfrac{(7x-5)^2}{x(x-3)}\leq 0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5}{7}\\x\neq 0;3\end{array}\right.\Rightarrow$ Отмечая на числовой прямой нули числителя и знаменателя и при определении знака дроби в образованных интервалах, помним, что у неё знаки будут одинаковы в интервалах по обе стороны $x=\dfrac{5}{7}$:



Ответ: (0;3)

20. $\dfrac{x^2+3x-2}{(x-1)^2-9}-\dfrac{3x+1}{3x-12}\leq 0$

21. $\dfrac{x^2+7x+8}{(x+1)^2-9}-\dfrac{3x+7}{3x-6}\leq 0$

22. $\dfrac{1}{2x^2-5x}-\dfrac{2}{25+10x}+\dfrac{4}{25-4x^2}\geq 0$

23. $\dfrac{6}{-4x-x^2}-\dfrac{2}{x^2-4x}+\dfrac{x}{x^2-16}\geq 0$

24. $\left(\dfrac{4}{x^2+4x}+\dfrac{32-3x}{x^3+64}\right):\dfrac{x+8}{x^3-4x^2+16x}\geq\dfrac{4}{4+x}$

25. $\left(\dfrac{x^2+2x+4}{4x^2-1}\cdot\dfrac{2x^2-x}{-x^3+8}-\dfrac{2-x}{2x^2+x}\right):\dfrac{4}{x^2-2x}\geq\dfrac{4-x}{x+2x^2}$

Решение:

$$\left(\frac{x^2+2x+4}{4x^2-1}\cdot\frac{2x^2-x}{-x^3+8}-\frac{2-x}{2x^2+x}\right):\frac{4}{x^2-2x}\geq\frac{4-x}{x+2x^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\cancel{x^2+2x+4}}{\cancel{(2x-1)}(2x+1)}\cdot\frac{x\cancel{(2x-1)}}{(2-x)\cancel{(x^2+2x+4)}}-\frac{2-x}{x(2x+1)}\right):\frac{4}{x(x-2)}-\frac{4-x}{x(2x+1)}\geq 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{x}{(2x+1)(2-x)}-\frac{2-x}{x(2x+1)}\right):\frac{4}{x(x-2)}-\frac{4-x}{x(2x+1)}\geq 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\cancel{x^2}-4+4x\cancel{-x^2}}{\cancel{x}(2x+1)\cancel{(2-x)}}\cdot\frac{\cancel{x(x-2)}}{4}-\frac{4-x}{x(2x+1)}\geq 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1-x}{2x+1}-\frac{4-x}{x(2x+1)}\geq 0\Rightarrow\frac{x(1-x)-4+x}{x(2x+1)}\geq 0$$

$$\Rightarrow\frac{-x^2+2x-4}{x(2x+1)}\geq 0\Rightarrow\frac{-(x^2-2x+4)}{x(2x+1)}\geq 0\Rightarrow\begin{cases}x^2-2x+4>0\\ x\neq -\frac{1}{2};0\end{cases}\Rightarrow$$

Ответ: $x\in\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

ОТВЕТЫ

1. $(-\infty;-5)\cup(-4;0)$
2. $(-\infty;0)\cup(3;4)$
3. $\left[-1\frac{1}{4};-1\right)\cup(2;+\infty)$
4. $(-\infty;-2)\cup\left(1;1\frac{1}{3}\right]$
5. (-7; -2)
6. (5; 22)
7. $\left(-1\frac{1}{4};1\frac{1}{4}\right)$
8. $\left(-\frac{4}{5};\frac{4}{5}\right)$
9. 1
10. 7
11. 3
12. 1
13. 6
14. $\left(-\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{7}{9};+\infty\right)$
15. $\left[-\frac{5}{18};\frac{1}{2}\right)$
16. $\left[-3;-\frac{5}{7}\right)\cup\left(-\frac{5}{7};0\right]$
17. $\left(-\infty;-\frac{7}{9}\right]\cup\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$
18. $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{5}\right]$
19. (0; 3)
20. $(-\infty;-2)$
21. $(-\infty;-4)$
22. $(-\infty;-2,5)\cup(-2,5;0)$
23. $(-4;0)\cup(4;+\infty)$
24. $(-\infty;-8)\cup(-8;-4)\cup(-4;0)\cup(0;+\infty)$
25. $\left(-\frac{1}{2};0\right)$

СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Цель урока: Научить решать элементарные рациональные неравенства и системы элементарных рациональных неравенств.

Все учащиеся	Решают системы элементарных рациональных неравенств.
Большинство учащихся	Составляют и решают систему рациональных неравенств, чтобы найти область определения выражений или функций.
Некоторые учащиеся	Решают системы рациональных неравенств несколькими способами. Находят область определения. Проверяют решения.

Оценка

Учащиеся оцениваются в классе на основе формативной оценки.

В течение 3-х занятий рекомендуется выполнять задания a), c) в примерах 1–5, 7, a), c), e) в примере 6, a), c), e), g), i), k) в примере 8.

Рекомендуется использовать дифференцированный подход, основанный на успеваемости учащихся, при котором все учащиеся должны уметь решать зеленые примеры.

Рекомендуется показать решение по крайней мере 1 зеленого, 1 синего и 1 красного примеров.

Активизирующие вопросы:

1. Что такое область определения функции?
2. Решите систему неравенств $\begin{cases} x+3 \le 2 \\ x-1 > -5 \end{cases}$.
3. Приведите пример системы неравенств, решением которого является (–1; 3).
4. Приведите пример системы неравенств, решением которого является $(-\infty;-2) \cup (1;2]$.

Допустимые ошибки и рекомендации по их устранению

1. Ошибки, допускаемые при решении рациональных неравенств, можно наблюдать и при решении их систем. Поэтому распространенные ошибки следует обсуждать с классом. Необходимо работать над ошибками и развивать у учащихся навыки самоконтроля.

2. Иногда ученики начинают работать с неравенством неправильно, используя алгебраическое сложение как в системе уравнений. Во избежание этого предлагается решать неравенства, заданные в системе неравенств, в отдельности.

3. Хотя решение каждого неравенства в системе находится отдельно, учащимся трудно найти общее решение системы неравенств. Поэтому рекомендуется изобразить решение всех неравенств на одной числовой оси, и неоднократно учить правильному выбору интервалов, удовлетворяющих всем неравенствам системы.

Домашнее задание

Задания b), d) в примере 7, b), d), f), h), j), l) в примере 8, страницы 79-80.

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

Этапы решения систем рациональных неравенств:

- Решается каждое неравенство в отдельности;
- Находится общее решение неравенств, входящих в систему (этот этап можно осуществить изображением на числовой оси).

Пример 1. Решите систему неравенств: $\begin{cases} x^2-9\geq 0, \\ 2x-8<0 \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} x^2-9\geq 0 \\ 2x-8<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+3)(x-3)\geq 0 \\ x<4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-3]\cup[3;\infty) \\ x<4 \end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty;-3]\cup[3;4)$$

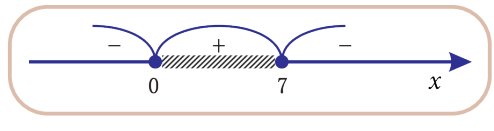
Ответ: $x\in(-\infty;-3]\cup[3;4)$.

Пример 2. Решите систему неравенств $\begin{cases} 7x-x^2\geq 0 \\ x^2-6x+5<0 \end{cases}$

Решение.

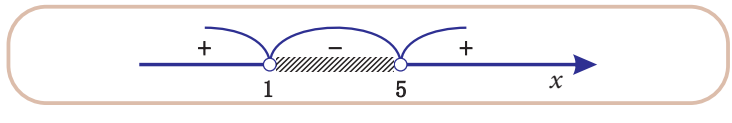
Решаем первое неравенство системы $x(7-x)\geq 0$.

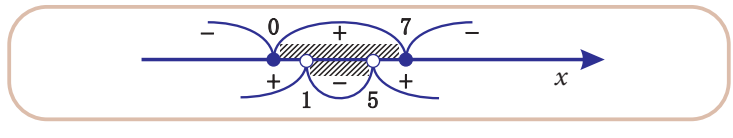
Отмечаем на числовой оси нули $x=0$ и $x=7$ и определяем знаки на полученных интервалах.



Решаем второе неравенство системы $x^2-6x+5<0$.

Нули равны x = 1 и x = 5. Отмечаем их на числовой оси и определяем знаки на полученных интервалах.





Найдём общую часть полученных решений. Общая часть состоит из заштрихованного и сверху, и снизу интервала.

Ответ: $x\in(1;5)$.

ПРИМЕРЫ

1. Найдите все целые числа, входящие в решение системы неравенств.

a) $\begin{cases} 0,2x > -1 \\ -\dfrac{x}{3} \geq 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} < \dfrac{x}{3} \\ \dfrac{x+1}{2} \geq \dfrac{x}{5} \end{cases}$ c) $\begin{cases} 1-\dfrac{x}{4} > x \\ x-\dfrac{x-4}{5} > 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-\dfrac{x}{4} \geq 2 \\ \dfrac{x-1}{2}+\dfrac{x-2}{3} > 1 \end{cases}$

2. Решите систему неравенств.

a) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-2}{3} \geq \dfrac{x-3}{4}-x \\ 1-x > 0,5x-4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{5x+7}{6}-\dfrac{3x}{4} < \dfrac{11x-7}{12} \\ \dfrac{1-3x}{2}-\dfrac{1-4x}{3} \geq \dfrac{x}{6}-1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{6}+\dfrac{x+2}{3}-\dfrac{x-8}{2} > x-1 \\ 2-2x > 0,5+0,5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{8x+1}{3} > \dfrac{4x+9}{2}-\dfrac{x-1}{3} \\ \dfrac{5x-2}{3} < \dfrac{2x+13}{2}-\dfrac{x+2}{3} \end{cases}$

3. Найдите область определения выражения.

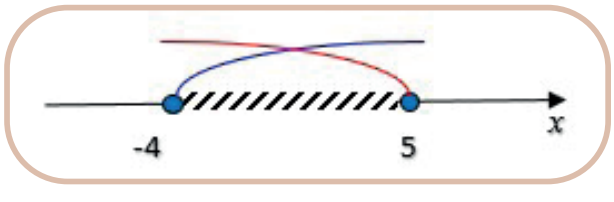
a) $\sqrt{(x-3)(x-5)}+\sqrt{(1-x)(7-x)}$ b) $\sqrt{\dfrac{3x+2}{5-x}}+\sqrt{\dfrac{4-x}{7-2x}}$

c) $\sqrt{(x-2)(x-3)}+\sqrt{(5-x)(6-x)}$ d) $\sqrt{\dfrac{4x+1}{x+2}}+\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-7}}$

4. Найдите область определения функции.

a) $y=\sqrt{12-3x}+\sqrt{x+2}$ b) $y=\dfrac{\sqrt{3-5x-2x^2}}{10x}$ c) $y=\sqrt{15-3x}+\sqrt{4+x}$ d) $y=\dfrac{\sqrt{-3x^2+12}}{1-5x}$

Решение. $y=\sqrt{15-3x}+\sqrt{4+x} \Rightarrow \begin{cases} 15-3x \geq 0 \\ 4+x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x \leq 15 \\ x \geq -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x \geq -4 \end{cases} \Rightarrow x \in [-4;5]$



Ответ: $x \in [-4;5]$

5. Решите систему неравенств.

a) $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{x-2} < 1 \\ \dfrac{3x+2}{2x-3} > 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{7-3x}{2-5x} \leq 2 \\ \dfrac{2x+1}{3x-3} > 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{3x-2}{x-2} < 2 \\ \dfrac{5x+1}{4x-5} \geq 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{3x-1} \leq 1 \\ \dfrac{2x+5}{x-4} \geq 2 \end{cases}$

6. Решите систему неравенств.

a) $\begin{cases} x^2 \le 9 \\ x > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2 + 7x - 6 \le 0 \\ 6(x+4) - 3(4-3x) < 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x^2 - 2x + 1 \le 0 \\ 2(x+3) - (x-8) < 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2x^2 + 3x - 2 < 0 \\ -3(6x-1) - 2x < x \end{cases}$ e) $\begin{cases} 12(x+2) - 5(5-4x) < 2 \\ 9x^2 - 6x - 8 \le 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x - 1 < 0 \\ x^2 - 3x + 2 \ge 0 \end{cases}$

Решение. $\begin{cases} -2x^2 + 3x - 2 < 0 \\ -3(6x-1) - 2x < x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x + 2 > 0 \\ 21x > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in R \\ x > \frac{3}{7} \end{cases} \Rightarrow x > \frac{3}{7}$

Ответ: $x \in \left(\frac{3}{7}; \infty\right)$.

7. Найдите сумму всех целых чисел, входящих в решение системы.

a) $\begin{cases} \frac{9 - x^2}{x} \ge 0 \\ 2x - 1 \ge 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{(x+5)(x-1)}{x} \ge 0 \\ 10x - 1 < 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{(x-2)(x+3)}{x(x+7)} < 0 \\ 20x \ge 20 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{25 - x^2}{x} \le 0 \\ 5x - 10 \le 35 \end{cases}$

8. Решите систему неравенств.

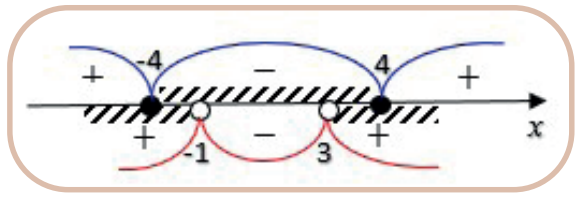
a) $\begin{cases} 3x^2 - 5x - 2 < 0 \\ 4 - x^2 > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2 + x + 2 > 0 \\ x^2 < 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x^2 + 5x + 10 > 0 \\ x^2 \ge 16 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -7x^2 + 5x - 2 > 0 \\ x^2 \le 25 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{x+7}{x-5} + \frac{3x+1}{2} \ge 0 \\ (5-x)^2 \le 4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} -5x^2 + x - 1 > 0 \\ x^2 > 81 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x^2 - 6x + 8 < 0 \\ x^2 - 36 \ge 0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x^2 - 16 \ge 0 \\ x^2 - 7x + 12 \ge 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \ge 0 \\ 2x^2 - 5x + 2 \le 0 \end{cases}$ j) $\begin{cases} x^2 - 9x + 14 < 0 \\ x^2 - 7x - 8 \le 0 \end{cases}$ k) $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \le 0 \\ 2x^2 + 5x < 0 \end{cases}$ l) $\begin{cases} \frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+1)} \ge 0 \\ (x-4)(x+4) \le 0 \end{cases}$

Решение.

$\begin{cases} \frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+1)} \ge 0 \\ (x-4)(x+4) \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_{1,2} \ne -1; 3 \\ x_{1,2} = \pm 4 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Отмечая нули числителя и знаменателя в каждом неравенстве системы на числовой прямой, находим их знаки в полученных интервалах:



Множество $[-4;-1) \cup (3;4]$, удовлетворяющее обоим неравенствам, является решением данной системы неравенств.

Ответ: $[-4;-1) \cup (3;4]$.

ОТВЕТЫ

1. **a)** (-5; -3] **b)** $\left[-\frac{5}{3};3\right)$ **c)** $\left(\frac{1}{4};\frac{4}{5}\right)$ **d)** $\left[\frac{8}{3};+\infty\right)$

2. **a)** $\left[-1;\frac{10}{3}\right)$ **b)** (2,1; 3,5] **c)** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ **d)** (4,5; 6,5)

3. **a)** $(-\infty;1]\cup[7;+\infty)$ **b)** $\left[-\frac{2}{3};\frac{7}{2}\right)\cup[4;5)$ **c)** $(-\infty;2]\cup[3;5]\cup[6;+\infty)$ **d)** $(-\infty;-2)\cup[7;+\infty)$

4. **a)** [-2; 4] **b)** $[-3;0)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)$ **c)** [-4; 5] **d)** $[-2;0,2)\cup(0,2;2]$

5. **a)** (1,5; 2) **b)** (1; 1,3) **c)** $\left(\frac{5}{4};2\right)$ **d)** $(4;+\infty)$

6. **a)** (0; 3) **b)** $\left[-3;-\frac{2}{3}\right)$ **c)** $\varnothing$ **d)** $\left(\frac{1}{7};+\infty\right)$ **e)** $\left[-\frac{2}{3};\frac{3}{22}\right)$ **f)** $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$

7. **a)** $\left[\frac{1}{2};3\right]$ **b)** [-5; 0) **c)** [1; 2) **d)** $[-5;0)\cup[5;9]$

8. **a)** $\left(-\frac{1}{3};2\right)$ **b)** (-3; 3) **c)** $(-\infty;-4]\cup[4;+\infty)$ **d)** $\varnothing$ **e)** $(5;\ 7]\cup\{3\}$

f) $\varnothing$ **g)** $\varnothing$ **h)** $(-\infty;-4]\cup[4;+\infty)$ **i)** $\left[\frac{1}{2};1\right]$ **j)** (2; 7)

k) (-2,5; -1] **l)** $[-4;-1)\cup(3;4]$

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Цель урока: Научить решать элементарные иррациональные уравнения.

Все учащиеся	Решают элементарные иррациональные уравнения.
Большинство учащихся	Решают элементарные иррациональные уравнения. Находят область определения. Например, $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \Rightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ g(x)\geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)\geq 0 \end{cases}$.
Некоторые учащиеся	Решают иррациональные уравнения. Выделяют посторонние корни. Например, знают, что при решении уравнения $\sqrt{f(x)}=g(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} f(x)=g^2(x) \\ g(x)\geq 0 \end{cases}$ приведением в уравнение, $\sqrt{f(x)}\cdot g(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) \\ g(x) \end{cases}=0$ корни последнего, удовлетворяющие $\begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)=0 \end{cases}$ являются посторонними корнями исходного уравнения.

Оценка

Учащиеся оцениваются в классе на основе формативной оценки.

В течение 3 занятий рекомендуется выполнить примеры 1 – 39 с нечётными номерами на странице 86.

Рекомендуется использовать дифференцированный подход, основанный на успеваемости учащихся, при котором все учащиеся должны уметь решать зеленые примеры.

Рекомендуется показать решение по крайней мере 1 зеленого, 1 синего и 1 красного примеров.

Активизирующие вопросы

1. Какие уравнения называются равносильными уравнениями? Приведите примеры равносильных уравнений.

2. Найти область определения выражения $\sqrt{\dfrac{2}{x-2}}$.

3. Решите уравнение $\sqrt{5-x}=-1$.

Допустимые ошибки и рекомендации по их устранению

1. При решении иррациональных уравнений часто бывает, что у учащихся отсутствуют или недостаточно сформированы навыки перехода к равносильному уравнению. Поэтому рекомендуется в начале урока упомянуть о равносильных уравнениях.

2. Учащиеся часто не знают разницу между возведением обеих частей равенства в уравнении в четную и нечетную степень. Посторонние корни могут появиться при возведении в четную степень. Поэтому рекомендуется научить выполнять проверку найденных корней, подставляя их в исходное уравнение.

3. Механические ошибки при возведении в степень выражений с корнями в уравнении часто могут быть допущены из-за неправильного использования формул краткого умножения.

Домашнее задание

Примеры **2**-**40** с чётными номерами на странице 86.

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

Во многих случаях иррациональные уравнения решаются путём приведения к рациональным уравнениям, являющимся их результатами. Для этого выполняются следующие этапы:

- Чтобы преобразовать иррациональное уравнение в рациональное, обе части данного уравнения возводятся в натуральную степень один или несколько раз.
- Решается получившееся рациональное уравнение.
- Уточняются посторонние корни.

Образование посторонних корней связано с возведением в степень. Это подтверждается следующей теоремой.

Теорема. Решение уравнения $f_1(x)=f_2(x)$, образованного возведением в квадрат обеих частей уравнения $f_1^2(x)=f_2^2(x)$, состоит из объединения корней уравнений $f_1(x)=f_2(x)$ и $f_1(x)=-f_2(x)$

I. Уравнение вида $\sqrt{f(x)}=g(x)$ можно решить приведением его в равносильную ему систему $\begin{cases} g(x)\geq 0 \\ f(x)=g^2(x) \end{cases}$.

Пример 3. Решите уравнение $\sqrt{3x^2-6x+16}=2x-1$.

Решение.

$$\sqrt{3x^2-6x+16}=2x-1 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2-6x+16=(2x-1)^2, \\ 2x-1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2-6x+16=4x^2-4x+1, \\ 2x\geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+2x-15=0, \\ x\geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Решаем уравнение $x^2+2x-15=0$: $x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+60}}{2}=\frac{-2\pm 8}{2} \Rightarrow x_1=3,\ x_2=5$. Так как $x\geq\frac{1}{2}$, то корнем уравнения является $x=3$.

Ответ: $x=3$.

II. Для решения уравнений вида $\sqrt{f(x)}\cdot g(x)=0$ решают сперва систему $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)=0 \end{cases}$, потом уравнение $f(x) = 0$. Объединение решений двух последних даёт решение заданного уравнения.

Пример 4. Решите уравнение $(x^2-25)\sqrt{6-2x}=0$.

Решение.

Этап 1: $\begin{cases} x^2-25=0 \\ 6-2x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2}=\pm 5 \\ x<3 \end{cases} \Rightarrow x=-5$

Этап 2: $6 - 2x = 0 \Rightarrow x = 3$

Ответ: $x_1 = -5; x_2 = 3$.

III. Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ решается приведением его в одну из следующих систем:

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Пример 5. Решите уравнение $\sqrt{x+1} = \sqrt{2x-3}$.

Решение.

$$\begin{cases} x+1 = 2x-3 \\ 2x-3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x \geq 1,5 \end{cases} \Rightarrow x = 4$$

Ответ: $x = 4$.

IV. Решение уравнений вида $\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)} = 0$ состоит из объединения решений систем:

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} g(x) = 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Пример 7. Решите уравнение: $\sqrt{x^2-4} \cdot \sqrt{x+5} = 0$.

Решение.

1) $\begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ x + 5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \pm 2 \\ x \geq -5 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -2;\ x_2 = 2$

2) $\begin{cases} x + 5 = 0 \\ x^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = -5$

Ответ: $x_1 = 2; x_2 = -2; x_3 = -5$.

Область определения уравнения – это множество всех значений неизвестного, при которых все части уравнения имеют смысл. Иррациональное уравнение можно решить правильно, не находя область. Суть последнего опирается на проверку. В некоторых уравнениях полезно найти область определения.

Например, можете самостоятельно проверить, что:

1) нахождение области определения уравнения $\sqrt{x^3 + 4x - 1 - 8\sqrt{x^4 - x}} = \sqrt{x^3 - 1} + 2\sqrt{x}$ достаточно сложно и бесполезно (лучше возвести обе части уравнения в квадрат);

2) для решения уравнения $\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2 - x - x^2} = \sqrt{x} - 1$ достаточно найти его область определения.

V. Уравнение $\sqrt{f^2(x)} = f(x)$ равносильно неравенству $f(x) \geq 0$.

Уравнение $\sqrt{f^2(x)} = -f(x)$ равносильно неравенству $f(x) \leq 0$.

ПРИМЕРЫ

Решите уравнения.

1. $\sqrt{5x+2} = 10$ **2.** $\sqrt{4x-6} = 12$ **3.** $\sqrt{10-2x} = 4$

4. $\sqrt{-12+7x} = x$ **5.** $\sqrt{x+12} + x = 0$ **6.** $\sqrt{4+3x} = -x$

7. $x-3 = \sqrt{9-x}$ **8.** $-x = \sqrt{15-2x}$ **9.** $x-6 = \sqrt{8-x}$

10. $\sqrt{\dfrac{3x-17}{7}} = 4$ **11.** $\sqrt{\dfrac{11}{6-4x}} = \dfrac{1}{2}$ **12.** $\sqrt{\dfrac{4}{5x-2}} = 1$

13. $\sqrt{5x-3} = \sqrt{2x}$ **14.** $\sqrt{4-2x} = 2\sqrt{x-1}$

15. $\sqrt{x^2-3x+1} = \sqrt{2x-5}$ **16.** $3x + 2\sqrt{2x^2+3x-5} = 12$

17. $3 + \sqrt{3x^2-8x+14} = 2x$

Решение.

$$3+\sqrt{3x^2-8x+14}=2x \Rightarrow \sqrt{3x^2-8x+14}=2x-3 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2-8x+14=(2x-3)^2 \\ 2x-3\geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2-8x+14=4x^2-12x+9 \\ x\geq 1.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-4x-5=0 \\ x\geq 1.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2}=-1;5 \\ x\geq 1.5 \end{cases} \Rightarrow x=5$$

Ответ: $x = 5$.

18. $\sqrt{15x^2-7x+8} = 4x$ **19.** $\sqrt{x^2+x} = 2-x$

20. $(x^2-25)\sqrt{6-2x} = 0$ **21.** $(4-x^2)\sqrt{-1-3x} = 0$

22. $(x^2-16)(x-3)(x-6)\sqrt{5-x} = 0$ **23.** $(x^2-9x+14)\sqrt{x^2-9} = 0$

24. $(x-4)\cdot\sqrt{3+2x-x^2} = 0$ **25.** $\sqrt{5x+4} - \sqrt{x+3} = 1$

26. $\sqrt{x-2} + \sqrt{1-x} = 2$ **27.** $\sqrt{x-13} + \sqrt{10-x} = 4$

28. $\sqrt{(2x-3)^2} = 2x-3$ **29.** $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 3$

30. $2\sqrt{x-2} + 2 = \sqrt{3x+1}$ **31.** $\sqrt{x^2+77} - 2\sqrt[4]{x^2+77} - 3 = 0$

Решение.

$$\sqrt{x^2+77}-2\sqrt[4]{x^2+77}-3=0 \Rightarrow \left[\sqrt[4]{x^2+77}=t\right] \Rightarrow t^2-2t-3=0 \Rightarrow t_{1,2}=-1;3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{x^2+77}=3 \Rightarrow x^2+77=81 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x_{1,2}=-2;2.$$

Ответ: -2; 2.

32. $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=12$

33. $\sqrt{x}+\sqrt{x-2}=1-x$

34. $\sqrt{x^2+32}=2\sqrt[4]{x^2+32}+3$

35. $x^2+5x+4-5\sqrt{x^2+5x+28}=0$

36. $x^2+\sqrt{x^2+2x+8}=12-2x$

37. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-5}$

Решение.

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-5} \Rightarrow \begin{cases}\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}\right)^2=\left(\sqrt{3x-5}\right)^2 \\ x-2\geq 0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x-2+x-1+2\sqrt{x-2}\sqrt{x-1}=3x-5 \\ x\geq 2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2\sqrt{x-2}\sqrt{x-1}=x-2 \\ x\geq 2\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}4(x-2)(x-1)-(x-2)^2=0 \\ x\geq 2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x-2)(4x-4-x+2)=0 \\ x\geq 2\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(x-2)(3x-2)=0 \\ x\geq 2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=2;x_2=\dfrac{2}{3} \Rightarrow x=2 \\ x\geq 2\end{cases}$$

Ответ: $x=2$.

38. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+5}=\sqrt{2x+11}$

39. $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$

40. $\sqrt[3]{7-x}=\sqrt{3-x}$

ОТВЕТЫ

1. 19,6 **2.** 37,5 **3.** –3 **4.** 3; 4 **5.** –3 **6.** –1 **7.** 5 **8.** –5 **9.** 7

10. 43 **11.** –9,5 **12.** 1,2 **13.** 3 **14.** $1\frac{1}{3}$ **15.** 3 **16.** 2 **17.** 5 **18.** 1

19. 0,8 **20.** –5; 3 **21.** $-2;-\frac{1}{3}$ **22.** –4; 3; 5 **23.** –3; 3; 7 **24.** –1; 3 **25.** 1

26. $\varnothing$ **27.** $\varnothing$ **28.** $\varnothing$ **29.** 2 **30.** 2 **31.** –2; 2 **32.** 81 **33.** 1

34. –7; 7 **35.** –9; 4 **36.** –4; 2 **37.** 2 **38.** –1 **39.** 1; 2; 10 **40.** –1

СИСТЕМЫ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель урока: Научить решать иррациональные уравнения и их системы, проверять решение.

Все учащиеся	Решают элементарные иррациональные уравнения.
Большинство учащихся	Решают элементарные иррациональные уравнения и системы элементарных иррациональных уравнений
Некоторые учащиеся	Решают иррациональные уравнения неравенства и их системы, проверяют решение.

Оценка

Учащиеся оцениваются в классе на основе формативной оценки.

В течение 3 занятий рекомендуется выполнить задания a) примеров 1-17 на страницах 91-93.

Рекомендуется использовать дифференцированный подход, основанный на успеваемости учащихся, при котором все учащиеся должны уметь решать зеленые примеры.

Рекомендуется показать решение по крайней мере 1 зеленый, 1 зеленого, 1 синего и 1 красного примеров.

Активизирующие вопросы

1. Какие способы решения системы уравнений вы знаете?
2. Напишите пример системы уравнений с иррациональным уравнением и решите ее.
3. На что следует обратить особое внимание при решении системы иррациональных уравнений?
4. Составьте простую систему, включающую иррациональное уравнение, которое нужно решить методом введения новой переменной, и решите её.

Допустимые ошибки и рекомендации по их устранению

1. Ошибки, допускаемые при решении иррациональных уравнений, можно наблюдать и при решении их систем. Поэтому распространенные ошибки следует обсуждать с классом. Необходимо работать над ошибками и развивать у учащихся навыки самоконтроля.

2. Учащиеся часто не учитывают область определения иррационального уравнения. Рекомендуется объяснить важность области определения.

3. Учащиеся могут не учитывать случаи, когда система иррациональных уравнений имеет внешний корень. Для того чтобы этого не допустить, рекомендуется научить выполнять проверку, подставляя найденный корень решения в заданную систему.

Домашнее задание

Задания b) в примерах 1–17 на странице 91.

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

Решение систем иррациональных уравнений основано на правилах перехода к равносильным системам или следствиям. Используются различные методы решения системы иррациональных уравнений: разложение на множители, исключение переменных, алгебраическое сложение, замена переменных и др.

Пример 1. Решите систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=8\\ \sqrt{xy}=7\end{cases}$.

Решение.

Находим область определения системы уравнений: $x\ge 0$, $y\ge 0$.

Введём обозначения $\sqrt{x}=a, \sqrt{y}=b$.

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=8\\ \sqrt{xy}=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b=8\\ ab=7\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=8-b\\ (8-b)b=7\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=8-b\\ b^2-8b+7=0\end{cases}$$

Решаем уравнение $b^2-8b+7=0$, $b_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-28}}{2}=\frac{8\pm 6}{2}$, $\Rightarrow b_1=7,\ b_2=1$.

$a_1=8-b_1=8-7=1,\ \Rightarrow\ a_1=1.$

$a_2=8-b_2=8-1=7,\ \Rightarrow\ a_2=7.$

При $a_1=1,\ b_1=7$ имеем $\sqrt{x}=1,\ \sqrt{y}=7. \Rightarrow x=1,\ y=49.$

При $a_2=7$, $b_2=1$ имеем $\sqrt{x}=7,\ \sqrt{y}=1. \Rightarrow x=49,\ y=1.$

Проверим: при $x=1,\ y=49$ имеем

$$\begin{cases}\sqrt{1}+\sqrt{49}=8\\ \sqrt{49}=7\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1+7=8\\ 7=7\end{cases}$$

$x=49,\ y=1$ da

$$\begin{cases}\sqrt{49}+\sqrt{1}=8\\ \sqrt{49}=7\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}7+1=8\\ 7=7\end{cases}$$

Ответ: $(1;\ 49),\ (49;\ 1)$.

Пример 2. Решите систему уравнений $\begin{cases}x-y=21\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3\end{cases}$.

Решение.

Находим область определения системы уравнений: $x\ge 0$, $y\ge 0$.

Применяем формулу короткого умножения $x-y=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$.

$$\begin{cases} x-y=21 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=21 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=21 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$+\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=7 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=5 \\ \sqrt{y}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=25 \\ y=4. \end{cases}$$

Проверим: при $x=25,\ y=4$ имеем $\begin{cases} 25-4=21 \\ \sqrt{25}-\sqrt{4}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 21=21 \\ 5-2=3 \end{cases}$

Ответ: (25; 4).

Пример 5. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x-\sqrt{y+2x}=1 \\ y+3x=5 \end{cases}$.

Решение. 1) $\begin{cases} 3x-\sqrt{y+2x}=1 \\ y+3x=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-\sqrt{y+2x}=1 \\ y=5-3x \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-\sqrt{5-3x+2x}=1 \\ y=5-3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{5-x}=3x-1 \\ y=5-3x \end{cases}$$

2) Решаем уравнение $\sqrt{5-x}=3x-1$. Так как $\sqrt{5-x}\geq 0$, то

$$3x-1\geq 0 \Rightarrow 3x\geq 1 \Rightarrow x\geq \frac{1}{3} \Rightarrow x\in\left[\frac{1}{3};\infty\right).$$

Возведя обе части уравнения $\sqrt{5-x}=3x-1$, получим квадратное уравнение.

$$5-x=(3x-1)^2 \Rightarrow 5-x=9x^2-6x+1 \Rightarrow 9x^2-5x-4=0$$

Находим корни уравнения.

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+144}}{18}=\frac{5\pm 13}{18} \Rightarrow x_1=1,\ x_2=-\frac{4}{9}.$$

Так как $1\in\left[\frac{1}{3};\infty\right)$ и $-\frac{4}{9}\notin\left[\frac{1}{3};\infty\right)$. Поэтому $x=1$ – корень уравнения.

При $x=1$ имеем $y=2$. Итак, пара $(1;2)$ – корень образованной системы. Остаётся проверить, является ли эта пара корнем исходной системы. При $x=1$ и $y=2$ имеем:

$\begin{cases} 3\cdot 1-\sqrt{2+2\cdot 1}=3-\sqrt{4}=1, \\ 2+3\cdot 1=5. \end{cases}$ Получились правильные числовые равенства.

Ответ: $(1;2)$.

ПРИМЕРЫ

Решите систему уравнений.

1. a) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=4 \\ 2\sqrt{x}+3\sqrt{y}=18 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3\sqrt{x}-\sqrt{y}=8 \\ \sqrt{x}+2\sqrt{y}=19 \end{cases}$

2. a) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3 \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=1 \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3 \end{cases}$

3. a) $\begin{cases} 2\sqrt[3]{x}+3\sqrt[3]{y}=-1 \\ 2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{y}=-7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{y}=3 \\ 3\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{y}=-9 \end{cases}$

4. a) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=26 \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=5 \\ \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=1 \end{cases}$

5. a) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=9 \\ \sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=7 \\ \sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}=1 \end{cases}$

Решение. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=9 \\ \sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt[6]{x}=a \\ \sqrt[6]{y}=b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^3+b^3=9 \\ a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+b)(a^2-ab+b^2)=9 \\ a+b=3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} (a+b)\left((a+b)^2-3ab\right)=9 \\ a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9-3ab=3 \\ a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab=2 \\ a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{1,2}=1;2 \\ b_{1,2}=2;1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2}=1;64 \\ y_{1,2}=64;1 \end{cases}.$

Ответ: (1; 64), (64; 1).

6. a) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8 \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=7 \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=12 \end{cases}$

7. a) $\begin{cases} \sqrt{x}+3\sqrt{y}=10 \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2\sqrt{x}-\sqrt{y}=5 \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=3 \end{cases}$

8. a) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=4 \\ x-y=32 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8 \\ x-y=16 \end{cases}$

9. a) $\begin{cases} \sqrt{6+x}-3\sqrt{3y+4}=-10 \\ 4\sqrt{3y+4}-\sqrt{6+x}=14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2\sqrt{x-2}+\sqrt{5y+1}=8 \\ 3\sqrt{x-2}-2\sqrt{5y+1}=-2 \end{cases}$

10. a) $\begin{cases}\sqrt[4]{x+y}-\sqrt[4]{x-y}=2\\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=8\end{cases}$ b) $\begin{cases}\sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=4\\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=10\end{cases}$

11. a) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5\\ x\cdot y=216\end{cases}$ b) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3\frac{3}{4}\\ x\cdot y=1\end{cases}$

c) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=-3\\ x\cdot y=8\end{cases}$ d) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2\\ x\cdot y=27\end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=-3\\ x\cdot y=8\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x}=a\\ \sqrt[3]{y}=b\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}a+b=-3\\ a^3b^3=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=-3\\ ab=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_{1,2}=-2;-1\\ b_{1,2}=-1;-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_{1,2}=-8;-1\\ y_{1,2}=-1;-8\end{cases}.$$

Ответ: (-8; -1), (-1; -8).

12. a) $\begin{cases}y\sqrt{x}+x\sqrt{y}=30\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5\end{cases}$ b) $\begin{cases}y\sqrt{x}-x\sqrt{y}=-12\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=1\end{cases}$

13. a) $\begin{cases}y+x-\sqrt{xy}=7\\ xy=9\end{cases}$ b) $\begin{cases}x-y+\sqrt{xy}=20\\ xy=64\end{cases}$

14. a) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3\\ \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=3\end{cases}$ b) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=-1\\ \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=7\end{cases}$

Решение. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3,(1)\\ \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=3,(2)\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x}=a\\ \sqrt[3]{y}=b\\ (1)\cdot(2)\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}a-b=3\\ a^3-b^3=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-b=3\\ (a-b)^2+3ab=3\end{cases}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}a-b=3\\ ab=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_{1,2}=-2;-1\\ b_{1,2}=1;2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_{1,2}=8;1\\ y_{1,2}=-1;-8\end{cases}.$$

Ответ: (1; -8), (8; -1).

15. a) $\begin{cases}3\sqrt{\frac{x}{y}}+2\sqrt{\frac{y}{x}}=5\\ 4\sqrt{x}+\sqrt{y}=10\end{cases}$ b) $\begin{cases}4\sqrt{\frac{x}{y}}+2\sqrt{\frac{y}{x}}=9\\ 7\sqrt{x}+2\sqrt{y}=48\end{cases}$

16. a) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3} \\ y^2 + x^2 = 82 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2} \\ y^2 - x^2 = 15 \end{cases}$

17. a) $\begin{cases} 4y + 5x - \sqrt{xy} = 79 \\ 5x - 4y + \sqrt{xy} = 81 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 9y + 2x - \sqrt{xy} = 71 \\ 2x - 9y + \sqrt{xy} = 73 \end{cases}$

ОТВЕТЫ

1. **a)** (36; 4) **b)** (25; 49) **2.** **a)** (64; 1) **b)** (8; 1) **3.** **a)** (-8; 1) **b)** (-1; 27)

4. **a)** (1; 625), (625; 1) **b)** (81; 16) **5.** **a)** (1; 64), (64; 1) **b)** (64; 1)

6. **a)** (9; 25), (25; 9) **b)** (9; 16), (16; 9) **7.** **a)** (16; 4), $\left(36; \frac{16}{9}\right)$ **b)** (9; 1)

8. **a)** (36; 4) **b)** (25; 9) **9.** **a)** (-2; 4) **b)** (6; 3) **10.** **a)** (41; 40) **b)** (41; 40), (41; -40)

11. **a)** (8; 27), (27; 8) **b)** $\left(64; \frac{1}{64}\right)$ **c)** (-8; -1), (-1; -8) **d)** (-1; -27), (27; 1)

12. **a)** (4; 9), (9; 4) **b)** (16; 9) **13.** **a)** (1; 9), (9; 1) **b)** (16; 4)

14. **a)** (1; -8), (8; -1) **b)** (1; 8), (-8; -1) **15.** **a)** (4; 4), $\left(\frac{400}{121}; \frac{900}{121}\right)$ **b)** (36; 9), $\left(\frac{256}{25}; \frac{4096}{25}\right)$

16. **a)** (-9; -1), (-1; -9) **b)** (-1; -4), (1; 4) **17.** **a)** $\left(16; \frac{1}{4}\right)$ **b)** $\left(36; \frac{1}{9}\right)$

СУММАТИВНАЯ ОЦЕНКА. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2.

Вариант I

1. Решите уравнения

a) $\frac{x}{3}-\frac{x+8}{6}=\frac{3x+2}{9}-\frac{x+1}{6}$.

b) $3x^4 - 5x^3 + 2 = 0$

2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2-1=0 \\ xy^2=-4 \end{cases}$

3. Решите иррациональное уравнение: $\sqrt{3x-7}-\sqrt{7-3x}=0$

4. Найдите $x - y$, если $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=3 \\ \sqrt{xy}=4 \end{cases}$.

5. Решите неравенство $\frac{2x-7}{6}+\frac{7x-2}{3}<3-\frac{1-x}{2}$.

Вариант II

1. Решите уравнения.

a) $\frac{3x-2}{4}+\frac{3x+3}{2}-2{,}5x+2=0$

b) $x^3 - 6x^2 + x + 4 = 0$

2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} y-x^3=0 \\ y=16x \end{cases}$

3. Решите иррациональное уравнение: $\sqrt{6+x}-\sqrt{8-x}=0$

4. Найдите $x - y$, если $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5 \\ \sqrt{xy}=4 \end{cases}$.

5. Решите неравенство. $\frac{5x-8}{10}>\frac{x-2}{6}+\frac{1-5x}{5}$

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Цель урока: Научить строить графики показательной функции; определять функцию на основе ее графика.

Все учащиеся	Знают свойства показательной функции; могут построить эскиз графика показательной функции.
Большинство учащихся	Могут увидеть свойства функции на основе графика показательной функции.
Некоторые учащиеся	Умеют правильно использовать свойства показательной функции при решении нестандартных задач.

Оценка

Учащиеся оцениваются в классе на основе формативной оценки.

В течение 3 занятий рекомендуется выполнить задания а) примеров 1-17 на страницах 91-93.

Рекомендуется использовать дифференцированный подход, основанный на успеваемости учащихся, при котором все учащиеся должны уметь решать зеленые примеры.

Рекомендуется показать решение по крайней мере 1 зеленого, 1 синего и 1 красного примеров.

Активизирующие вопросы

1. Что означают выражения «степень числа», «основание степени», «показатель степени»?
2. Чему равна нулевая степень числа?
3. Чему равна первая степень числа?
4. Какие свойства степени вы знаете?
5. Как записать число с отрицательным показателем в виде положительного показателя?

Допустимые ошибки и рекомендации по их устранению

Бывают случаи невнимательности области определения и множеству значений функции (асимптоте графика) показательной функции. Чтобы устранить такого типа ошибки, необходимо развивать больше навыков, построив графики показательных функций различных оснований.

Домашнее задание

Примеры 1–7, b), d).

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

Для изучения показательных функций нужно знать следующие их свойства:

1) $a^0 = 1, \quad a \neq 0$ 2) $a^1 = a$ 3) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

4) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ 5) $\left(a^n\right)^m = a^{nm}$ 6) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

7) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$ 8) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a > 0, n \in N, m \in Z$

Заключение. Чтобы степень a^p с произвольным вещественным показателем p принимала определённое значение, основание должно удовлетворять условиям $a > 0$ и $a \neq 1$.

Рассмотрим вещественное число a, удовлетворяющее условиям $a > 0$ и $a \neq 1$. Функция вида $y = a^x$ называется **показательной функцией** (показатель степени – переменная величина).

Показательная функция $y = a^x$ обладает следующими свойствами:

● Область определения показательной функции $y = a^x$ состоит из множества всех действительных чисел:

$$D(y) = (-\infty; +\infty)$$

● Множество значений показательной функции $y = a^x$ состоит из множества всех положительных действительных чисел:

$$E(y) = (0; +\infty)$$

● Показательная функция $y = a^x$ не пересекается с осью Ox.

● Показательная функция $y = a^x$ пересекается с осью Oy в точке $(0, 1)$.

● Показательная функция не является ни периодической, ни чётной, ни нечётной.

● Функция $y = a^x$ убывает при a, $0 < a < 1$. Интервал убывания $(-\infty; +\infty)$.

● Функция $y = a^x$ возрастает при $a > 1$. Интервал возрастания $(-\infty; +\infty)$.

ПРИМЕРЫ

1. Приведите свойства функции и постройте её график.

a) $y = 3^x$ b) $y = 0,4^x$ c) $y = 0,8^x$ d) $y = 1,5^x$

2. Найдите множество значений функции.

a) $y = 3^x$ b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$

c) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$ d) $y = 4^x + 2$

3. Сравните выражения.

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ и 1 b) $3,2^{-\sqrt{2}}$ и 1 c) $0,7^{\frac{\sqrt{5}}{9}}$ и $0,7^{\frac{1}{6}}$ d) $5^{-\sqrt{13}}$ и $\left(\frac{1}{5}\right)^{2,1}$

4. Вычислите.

a) $((\sqrt{3})^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$ b) $3^{1-2\sqrt{3}} \cdot 9^{1+\sqrt{3}}$ c) $64^{\sqrt{2}} : 64^{3\sqrt{2}}$ d) $(5^{\sqrt[5]{16}})^{\sqrt[5]{2}}$

5. Упростите выражения.

a) $(c^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$ b) $b^{\sqrt{2}} \cdot (\frac{1}{b})^{\sqrt{2}-1}$ c) $x^{\pi} \cdot \sqrt[4]{x^2 : 6x^{4\pi}}$ d) $y^{\sqrt{2}} \cdot y^{1,5} : 6\sqrt[3]{y^{3\sqrt{2}}}$

Решение. d) По свойству, $y^{\sqrt{2}} \cdot y^{1,5} : 6\sqrt[3]{y^{3\sqrt{2}}} = \frac{y^{\sqrt{2}+1,5-\frac{3\sqrt{2}}{3}}}{6} = \frac{y^{\sqrt{2}+1,5-\sqrt{2}}}{6} = \frac{y^{1,5}}{6} = \frac{\sqrt{y^3}}{6}$

Ответ: $\frac{\sqrt{y^3}}{6}$

6. Какие из функций $y = \left(\frac{5}{9}\right)^x$, $y = \pi^x$, $y = 1,7^x$ возрастающие?

7. Постройте эскизы графиков следующих функций.

a) $y = 2^{|x|}$ b) $y = -2^{|x|+1}$ c) $y = 2^{-|x|} - 1$

8. Упростите выражения.

a) $\dfrac{a^{2\sqrt{2}} - b^{2\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}})^2} + 1$ b) $\dfrac{\left(a^{2\sqrt{3}} - 1\right)\left(a^{2\sqrt{3}} + a^{\sqrt{3}} + a^{3\sqrt{3}}\right)}{a^{4\sqrt{3}} - a^{\sqrt{3}}}$

c) $\dfrac{a^{\sqrt{5}} - b^{\sqrt{7}}}{a^{\frac{2\sqrt{5}}{3}} + a^{\frac{\sqrt{5}}{3}} b^{\frac{\sqrt{7}}{3}} + b^{\frac{2\sqrt{7}}{3}}}$ d) $\sqrt{\left(x^{\pi} + y^{\pi}\right)^2 - \left(4^{\frac{1}{\pi}} xy\right)^{\pi}}$

9. Определите, какие из следующих двух функций возрастающая, а какая убывающая.

a) $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$, $y = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ b) $y = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$, $y = \left(\dfrac{3}{\pi}\right)^x$

c) $y = \left(\sqrt{5} - 2\right)^x$, $y = \dfrac{1}{\left(\sqrt{5} - 2\right)^x}$ d) $y = \left(3 - \sqrt{7}\right)^x$, $y = \dfrac{1}{\left(3 - \sqrt{7}\right)^x}$

10. Найдите множество значений функции.

a) $y = 3^{x+1} - 3$ b) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$ c) $y = \left|2^x - 2\right|$ d) $y = 4^{|x|}$

11. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции.

a) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sin x}$ b) $y = 4^{\cos x}$ c) $y = 5 + 3^{|\cos x|}$ d) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{|\sin x|} - 2$

12. Определите знак показателя.

a) $ù^a =$ b) $10^a = 4$ c) $0,3^a = 0,1$ d) $0,7^a = 5$

13. Найдите значение выражения.

a) если $6^{x-1} = 12$, найдите 6^x; b) если $5^{x-3} = 4$, найдите 5^{4-x}; c) если $12^{x+5} = 6$, найдите 12^{-3-x}.

Решение. c) $12^{x+5} = 6 \Rightarrow 12^x \cdot 12^5 = 6 \Rightarrow 12^x = \dfrac{6}{12^5}$.

$$12^{-3-x} = \frac{12^{-3}}{12^x} = \frac{12^{-3}}{\frac{6}{12^5}} = \frac{12^{-3+5}}{6} = \frac{12^2}{6} = \frac{144}{6} = 24$$

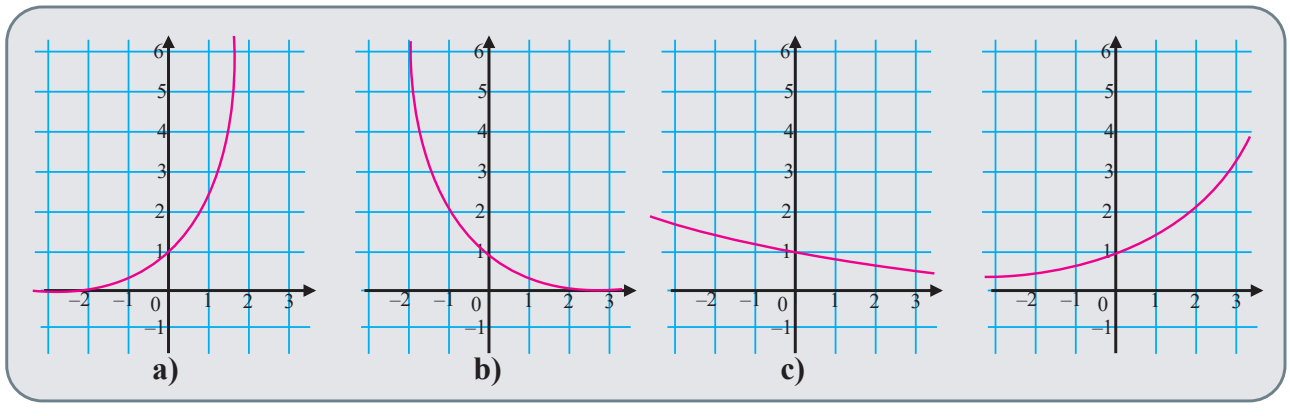
Ответ: 24

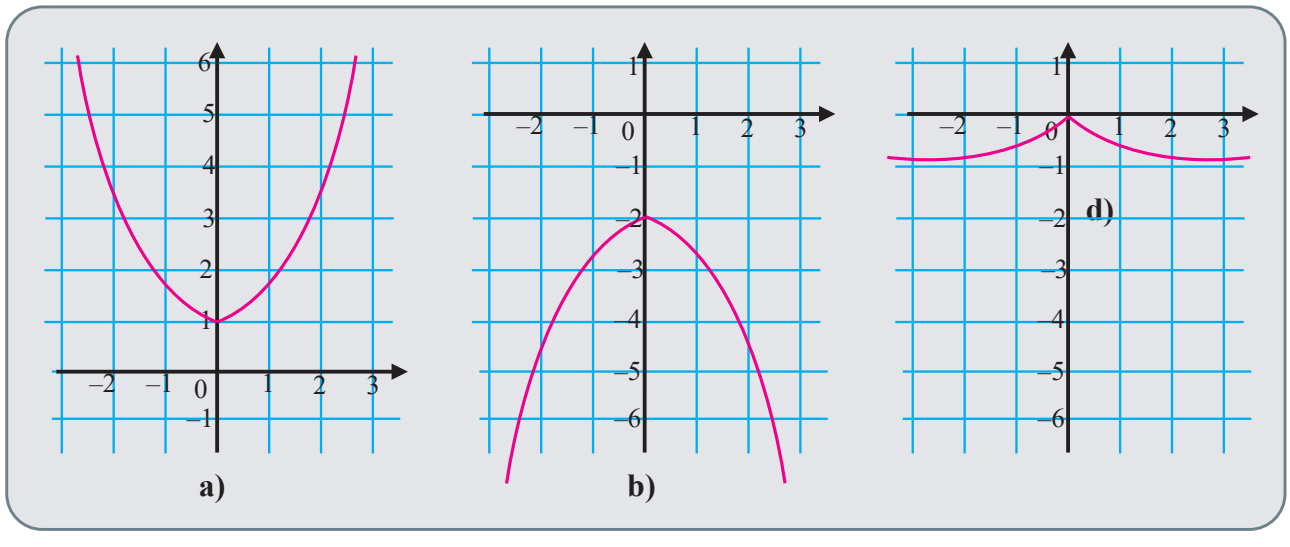
14. В каких случаях выполняется неравенство $3^{x_1} > 3^{x_2}$?

15. Установите, что функция $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ образует бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, когда x принимает натуральные значения.

Доказательство: Когда вместо x подставляются натуральные числа, то образуется последовательность: $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$. Эти числа удовлетворяют равенству $b_n = b_{n-1}q$. Здесь $q = \frac{1}{3} < 1$. Итак, полученная последовательность представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию.

ОТВЕТЫ





8. **a)** $\frac{2a^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}}$ **b)** $a^{\sqrt{3}} + 1$ **c)** $a^{\frac{\sqrt{5}}{3}} - b^{\frac{\sqrt{7}}{3}}$ **d)** $\left|x^{\pi} - y^{\pi}\right|$

9. a) Растущая; убывающая **b)** Растущая; убывающая

c) Убывающая; растущая **d)** Убывающая; растущая

10. **a)** $(-3;\infty)$ **b)** $(2;\infty)$ **c)** $[0;\infty)$ **d)** $(0;\infty)$

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Цель урока: Научить решать элементарные показательные уравнения, проверять решение.

Все учащиеся	Могут решать показательные уравнения, используя свойства степени.
Большинство учащихся	Осознают, что показательные уравнения можно решить графически.
Некоторые учащиеся	Умеют правильно использовать свойства степени при решении нестандартных задач.

Активизирующие вопросы

1. Что означают выражения «степень числа», «основание степени», «показатель степени»?
2. При каких условиях степени одинакового основания равны?
3. При каких условиях степени одинакового показателя равны?
4. Какие свойства степени вы знаете?
5. Объясните, как решать элементарные показательные уравнения.

Допустимые ошибки и рекомендации по их устранению

Наблюдается неумение правильно использовать свойства степени, невнимательность к области определения. Чтобы устранить такого типа пробелы, необходимо развивать больше навыков, решая показательные уравнения.

На уроке рекомендуется решить 1–2(a,c,e, g,i, k), 3, 4, 7, 9.

Домашнее задание

1–2 (b, d, f, h, j, l), 5, 6, 8, 10

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

Показательные уравнения и их решение

Корнем уравнения $a^x = a^p$ с неизвестным x является его значение $x = p$.

При решении показательных уравнений применяется следующее правило:

При $a > 0$, $a \neq 1$ корни уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ состоят из корней уравнения $f(x) = g(x)$.

Пример 1. Решите уравнение $2^{x-1} = 16$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде $2^{x-1} = 2^4$. Тогда $x - 1 = 4$. Отсюда $x = 5$.

Ответ: $x = 5$.

Пример 2. Решите уравнение $3^{2x} \cdot 3^{x^2} = 3^{15}$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде: $3^{2x+x^2} = 3^{15}$. Тогда $x^2 + 2x = 15$ или $x^2 + 2x - 15 = 0$. Корнями этого квадратного уравнения являются $x_1 = -5; x_2 = 3$.

Ответ: $x_1 = -5;\ x_2 = 3$.

ПРИМЕРЫ

1. Решите показательные уравнения.

a) $3^x \cdot 3 = 81$ b) $4^{3x} \cdot 2^x = 128$ c) $5^{x+1} - 4 \cdot 5^x = 25$ d) $7^x \cdot 8^x = 1$

e) $4^{x^2-3x-4} = 1$ f) $0,3^{2x-1} = 0,09$ g) $2^{2x} = 4^{2\sqrt{3}}$ h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} = 9$

i) $27^x = \frac{1}{3}$ j) $400^x = \frac{1}{20}$ k) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{81}$ l) $0,6^{x+3} = 0,6^{2x-5}$

2. Решите уравнения.

a) $3^x = 81$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{1024}$ c) $7^x = -49$ d) $13^x = -169$

e) $5^x = 0$ f) $8^{2x} = 0$ g) $3^{6-x} = 3^{3x-2}$ h) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-9}$

i) $2^{7x-15} = 2^{9-4x}$ j) $13^{5-2x} = 13^{6x+1}$ k) $2^{x^2+x-0,5} = 4\sqrt{2}$ l) $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$

3. $\left(\frac{21}{6}\right)^{29x^2-8x} = \left(\frac{6}{21}\right)^{8x^2-29x}$

4. $\sqrt[3]{5^{2x-3}} = \frac{5}{\sqrt[4]{5}}$

5. $\left(\frac{37}{5}\right)^{71\sqrt{x}-3} = \left(\frac{5}{37}\right)^{3\sqrt{x}-293}$

6. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x^2-9x} = 1$

7. $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0,01\left(10^{x-1}\right)^3$

8. $2^{x+1} = 5^{x+1}$

Решение. $2^{x+1} = 5^{x+1} \mid :5^{x+1} \Rightarrow \frac{2^{x+1}}{5^{x+1}} = 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} = \left(\frac{2}{5}\right)^0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1.$ **Ответ:** $x=-1$

9. $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$

10. $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 150$

11. $5^{2x} + 5^{2x+2} + 5^{2x+4} = 651$

12. $4 \cdot 7^{x+3} - 7^{x+2} - 3 \cdot 7^{x+1} = 1302$

13. $6 \cdot 2^{x+4} - 4 \cdot 2^{x+3} + 3 \cdot 2^{x+2} = 152$

14. $7^{3x} - 7^{3x-1} = 6$

15. $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

16. $5 \cdot 25^x - 6 \cdot 5^x + 1 = 0$

17. $9^x + 3 \cdot 3^x - 18 = 0$

Решение. Введем обозначение $3^x = t$. Тогда $9^x = t^2$. После чего получим квадратное уравнение $t^2 + 3t - 18 = 0$. По теореме Виета находим $t_1 = -6$ и $t_2 = 3$. Подставляя эти значения в обозначения, имеем:

$3^x = -6$, которое невозможно, и $3^x = 3$, откуда $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

18. $3^{2x+3}-4\cdot 3^{x+1}+1=0$ **19.** $(0,25)^{2-x}=\dfrac{256}{2^{x+3}}$

20. $3^{4\sqrt{x}}-4\cdot 3^{2\sqrt{x}}+3=0$ **21.** $9\cdot 16^{x}+2\cdot 12^{x}-32\cdot 9^{x}=0$

22. $64\cdot 9^{x}-84\cdot 12^{x}+27\cdot 16^{x}=0$ **23.** $3\cdot 16^{x}+2\cdot 81^{x}=5\cdot 36^{x}$

Решение. $3\cdot 16^{x}+2\cdot 81^{x}=5\cdot 36^{x}\,|\div 36^{x}$

$3\cdot\left(\dfrac{16}{36}\right)^{x}+2\cdot\left(\dfrac{81}{36}\right)^{x}=5$. Далее, введя обозначение $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{x}=t$, получим $3t+\dfrac{2}{t}=5$. Умножая все члены последнего уравнения на t (это возможно, поскольку согласно обозначению, имеем $t>0$), преобразуем его в квадратное уравнение $3t^{2}-5t+2=0$. Находим его корни $t_1=\dfrac{2}{3}$, $t_2=1$. Подставляя эти значения в обозначения, имеем:

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{x}=\frac{2}{3},\ \text{откуда}\ x=\frac{1}{2},\ \text{и}\left(\frac{4}{9}\right)^{x}=1,\ \text{откуда.}$$

Ответ: $x=0$, $x=\dfrac{1}{2}$.

24. $4^{x^2}+6^{x^2}=2\cdot 9^{x^2}$ **25.** $8^{x}-6\cdot 12^{x}+11\cdot 18^{x}=2\cdot 27^{x+\frac{1}{3}}$

26. $x\cdot 3^{x-1}+3\cdot 3^{\sqrt{3-x}}=3^{x}+x\cdot 3^{\sqrt{3-x}}$ **27.** $x^{2}\cdot 4^{\sqrt{6-x}}+4^{2+x}=16\cdot 2^{2\sqrt{6-x}}+x^{2}\cdot 2^{2x}$

28. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2-x}+2^{x-3}=80+\sqrt{4^{x-4}}$

ОТВЕТЫ

1. a) $x=3$ **b)** $x=1$ **c)** $x=2$ **d)** $x=0$ **e)** $x_1=-1;x_2=4$ **f)** $x=3$

g) $x=2\sqrt{3}$ **h)** $x=-\dfrac{2}{3}$ **i)** $x=-\dfrac{1}{3}$ **j)** $x=-\dfrac{1}{2}$ **k)** $x=4$ **l)** $x=8$

2. a) $x=4$ **b)** $x=10$ **c)** Нет корня **d)** $x\in\varnothing$ **e)** $\varnothing$ **f)** $\varnothing$ **g)** $x=2$ **h)** $x=1$

i) $x=\dfrac{24}{11}$ **j)** x $\dfrac{1}{2}$ **k)** $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ **l)** $x=2$

3. $x_1=0;x_2=1$ **4.** $x=\dfrac{21}{8}$ **5.** $x=16$ **6.** $x_1=0;x_2=9$ **7.** $x_1=1;x_2=2$

8. $x=-1$ **9.** $x=1$ **10.** $x=3$ **11.** $x=0$ **12.** $x=0$ **13.** $x=1$

14. $x=\dfrac{1}{3}$ **15.** 1; 2 **16.** 0; –1 **17.** **18.** –1; –2 **19.** 3

20. $0;\dfrac{1}{4}$ **21.** $x=2$ **22.** 1; 2 **23.** $0;\dfrac{1}{2}$ **24.** 0 **25.** $x=0$ **26.** –2; 3

27. –4; 2; 4 **28.** 8

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Цель урока: Научить решать элементарные показательные неравенства, проверять решение.

Все учащиеся	Могут решать показательные неравенства, используя свойства степени.
Большинство учащихся	Умеют решать показательные неравенства приведением к одинаковому основанию..
Некоторые учащиеся	Умеют решать показательные неравенства, приводящие к другим типам неравенств.

Активизирующие вопросы

1. Какие способы решения показательных уравнений вы знаете?
2. При каких условиях степени одинакового основания равны?
3. При каких условиях степени одинакового показателя равны?
4. Какие свойства степени вы знаете?

Допустимые ошибки и рекомендации по их устранению

Наблюдается неумение правильно использовать свойства степени, невнимательность к области определения. Чтобы устранить такого типа пробелы, необходимо развивать больше навыков, решая показательные уравнения и неравенства.

Домашнее задание

2, 4, 6, 8, 10, 15. Примеры.

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

В следующей таблице показаны способы приведения показательных неравенств с одинаковыми основаниями в рациональные неравенства.

Виды показательных неравенств / Основание	$a^{f(x)} \le a^{g(x)}$	$a^{f(x)} < a^{g(x)}$	$a^{f(x)} > a^{g(x)}$	$a^{f(x)} \ge a^{g(x)}$
При $0 < a < 1$	$f(x) \ge g(x)$	$f(x) > g(x)$	$f(x) < g(x)$	$f(x) \le g(x)$
При $a > 1$	$f(x) \le g(x)$	$f(x) < g(x)$	$f(x) > g(x)$	$f(x) \ge g(x)$

Пример 1. Решите неравенство $2^x > 32$.

Решение.

Перепишем неравенство в виде $2^x > 2^5$. Так как основание больше единицы, т. е. 2>1, то x>5.

Ответ: $(5;\infty)$.

Пример 2. Решите неравенство $\left(\frac{3}{4}\right)^x \ge \frac{16}{9}$.

Решение.

Запишем неравенство в виде $\left(\frac{3}{4}\right)^x \ge \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$. Так как $0 < \frac{3}{4} < 1$, то $x \le -2$.

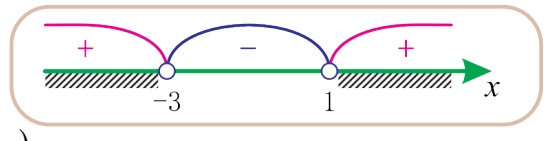
Ответ: $(-\infty;-2]$.

Пример 3. Решите неравенство. $3^{x^2+2x} > 3^3$.

Решение.

Так как основание больше единицы, т. е. 3 > 1, то решение заданного неравенства состоит из решения неравенства $x^2 + 2x > 3$.

$$x^2 + 2x - 3 > 0,\ (x+3)(x-1) > 0,$$



Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

При $a \neq b$, $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$, $b \neq 1$ показательное неравенство $a^{f(x)} < b^{f(x)}$ решается приведением к равносильному ему неравенству $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} < 1$.

ПРИМЕРЫ

1. $4^x > 256$

2. $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \frac{1}{729}$

3. $7^x < -49$

4. $13^x > -169$

5. $5^x < 0$

6. $8^{2x} > 0$

7. $10^x \leq 0$

8. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{x}{2}}$

9. $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{2x}{15}}$

10. $2^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$

Решение. $2^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \Rightarrow 2^x > 2^{-x-1}$. Так как основание $2 > 1$, то $x > -x - 1 \Rightarrow 2x > -1 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$

Ответ: $x > -\frac{1}{2}$.

11. При каких натуральных n справедливо двойное неравенство $9 \leq 3^n \leq 79$?

12. При каких значениях x функция $y = 5^x - 5$ принимает положительные значения?

13. Найдите наибольшее целое значение x, удовлетворяющее неравенству

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2x}.$$

14. $3 \cdot 9^{2x-2} > \left(\frac{1}{27}\right)^{3x-1}$

15. $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-3} > 4^{1-2x}$

16. $2 \cdot 8^{4-5x} < \left(\frac{1}{16}\right)^{x+2}$

17. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x+1}{x+2}} > \frac{\sqrt{3}}{2}$

18. $6\cdot 2^{x+3}-5\cdot 2^{x+2}+4\cdot 2^{x}>128$ **19.** $7\cdot 3^{x+4}+2\cdot 3^{x+3}-5\cdot 3^{x+2}\le 192$

20. $10\cdot 3^{x+2}-4\cdot 10^{x+2}<3^{x+4}-3\cdot 10^{x+2}$ **21.** $5^{x+2}-5^{x+1}>2^{x+2}+2^{x+4}$

Решение: $5^{x+2}-5^{x+1}>2^{x+2}+2^{x+4} \Rightarrow 25\cdot 5^{x}-5\cdot 5^{x}>4\cdot 2^{x}+16\cdot 2^{x} \Rightarrow 20\cdot 5^{x}>20\cdot 2^{x} \;|:\left(20\cdot 2^{x}\right)$

$\left(\frac{5}{2}\right)^{x}>1 \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{x}>\left(\frac{5}{2}\right)^{0} \Rightarrow x>0$, поскольку $x>0$

Ответ: $x>0$

22. $\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2}<\frac{27}{64}$ **23.** $\left(\frac{1}{25}\right)^{2x}<\left(\sqrt{5}\right)^{x^2+2.75}$

24. $\left(\frac{1}{16}\right)^{x^2}<8\cdot\sqrt{2}^{16-2x}$ **25.** $2^{x^2}>\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}$

26. $0,04^{x}-26\cdot(0,2)^{x}+25\le 0$ **27.** $25^{x}-4\cdot 5^{x}-5\ge 0$

28. $4^{x}-10\cdot 2^{x}+16<0$ **29.** $3^{2x+1}+1<4\cdot 3^{x}$

30. Найдите сумму всех целых чисел, удовлетворяющих неравенству $3^{8x}-4\cdot 3^{4x}\le -3$.

31. Сколько целых чисел удовлетворяет неравенству $x^{2}\cdot 3^{x}-3^{x+1}\le 0$?

Решение: $x^{2}\cdot 3^{x}-3^{x+1}\le 0 \Rightarrow x^{2}\cdot 3^{x}-3^{x}\cdot 3\le 0 \Rightarrow 3^{x}\cdot\left(x^{2}-3\right)\le 0 \Rightarrow 3^{x}\cdot\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)\le 0$

Отсюда $x\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$. Но $x\in Z$. Поэтому $x=\{-1;0;1\}$

Ответ: $x=\{-1;0;1\}$

ОТВЕТЫ

1. $(4;\infty)$ **2.** $[6;\infty)$ **3.** $\varnothing$ **4.** R **5.** $\varnothing$ **6.** R **7.** $\varnothing$

8. $(1;\infty)$ **9.** $(-1,5;\infty)$ **10.** $\left(-\frac{1}{2};\infty\right)$ **11.** 2 **12.** $(1;\infty)$ **13.** 1

14. $\left(\frac{6}{13};\infty\right)$ **15.** R. **16.** $\left(\frac{21}{11};\infty\right)$ **17.** $(-2;0)$ **18.** $(2;\infty)$

19. $(-\infty;-1]\frac{1}{2}$ **20.** $(-2;\infty)$ **21.** $(0;\infty)$ **22.** $(-1;7)$

23. $\left(-\infty;\frac{-8-\sqrt{53}}{2}\right)\cup\left(\frac{-8+\sqrt{53}}{2}:\infty\right)$ **24.** $x\in R$ **25.** $(-\infty;-3)\cup(1;\infty)$

26. $[-2;0]$ **27.** $[1;\infty)$ **28.** $(1;3)$ **29.** $(-1;0)$ **30.** 0 **31.** 3

ПОНЯТИЕ ЛОГАРИФМА. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Цель урока: Научить построить графики логарифмической функции; тождественно преобразовать логарифмические выражения; определять функцию на основе ее графика.

Все учащиеся	Знают свойства логарифмической функции. Могут изобразить эскиз графика логарифмической функции.
Большинство учащихся	Могут определить свойства функции на основе графика.
Некоторые учащиеся	Владеют способностью целесообразно применять свойства логарифмической функции при решении нестандартных задач.

Активизирующие вопросы

1. Что вы подразумеваете под «возведением в степень» числа?
2. Если бы одно число можно было записать как степень другого числа, как бы вы назвали показатель этой степени?
3. Верно ли заключить, что логарифм числа b по основанию a на самом деле является показателем степени?

Допустимые ошибки и рекомендации по их устранению

Наблюдаются трудности при восприятии понятия логарифма. Чтобы выйти из этой ситуации, рекомендуется разобрать с учащимися больше простейших примеров.

Домашнее задание

1 (d, e, f), 2 (b), 3 (b, c), 4 (b, d), 5 (b, d, f, h)

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

Понятие логарифма

Пример 1. Решите уравнение $3^x = 27$.

Решение.

$3^x = 3^3 \Rightarrow x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

Пример 2. Решите уравнение $2^x = 5$.

Это уравнение имеет корень. Но значение этого корня не является рациональным. Для выражения корней уравнений такого вида введено понятие логарифма. Корень заданного уравнения есть величина, обозначаемая как $\log_2 5$ и называемая логарифмом числа 5 по основанию 2. Значит, корень $x = \log_2 5$.

Ответ: $x = \log_2 5$.

В общем случае, корень уравнения $a^x = b$ равен $x = \log_a b$. Здесь $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Определение

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в который нужно возвести a, чтобы получить b. Логарифм числа b по основанию a (для краткости, логарифм b по a) обозначается через $\log_a b$. При этом a называется основанием логарифма, b – подлогарифмическим выражением.

Пример 3. Вычислите по определению значения выражений.

a) $\log_2 32$; b) $\log_3 \frac{1}{9}$; c) $\lg 100$; d) $\ln e^3$.

Решение.

a) $\log_2 32 = 5$; $2^5 = 32$ b) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$; $3^{-2} = \frac{1}{9}$

c) $\lg 100 = 2$; $10^2 = 100$ d) $\ln e^3 = 3$; $e^3 = e^3$

Ответ: a) 5; b) –2; c) 2; d) 3.

Выражение $\log_{10} b$ для краткости обозначается через $\lg b$ и называется десятичным логарифмом.

Выражение $\log_e b$ для краткости обозначается через $\ln b$ и называется натуральным логарифмом.

Итак, $\lg b = \log_{10} b$ и $\ln b = \log_e b$.

Если подставить корень $\log_a b$ вместо неизвестного x в уравнении $a^x = b$, то получается равенство

$$a^{\log_a b} = b, \qquad (a > 0, a \neq 1, b > 0)$$

называемое ***основным логарифмическим тождеством.***

Рассмотрим действительное число a, удовлетворяющее условиям $a > 0$ и $a \neq 1$. Функция вида $y = \log_a x$ называется логарифмической функцией.

Например, функции вида $y = \log_2 x$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $y = \lg x$, $y = \ln x$ являются логарифмическими функциями.

Логарифмические функции обладают следующими свойствами:

● Область определения логарифмической функции $y = \log_a x$ состоит из множества всех положительных действительных чисел: $D(y) = (0; +\infty)$.

● Множество значений логарифмической функции $y = \log_a x$ состоит из множества всех положительных действительных чисел: $E(y) = (-\infty; +\infty)$.

● Логарифмическая функция $y = \log_a x$ пересекает ось Ox в точке (1;0).

● Логарифмическая функция $y = \log_a x$ не пересекается с осью Oy.

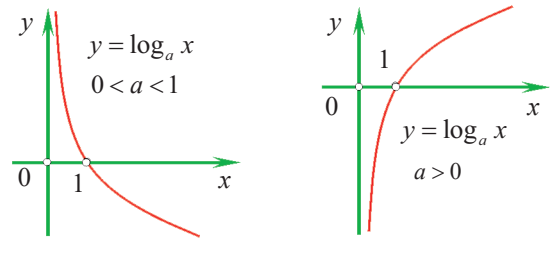
● Логарифмическая функция не является периодической.

● Логарифмическая функция не является ни чётной, ни нечётной.

● Функция $y = \log_a x$ убывает при a, $0<a<1$: Интервал убывания $(0; +\infty)$.

● Функция $y = \log_a x$ возрастает при a, $a > 1$: Интервал возрастания $(0; +\infty)$.

Рисунок 1



Функция логарифмического графа

Пример 6. Сравните a) $\log_{0,3} 7$ и $\log_{0,3} 8$

b) $\log_7 0{,}28$ и $\log_7 0{,}31$.

Решение.

a) Так как функция $y = \log_{0,3} x$ – убывающая и $7 < 8$, то $\log_{0,3} 7 > \log_{0,3} 8$.

b) Поскольку функция $y = \log_7 x$ – возрастающая и $0{,}28<0{,}31$, то $\log_7 0{,}28 < \log_7 0{,}31$.

Пример 7. Определите область определения функции $y=\log_7\left(x^2-5x+6\right)$.

Решение. Подлогарифмическое выражение должно быть положительным. Поэтому

$$x^2-5x+6>0\Rightarrow\left(x-2\right)\left(x-3\right)>0\Rightarrow x\in\left(-\infty;2\right)\cup\left(3;\infty\right)$$

Ответ: $D\left(y\right)=\left(-\infty;2\right)\cup\left(3;\infty\right)$.

Пример 8. Найдите область определения функции $y=\log_{4-x}\left(x^2-9\right)$.

Решение.

$$\begin{cases}4-x>0\\4-x\neq1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<4\\x\neq3\end{cases}\qquad x^2-9>0\Rightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(3;\infty)$$

Ответ: $D\left(y\right)=\left(-\infty;-3\right)\cup\left(3;4\right)$.

ПРИМЕРЫ

1. Определите, являются ли данные функции возрастающими или убывающими.

a) $y=\log_{0,075}x$ b) $y=\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}x$ c) $y=\lg x$

d) $y=\log_{11}x$ e) $y=-\log_{\frac{1}{e}}x$ f) $y=-\log_{\pi}x$

2. Сравните.

a) $\log_e 0,5$ и $\log_e 0,35$ b) $\log_{0,1}100$ и $\log_{0,1}101$ c) $\log_{\frac{\sqrt{15}}{4}}\sqrt{37}$ и $\log_{\frac{\sqrt{15}}{4}}6$

3. Расположите числа в порядке возрастания.

a) $a=\log_{\frac{1}{5}}10,\ b=\log_{\frac{1}{5}}15,\ c=\log_{\frac{1}{5}}20$

b) $a=\log_2 5,\ b=\log_{\frac{1}{4}}3,\ c=\log_{\frac{1}{2}}3$

c) $a=\log_{\frac{1}{6}}4,\ b=\log_{\frac{1}{5}}6,\ c=\log_{\frac{1}{5}}4$

4. Проверьте правильность утверждений, подставляя числа.

a) Если $a>1$ и $b>1$, то $\log_a b>0$

b) Если $0<a<1$ и $0<b<1$, то $\log_a b>0$

c) Если $a>1$ и $0<b<1$, то $\log_a b<0$

d) Если $0<a<1$ и $b>1$, то $\log_a b<0$

5. Какие из данных чисел положительны?

a) $a=\log_{0,2}8$ b) $b=\log_3 0,8$ c) $c=\log_{0,9}9$

d) $d=\log_4 2$ e) $p=\log_{0,9}0,6$ f) $l=\log_{1,2}\frac{3}{8}$

g) $z=\log_{0,02}0,001$ h) $p=\log_{|-13,08|}2022$ i) $q=\log_{|-3|}3$

6. Покажите, что графики функций $y=\log_2 x$ и $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ симметричны относительно оси абсцисс.

7. Найдите область определения функции.

a) $y=\log_4 x$ b) $y=\log_2(x-1)$

c) $y=\log_3(x^2-2x-3)$ d) $y=\log_4(x^2-4)$

e) $y=\lg(3-x)$ f) $y=-\log_2(x^2+5x-6)$

Решение: c) $x^2+5x-6>0\Rightarrow(x-1)(x+6)>0\Rightarrow x\in(-\infty;-6)\cup(1;\infty)$

Ответ: $D(y)=(-\infty;-6)\cup(1;\infty)$

8. Постройте график функции.

a) $y=\log_3 x$ b) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ c) $y=\lg x$ d) $y=\ln x$

9. Найдите область определения функции.

a) $y=\log_{x^2}(4-x)$ b) $f(x)=\log_{x^2}(x-1)+\sqrt{2-x}$

c) $f(x)=\sqrt{9-x^2}+\lg(x-1)-\sqrt{x}$ d) $f(x)=\sqrt{x+4}+\log_2(x^2-4)$

e) $f(x)=\dfrac{\log_{x^2+1}(6-x)}{\sqrt{x+2}}$ f) $y=\sqrt{2+\log_{\frac{1}{2}}(3-x)}$

Решение: $\begin{cases}x+4\geq 0\\ x^2-4>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq -4\\ (x-2)(x+2)>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq -4\\ x\in(-\infty;-2)\cup(2;\infty)\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-4;-2)\cup(2;\infty)$

Ответ: $x\in[-4;-2)\cup(2;\infty)$.

10. Постройте график функции.

a) $y=\log_2(x-1)$ b) $y=\log_3(5x+1)$ c) $y=\log_4(1-x)$

d) $y=\lg(x-3)$ e) $y=\log_6(3x-2)$ f) $y=1-\ln x$

g) $y = \log_8 x - 4$ m) $y = \lg x + 3$ n) $y = \log_6(x-2) - 1$

11. Во скольких точках пересекаются графики функций?

a) $y = \log_2 x;\quad y = -x + 1$ b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x;\quad y = 2x - 5$ c) $y = \log_{\frac{1}{2}} x;\quad y = 4x^2$

d) $y = \log_3 x;\quad y = 2 - \frac{1}{3}x^2$ f) $y = 2^x;\quad y = \log_{0,5} x$ g) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x;\quad y = \log_3 x$

ОТВЕТЫ

1. **a)** Убывающая **b)** Убывающая

c) Растущая **d)** Растущая

e) Растущая **f)** Убывающая

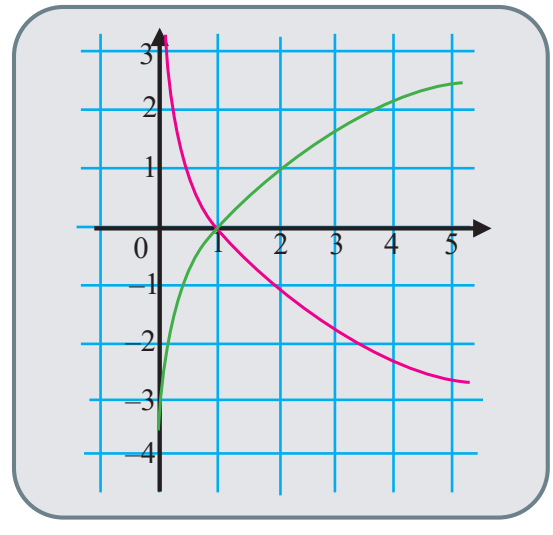
2. **a)** $(0;\infty)$ **b)** $(-1;\infty)$

c) $(-\infty;0)$ **d)** $(2;\infty)$

3. **a)** $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}} < 1;$ **b)** $3,2^{-\sqrt{2}} < 1;$

c) $0,7^{\frac{\sqrt{5}}{9}} < 0,7^{\frac{1}{6}};$ **d)** $5^{-\sqrt{13}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{2,1}.$

6.

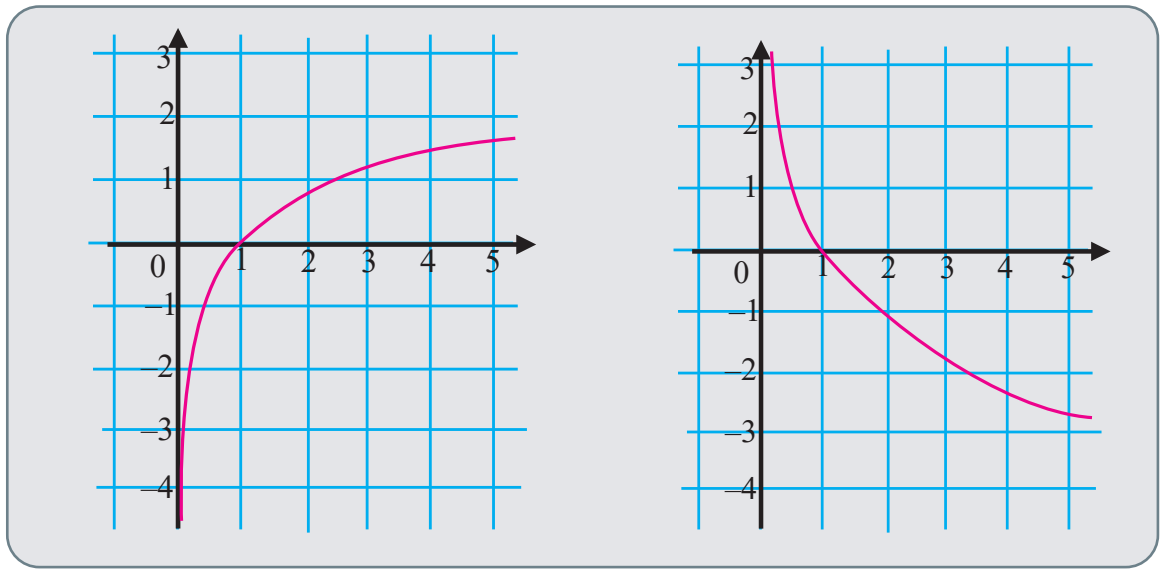


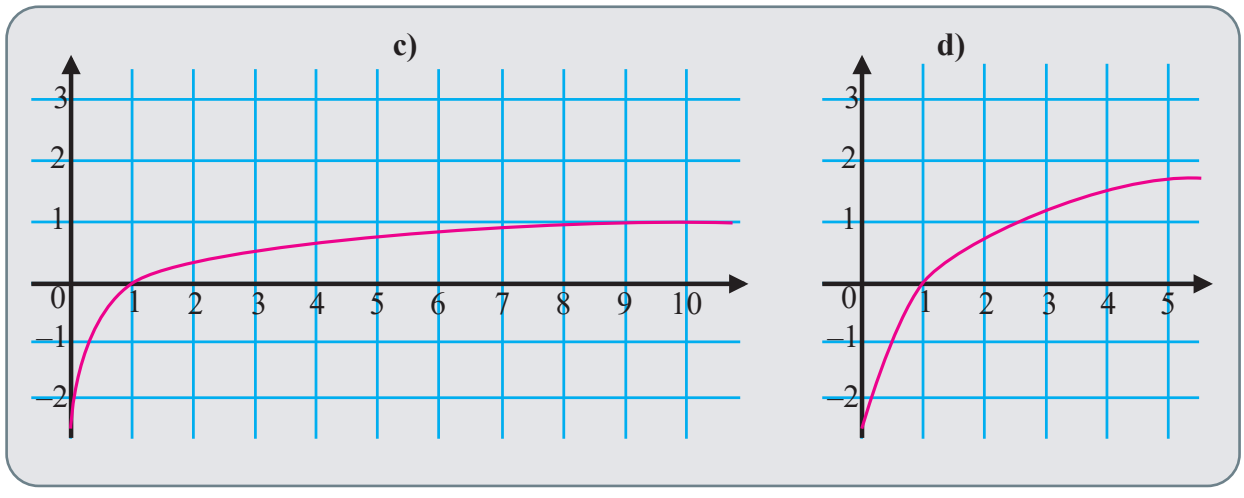
4. **a)** $3\sqrt{3}$ **b)** 27 **c)** $64^{-2\sqrt{2}}$ **d)** 25

5. **a)** c^3 **b)** b **c)** $\sqrt[4]{6^2}$ **d)** $\frac{y^{1,5}}{6}$

7. **a)** $(0;\infty)$ **b)** $(1;\infty)$ **c)** $(-\infty;-1)\cup(3;\infty)$ **d)** $(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$ **e)** $(-\infty;3)$ **f)** $(-\infty;-6)\cup(1;\infty)$

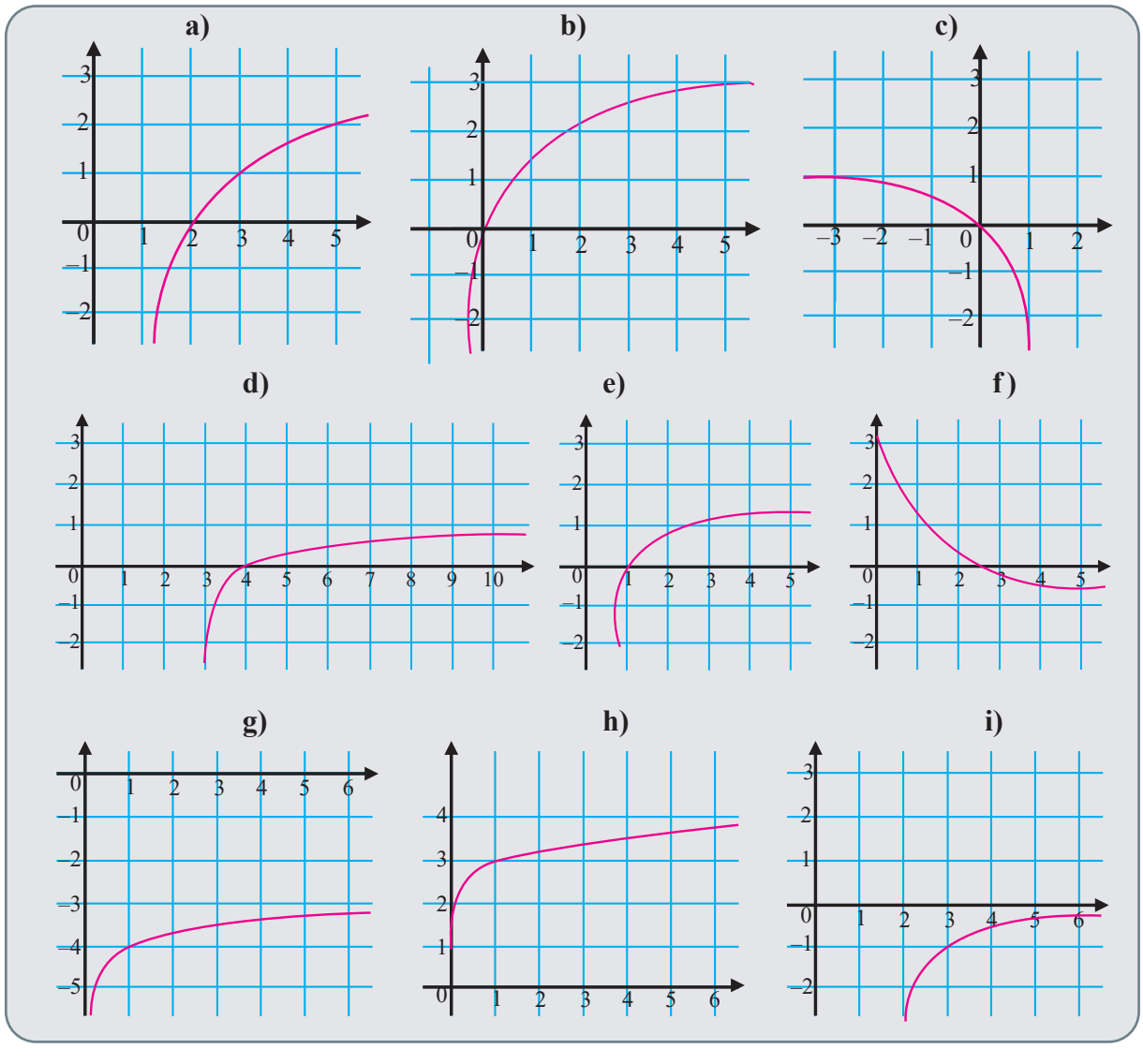
8. **a)** **b**





9. **a)** $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;4)$ **b)** $(1;2]$ **c)** $(1;3]$ **d)** $[-4;-2)\cup(2;\infty)$ **e)** $(-2;0)\cup(0;6)$ **f)** $[1;3)$

10.



11. **a)** в 1 **b)** в 1 **c)** в 1 **d)** в 1 **e)** в 1 **f)** в 1

ТОЖДЕСТВЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Цель урока: Научить подставляют логарифмические выражения.

Все учащиеся	Знают логарифмические тождества.
Большинство учащихся	Объясняют смысл логарифмических тождеств.
Некоторые учащиеся	Могут применять логарифмические тождества при решении задач.

Активизирующие вопросы

1. Из равенства $a^0 = 1$, справедливого для каждого действительного числа a, извлекайте равенство $\log_a 1 = 0$ при $a > 0$.

2. Из равенств $a^n a^m = a^{n+m}$, $b = a^{\log_a b}$, $c = a^{\log_a c}$ и $bc = a^{\log_a (bc)}$, справедливого для каждых $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ и $c > 0$, заметьте равенство $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$.

3. Какие показательные тождества предпочитаете применять для установления равенства $\log_a b^k = k \log_a b$?

Допустимые ошибки и рекомендации по их устранению

Наблюдаются трудности при систематическом применении показательных тождеств и определения логарифма (т. е. основного логарифмического тождества $b = a^{\log_a b}$). Рекомендуется сформировать у учащихся навыки работы с основным логарифмическим тождеством $b = a^{\log_a b}$ – определением логарифма.

Домашнее задание

Примеры 1 (b, d, f, h), 2 (b, d, f, h), 3 (b, d, f), 4 (b, d), 5 (b, d).

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

Из определения логарифма вытекают следующие его свойства:

1°. $\log_a 1 = 0$.

2°. $\log_a a = 1$.

3°. $a^{\log_a b} = b$.

4°. Логарифм произведения равен сумме логарифмов множителей:

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c.$$

5°. Логарифм частного равен разности логарифмов делимого и делителя:

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c.$$

6°. Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания: $\log_a b^p = p\log_a b$.

7°. Формула перехода из одного основания в другое: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

8°. Из свойств 1 и 7 вытекает равенство: $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

9°. Из свойств 7 и 8 вытекает равенство: $\log_{a^k} b = \dfrac{1}{k}\log_a b$.

10°. Из свойств 5 и 8 вытекает равенство: $\log_{a^k} b^p = \dfrac{p}{k}\log_a b$.

Пример 1. Вычислите $\log_3 18 + \log_3 \dfrac{1}{54}$.

Решение.

$$\log_3 18 + \log_3 \frac{1}{54} = \log_3\left(18\cdot\frac{1}{54}\right) = \log_3 \frac{1}{3} = -1$$

Ответ: –1.

Пример 2. Вычислите $3\log_2 8 - 2\log_3 9$.

Решение.

$$3\log_2 8 - 2\log_3 9 = 3\log_2 2^3 - 2\log_3 3^2 = 3\cdot 3\cdot\log_2 2 - 2\cdot 2\cdot\log_3 3 = 9\cdot 1 - 4\cdot 1 = 5$$

Ответ: 5.

Пример 3. Вычислите $10^{1+\lg 5}$.

Решение.

$$10^{1+\lg 5} = 10^1\cdot 10^{\lg 5} = 10\cdot 5 = 50$$

Ответ: 50.

Пример 4. Вычислите $\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}$.

Решение.

$$\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5} = \log_2 \log_5 5^{\frac{1}{8}} = \log_2\left(\frac{1}{8}\cdot\log_5 5\right) = \log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3\log_2 2 = -3$$

Ответ: –3.

Пример 5. Вычислите $2^{\log_4\left(2-\sqrt{3}\right)^2} + 3^{\log_9\left(2+\sqrt{3}\right)^2}$.

Решение.

$$2^{\log_4\left(2-\sqrt{3}\right)^2} + 3^{\log_9\left(2+\sqrt{3}\right)^2} = 2^{\log_{2^2}\left(2-\sqrt{3}\right)^2} + 3^{\log_{3^2}\left(2+\sqrt{3}\right)^2} = 2^{\frac{1}{2}\cdot 2\log_2\left(2-\sqrt{3}\right)} + 3^{\frac{1}{2}\cdot 2\log_3\left(2+\sqrt{3}\right)} =$$

$$= 2^{\log_2\left(2-\sqrt{3}\right)} + 3^{\log_3\left(2+\sqrt{3}\right)} == 2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3} = 4.$$

Ответ: 4.

ПРИМЕРЫ

1. Найдите значения логарифмических выражений.

a) $\log_2 4$ b) $\log_2 1$ c) $\log_2 16$ d) $\log_4 16$

e) $\log_2 64$ f) $\log_8 64$ g) $\log_4 64$ h) $\log_{64} 64$

2. Найдите значения логарифмических выражений.

a) $\log_5 25$ b) $\log_2 18$ c) $\log_{12} 4$ d) $\log_{10}(0{,}001)$

e) $\log_9 3$ f) $\lg 1000$ g) $\ln e$ h) $\lg\left(\frac{1}{100}\right)$

3. Вычислите.

a) $\log_2 8 + \log_2 4$ b) $\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2}$ c) $\log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16}$

d) $\log_{\frac{1}{3}} 54 - \log_{\frac{1}{3}} 2$ e) $\log_{0,2} 75 - \log_{0,2} 3$ f) $\log_{36} 9 + \log_{36} 4$

4. Какое из следующих чисел не равно остальным трём?

a) $m = 2\log_2 8 - \log_2 4$ b) $n = \log_2 400 - 2\log_2 5$

c) $p = \log_5 125 + \log_5 5$ d) $q = \ln 12e - \ln 2$

5. Какие из чисел меньше 2?

a) $M = \log_5 100 - \log_5 4$ b) $N = 4\log_2 3 - \log_2 9$

c) $P = \log_6 72 - \log_6 2$ d) $Q = \log_4 16 + \log_4 \frac{1}{8}$

6. Вычислите.

a) $3 - \lg 50 + \frac{1}{2}\lg 25$ b) $\log_2 32 + \log_{32} 2$ c) $\frac{\log_4 13 + \log_4 25}{\log_{64} 325}$

d) $\frac{\log_4 11 + \log_4 23}{\log_8 253}$ e) $\frac{1}{\log_8 12} + \frac{1}{\log_{18} 12}$. f) $\frac{1}{\log_{45} 15} + \frac{1}{\log_5 15}$

7. Вычислите.

a) $81^{\log_3 5}$ b) $4^{-2\log_{\frac{1}{4}} 3}$ c) $32^{\log_8 27}$

d) $121^{\log_{11} 12}$ e) $3\log_{\sqrt{8}} 2 + 2^{-2\log_{\frac{1}{2}} 2}$ f) $3\log_{\sqrt{64}} 4 + 4^{-2\log_{\frac{1}{4}} 3}$

8. Вычислите значение выражения в заданном значении a.

a) $3\log_{_} a,\ a=2\cos\frac{\pi}{6}$ b) $3\log_{\frac{1}{3}} a,\ a=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$ c) $4\log_3 a,\ a=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$

9. Вычислите.

a) $\log_{\frac{1}{3}}\log_3 27$ b) $\log_4\log_3\sqrt{81}$ c) $\log_3^2\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{125}$

10. Вычислите.

a) $\dfrac{2\log_3 12-4\log_3^2 2+\log_3^2 12+4\log_3 2}{3\log_3 12+6\log_3 2}$

b) $\dfrac{\log_2^2 28+\log_2 28\cdot\log_2 7-2\log_2^2 7}{\log_2 28+2\log_2 7}$

c) $\dfrac{\log_{35}^2 7-2\log_{35}7\cdot\log_{45}5-3\log_{35}^2 7}{2\left(\log_{35}7-3\log_{35}5\right)}$

d) $\dfrac{\log_2^2 12-2\log_2 12+2\log_2^2 3-3\log_2 3\cdot\log_2 12+4\log_2 3}{\log_2 12-2\log_2 3}$

Решение. d) Здесь $\log_2 12=\log_2\left(4\cdot 3\right)=\log_2 2^2+\log_2 3=2+\log_2 3$. Поэтому,

$$\frac{\log_2^2 12-2\log_2 12+2\log_2^2 3-3\log_2 3\cdot\log_2 12+4\log_2 3}{\log_2 12-2\log_2 3}=$$

$$=\frac{\left(2+\log_2 3\right)^2-2\left(2+\log_2 3\right)+2\log_2^2 3-3\log_2 3\cdot\left(2+\log_2 3\right)+4\log_2 3}{2+\log_2 3-2\log_2 3}=$$

$$=\frac{4+4\log_2 3+\log_2^2 3-4-2\log_2 3+2\log_2^2 3-6\log_2 3-3\log_2^2 3+4\log_2 3}{2-\log_2 3}=\ =\frac{0}{2-\log_2 3}=0$$

Ответ: 0

11. Найдите область определения функции

a) $y=\log_2(x+3)$ b) $y=\log_{0,2}(x^2-4x)$

c) $y=\log_{0,7}\left(2x-\dfrac{1}{8}\right)$ d) $y=\log_2\left(5-3x\right)$

12. Найдите значения a.

a) Если $a=\log_2 3$, то $\log_{36}108=?$ b) Если $a=\log_7 3$, то $\log_{147}63=?$

c) Если $a=\log_{288}72$, то $\log_3 2=?$ d) Если $a=\log_{441}189$, то $\log_3 7=?$

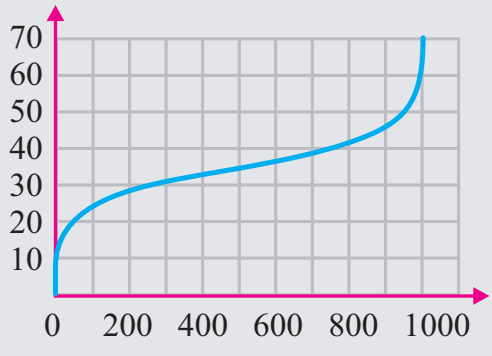
Решение. $\log_{36} 108 = \log_{36}(36\cdot 3) = \log_{36} 36 + \log_{36} 3 = 1 + \dfrac{1}{\log_3 36} = 1 + \dfrac{1}{\log_3 9 + \log_3 4} =$

$$= 1 + \frac{1}{2 + 2\log_3 2} = 1 + \frac{1}{2 + \dfrac{2}{\log_2 3}} = 1 + \frac{\log_2 3}{2\log_2 3 + 2} = 1 + \frac{a}{2a+2} = \frac{3a+2}{2a+2}$$

Ответ: $\dfrac{3a+2}{2a+2}$

13. Если одна из 1000 коров в стаде пастуха болеет инфекционной болезнью, то зависимость дней t заболеваемости n коров моделируется по формуле $t = -5\cdot \ln\left(\dfrac{1000-n}{999n}\right)$. Найдите, через сколько дней заболеют 100, 800, 1000 коров. Сделайте вывод с помощью рисунка (рис. 1).

Рисунок 1





14. Постройте график функции на основе таблиц.

a)

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \log_2 x$	−2	−1	0	1	2	3

b)

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
	2	1	0	−1	−2	−3

15. Найдите обратные данным функциям.

a) $f(x) = 10^x$ b) $f(x) = \log_3(x+1)$

$y = \log_{\frac{1}{2}} x$

c) $f(x)=2+e^{x+4}$ d) $f(x)=5+\log_2(x-3)$

Решение. d) Запишем функцию в виде $y=5+\log_2(x-3)$ и выразим x через y:

$\log_2(x-3)=y-5 \Rightarrow \log_2(x-3)=y-5 \Rightarrow x-3=2^{y-5} \Rightarrow$

$x=3+2^{y-5} \Rightarrow y=3+2^{x-5}$

Ответ: $y=3+2^{x-5}$

16. Найдите значения a и b.

a) $\log_3 b=2$ b) $\log_a 8=3$ c) $\log b^2=\lg 4$ d) $\log_a 36=2$

17. Постройте графики функций $y=\ln e^x$ и $y=e^{\ln x}$. Объясните сходство и разницу.

18. Объясните, какие преобразования выполнены над функциями на рис. 2.

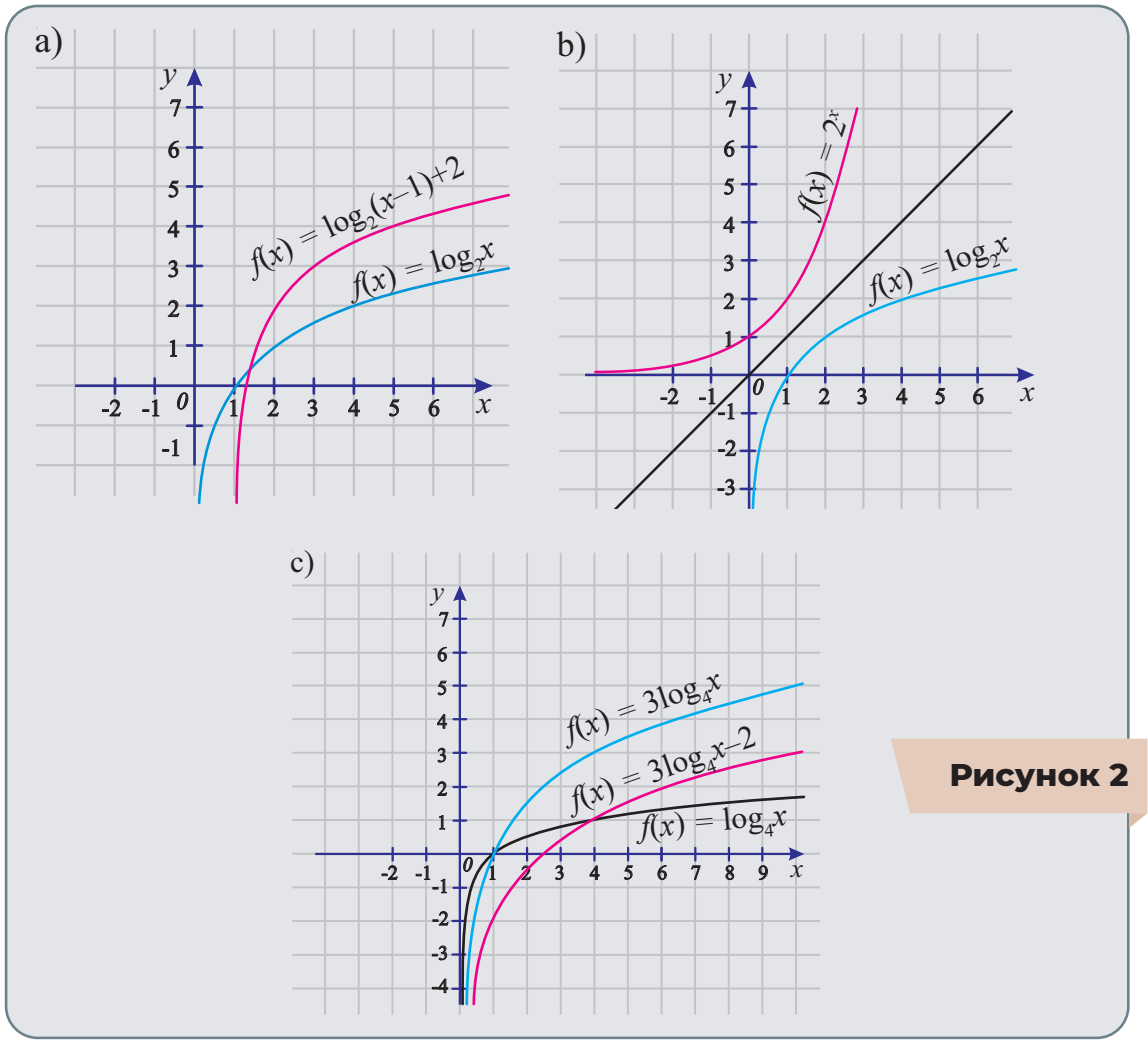


Рисунок 2

ОТВЕТЫ

1. **a)** 2 **b)** 0 **c)** 4 **d)** 2 **e)** 6 **f)** 2 **g)** 3 **h)** 1

2. **a)** 2 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{2}{7}$ **d)** –3 **e)** $\frac{1}{2}$ **f)** 3 **g)** 1 **h)** –2

3. **a)** 5 **b)**2 **c)**4 **d)** –3 **e)** –2 **f)** 1

4. d.

5. d.

6. **a)** 2 **b)** 5,2 **c)** 3 **d)** 1,5 **e)** 2 **f)** 2

7. **a)** 4 **b)** 9 **c)** 243 **d)** 144 **e)** 6 **f)** 11

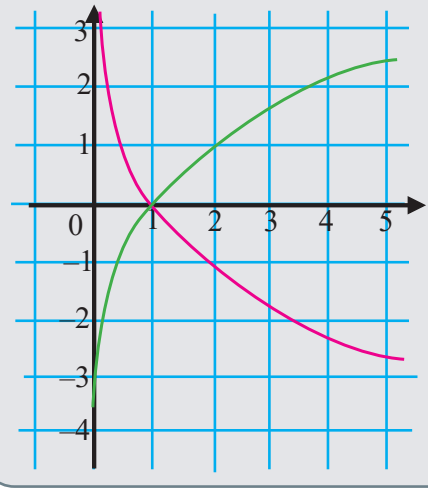
8. **a)** -1,5 **b)** -1,5 **c)** 2 **9.** **a)**-1 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)**1

10. **a)** 1 **b)** 2 **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** **0**

11. **a)** $x > -3$ **b)** $(-\infty;0)\cup(4;\infty)$ **c)** $x > \frac{1}{16}$ **d)** $x < \frac{5}{3}$

12. **a)** $\frac{2+3a}{2+2a}$ **b)** $\frac{1+2a}{2+a}$ **c)** $\frac{2-2a}{5a-3}$ **d)** $\frac{2a-3}{1-2a}$

14.



15. **a)** $y = \lg x$ **b)** $y = 3^x - 1$ **c)** $y = \ln(x-2) - 4$ **d)** $y = 2^{x-5} + 3$

16. **a)** b=9 **b)** a=2 **c)** b=2 **d)** a=6

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Цель урока: Научить решать элементарные показательные, логарифмические уравнения, системы показательных и логарифмических уравнений, показательные неравенства; уравнения и неравенства и их системы, проверять решение.

Все учащиеся	Умеют решать элементарные показательные, логарифмические уравнения.
Большинство учащихся	Умеют решать показательные, логарифмические уравнения, системы показательных и логарифмических уравнений, показательные неравенства.
Некоторые учащиеся	Умеют решать показательные, логарифмические уравнения и неравенства и их системы, проверяют решение.

Активизирующие вопросы

1. Что такое логарифм?
2. Какие свойства логарифма вы знаете?
3. Какое уравнение называют логарифмическим? Приведите пример.
4. Составьте алгоритм решения логарифмического уравнения.

Допустимые ошибки и рекомендации по их устранению

Незнание алгоритма решения логарифмического уравнения; допущение преобразования между неравносильными выражениями. Рекомендуется развивать у учащихся навыки работы с логарифмическими тождествами.

Домашнее задание

Примеры **1 (b, d, f, h), 2 (b, d, f, h, j, l, n), 3.**

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

При $a > 0$, $a \neq 1$ уравнение вида $\log_a x = b$ будет простейшим логарифмическим уравнением. Корнем этого уравнения будет $x = a^b$.

Для решения логарифмических уравнений используется правило:

При $a > 0$, $a \neq 1$ корни уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ состоят из корней уравнения $f(x) = g(x)$, удовлетворяющих условию $f(x) > 0$ (или $g(x) > 0$).

Ниже приведены примеры решения логарифмических уравнений.

Пример 1. Решите уравнение $\log_5 x = -2$.

Решение.

При решении уравнения используем определение логарифма под условием $x > 0$

$$\log_5 x = -2 \Rightarrow x = 5^{-2} \Rightarrow x = \frac{1}{25}$$

Так как $x = \frac{1}{25} > 0$, найденное значение неизвестной будет корнем заданного уравнения.

Ответ: $x=\frac{1}{25}$.

Пример 2. Решите логарифмическое уравнение $\log_3\left(x^2-4\right)=\log_3\left(5x-8\right)$.

Решение.

Находим область определения.

$$\begin{cases}x^2-4>0\\5x-8>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-2)(x+2)>0\\5x>8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in(-\infty;-2)\cup(2;\infty)\\x>1,6\end{cases}\Rightarrow x\in(2;\infty)$$

Теперь решаем уравнение $x^2-4=5x-8$:

$$x^2-5x+4=0\ \Rightarrow\ (x-1)(x-4)=0\ \Rightarrow\ x_1=1,\ x_2=4.$$

Значение $x=x_1=1$ неизвестной не принадлежит интервалу $(2;\infty)$, а значение $x=x_2=4$ принадлежит. Таким образом значение $x_1=1$ – посторонний корень, $x_2=4$ – корень.

Ответ: $x=4$.

ПРИМЕРЫ

1. Решите логарифмические уравнения.

a) $\log_2 x=-3$ b) $\log_4 2x=\frac{1}{2}$ c) $\lg\frac{5x}{2}=1$

d) $\log_{\frac{1}{4}} x=-2$ e) $\log_3\left(3x-1\right)=2$ f) $\log_7\left(x+3\right)=2$

g) $\log_9 x^3+\log_{\sqrt{3}} x=3$ h) $\log_4\left(2x-3\right)=4$ i) $\log_2 x-2\log_{\frac{1}{2}} x=9$

Решение. g) Область определения: $x>0$

$$\log_{3^2} x^3+\log_{3^{\frac{1}{2}}} x=3\ \Rightarrow\ \frac{3}{2}\log_3 x+2\log_3 x=3\ \Rightarrow\ \log_3 x=\frac{6}{7}\ \Rightarrow\ \log_3 x=\frac{6}{7}$$

$$\Rightarrow\ x=3^{\frac{6}{7}}=\sqrt[7]{3^6}=\sqrt[7]{729}.$$

Ответ: $x=\sqrt[7]{729}$

2. Решите логарифмические уравнения.

a) $\log_5 x=2\log_5 3+4\log_{25} 2$ b) $\log_{\frac{1}{2}}\left(7-8x\right)=2$

c) $\log_2 x+\log_8 x=0$ d) $\log_3 x=9\log_{27} 8-3\log_3 4$

e) $\log_{0,5}\left(3x+1\right)=-2$ f) $\log_{0,2}\left(x+3\right)=-1$

g) $\log_{0,25}\left(x+30\right)=-2$ h) $\log_{\sqrt{3}}\left(1-2x\right)=4$

i) $\log_2\sqrt{x-1}=1$ j) $\log_3\left(x^2-4x+3\right)=\log_3\left(3x+21\right)$

k) $\log_3\left(2x-5\right)=\log_3\left(20-3x\right)$ l) $\log_7\left(9x-1\right)=\log_7 x$

m) $\log_3\left(2x^2-3x\right)=2\log_3 x$ n) $\lg\left(2x\right)=2\lg\left(4x-15\right)$

3. $\lg(3x-11)+\lg(x-27)=3$

4. $\log_{81} x-2\log_3 x+5\log_9 x=1{,}5$

5. $\log_3\big((x-1)(2x-1)\big)=0$

6. $3\lg x^2-\lg^2 x=9$

$6\lg x-\lg^2 x=9$

$\lg^2 x-6\cdot\lg x+9=0$

$(\lg x-3)^2=0$

$\lg x=3$

$x=10^3=1000$

Ответ: $x=1000$

7. $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x^2+4x}{2x-3}=1$

8. $\log_{\frac{3}{4}}\dfrac{2x-1}{x+2}=1$

9. $\log_\pi\big(\log_2(\log_3 3x)\big)=0$

10. $\log_2^2 x+3=\log_2 x^2$

11. $(x^2-6x-7)\log_2(3x-1)=0$

Решение. Область определения: $3x-1>0\Rightarrow x>\dfrac{1}{3}$

$x^2-6x-7=0$ или $\log_2(3x-1)=0$

$x_1=7;x_2=-1$ $\qquad$ $\log_2(3x-1)=\log_2 1$

$3x-1=1$

$x=\dfrac{2}{3}$

Значение $x_2=-1$ не входит в область определения.

Ответ: $x_1=7;x_2=\dfrac{2}{3}$

12. $(x^2-2x-15)\lg(4x-3)=0$

13. $\log_5(x+4)-\log_5(1-2x)=-\log_5(2x+3)$

14. $\log_2^2 x-5\log_2 x=4$

15. $\log_3 x+\log_x 9=3$

16. $\log_{x+2}7+3\log_7(x+2)=4$

17. $\log_3 x\cdot\log_9 x\cdot\log_{27} x\cdot\log_{81} x=\dfrac{2}{3}$

18. $\log_5\sqrt{x-9}+\log_5\sqrt{2x-1}=\log_5 10$

ОТВЕТЫ

1. a) $x=\frac{1}{8}$; b) $x=1$; c) $x=4$; d) $x=16$; e) $x=3\frac{1}{3}$; f) $x=46$; g) $x=\sqrt[7]{729}$; h) $x=129{,}5$; i) $x=8$.

2. a) $x=36$; b) $x=\frac{27}{32}$; c) $x=1$; d) $x=8$; e) $x=1$; f) $x=2$; g) $x=-14$; h) $x=-4$; i) $x=5$; j) $x_1=-2; x_2=9$; k) $x=5$; l) $x=\frac{1}{8}$; m) $x=3$; n) $x=4{,}5$.

3. $x=37$. **4.** $x=9$.

5. $x_1=0; x_2=1{,}5$ **6.** $x=1000$. **7.** $x_1=-3; x_2=-\frac{1}{3}$. **8.** $x=2$.

9. $x=3$. **10.** $\varnothing$. **11.** $x_1=7; x_2=\frac{2}{3}$ **12.** $x_1=1; x_2=5$

13. $x=-1$ **14.** $x_1=2^{\frac{5+\sqrt{41}}{2}}; x_2=2^{\frac{5-\sqrt{41}}{2}}$

15. $x_1=3; x_2=9$ **16.** $x_1=\sqrt[3]{7}-2; x_2=5$

17. $x_1=\frac{1}{9}; x_2=9$ **18.** $x=13$.

СИСТЕМЫ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Цель урока: Научить решать элементарные показательные, логарифмические уравнения, системы показательных и логарифмических уравнений, показательные неравенства; уравнения и неравенства и их системы, проверять решение.

Все учащиеся	Умеют решать элементарные показательные, логарифмические уравнения.
Большинство учащихся	Умеют решать показательные, логарифмические уравнения, систем показательных и логарифмических уравнений, показательные неравенства.
Некоторые учащиеся	Умеют решать показательные, логарифмические уравнения и неравенства и их системы, проверяют решение.

Активизирующие вопросы:

1. Сформулируйте алгоритм решения показательного уравнения.
2. Сформулируйте алгоритм решения логарифмического уравнения.
3. Что такое решение системы уравнений?
4. Приведите свойства показательной функции.

Допустимые ошибки и рекомендации по их устранению

Замена выражений с не равносильными им выражениями. Рекомендуется развивать у учащихся навыки работы с показательными и логарифмическими тождествами.

Домашнее задание

Примеры **1(b, d, f, h), 2(b, d, f, h, j, l, n), 3 (b, d, f),**

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

Система показательных уравнений и её решение

Система уравнений, в которую входят уравнения с показательным выражением, называется системой показательных уравнений. Система показательных уравнений бывает в различных формах. Решение каждой такой системы требует индивидуального подхода. При этом широко используются свойства показательных и логарифмических выражений.

Пример 1. Решите систему $\begin{cases} 3^x = 9^{y+1}, \\ 4y = 5 - x \end{cases}$.

Решение.

Воспользуемся $9 = 3^2$. Тогда $3^x = 3^{2(y+1)}$, отсюда $x = 2y + 2$. Во втором уравнении в системе, вместо x подставляя $2y + 2$, найдём значение y:

$4y = 5 - (2y + 2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}$.

Теперь в равенстве $x = 2y + 2$, вместо y подставив его значение, найдём значение $x = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \Rightarrow x = 3$.

Ответ: $\left(3;\ \frac{1}{2}\right)$.

Пример 2. Решите систему $\begin{cases} 9^{x+y} = 729, \\ 3^{x-y-1} = 1 \end{cases}$.

Решение.

Воспользуемся $729 = 9^3$ и $1 = 3^0$. Тогда

$$\begin{cases} 9^{x+y} = 9^3, \\ 3^{x-y-1} = 3^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3, \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow (2;\ 1).$$

Ответ: (2; 1).

Система логарифмических уравнений и её решение

Система, содержащая уравнения с логарифмическим выражением, называется системой логарифмических уравнений. Система логарифмических уравнений, как и система показательных уравнений, имеет множество видов. При решении каждого из них применяются свойства показательных и логарифмических выражений и требуется особый подход.

Пример 5. Решите систему $\begin{cases} \log_9 \frac{x^2}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2}, \\ \log_3 xy = 3 \end{cases}$.

Решение.

Для того чтобы логарифмические выражения в системе имели смысл, требуется решение следующих неравенств:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{y}} > 0, \\ xy > 0 \end{cases}.$$

Неравенство $\frac{x^2}{\sqrt{y}} > 0$ справедливо только в том случае, когда $y > 0$ и $x \neq 0$. Следовательно, из второго неравенства $xy > 0$ вытекает, что $x > 0$ и $y > 0$.

Теперь при $x > 0$ и $y > 0$, применяя свойства логарифма, заданную систему можно записывать как

$$\begin{cases} \log_9 x^2 - \log_9 \sqrt{y} = \frac{1}{2}, \\ \log_3 x + \log_3 y = 3 \end{cases}.$$

Из равенств $\log_9 x^2 = \log_{3^2} x^2 = \log_3 x$ и $\log_9 \sqrt{y} = \log_{3^2} y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\log_3 y$ система будет иметь вид

$$\begin{cases} \log_3 x - \frac{1}{4}\log_3 y = \frac{1}{2}, \\ \log_3 x + \log_3 y = 3. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим: $\frac{5}{4}\log_3 y = \frac{5}{2}$, из него $\log_3 y = 2$. Из последнего равенства вытекает, что $y = 3^2 = 9$. Наконец, во втором уравнении, вместо y подставив его значение, находим неизвестное x:

$$\log_3 x + \log_3 9 = 3 \Rightarrow \log_3 x + 2 = 3 \Rightarrow \log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3.$$

Ответ: (3; 9).

Пример 6. Решите систему $\begin{cases} x^{\lg y} = 1000, \\ \log_y x = 3. \end{cases}$

Решение.

Для того чтобы логарифмические выражения в системе имели смысл, требуется выполнение условий $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$, $y \neq 1$. Прологарифмируем равенство $x^{\lg y} = 1000$ по основанию 10:

$$\lg x^{\lg y} = \lg 1000 \Rightarrow \lg y \lg x = 3.$$

Заменим основание y логарифма во втором уравнении на десятичное основание:

$$\log_y x = \frac{\lg x}{\lg y} \Rightarrow \frac{\lg x}{\lg y} = 3 \Rightarrow \lg x = 3\lg y.$$

В результате получим уравнение $\lg^2 y = 1$. Решаем его:

$$\lg y_1 = -1 \Rightarrow y_1 = 10^{-1} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{10}; \quad \lg y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 10^1 \Rightarrow y_2 = 10.$$

Из равенства $\lg x = 3\lg y$, получая зависимость $x = y^3$, найдём соответствующие значения:

$$y = \frac{1}{10} \Rightarrow x = \frac{1}{1000}$$
$$y = 10 \Rightarrow x = 1000$$

Ответ: $\left(\frac{1}{1000}; \frac{1}{10}\right)$ и (1000; 10).

ПРИМЕРЫ

1. Решите систему уравнений.

a) $\begin{cases} 3^x \cdot 7^y = 63 \\ 3^x + 7^y = 16 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 9^x - 3 \cdot 5^y = 3 \\ 9^x \cdot 5^y = 18 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3^y \cdot 2^x = 972 \\ y - x = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4^{x+y}=128 \\ 5^{3y-2x-3}=1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3^{-x}\cdot 2^{y}=1152 \\ x+y=5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2^{x}\cdot 9^{y}=648 \\ 3^{x}\cdot 4^{y}=432 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3^{x}\cdot 2^{y}=\dfrac{1}{9} \\ \dfrac{1}{9}\cdot 3^{y}=3^{x} \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2^{y}\cdot 8^{-x}=8\sqrt{2} \\ y+3x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ i) $\begin{cases} 4^{y-1}\cdot 5^{x}=6400 \\ y-x=3 \end{cases}$

Решение.

d) $\begin{cases} 4^{x+y}=128 \\ 5^{3y-2x-3}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{2(x+y)}=2^{7} \\ 5^{3y-2x-3}=5^{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y=7 \\ 3y-2x=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=7-2y \\ 3y-7+2y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1,5 \\ y=2 \end{cases}$

Ответ: $(1,5;2)$

e) $\begin{cases} 3^{-x}\cdot 2^{y}=1152 \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{-x}\cdot 2^{y}=1152 \\ x=5-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{y}\cdot 2^{y}=1152\cdot 3^{5} \\ x=5-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6^{y}=279936 \\ x=5-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6^{y}=6^{7} \\ x=5-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=7 \\ x=-2 \end{cases}$

Ответ: $(-2;7)$

f) $\begin{cases} 2^{x}\cdot 9^{y}=648 \\ 3^{x}\cdot 4^{y}=432 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{x}\cdot 3^{2y}=648 \\ 3^{x}\cdot 2^{2y}=432 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2y}=\dfrac{648}{432} \Rightarrow \\ 3^{x}\cdot 2^{2y}=432 \end{cases}$

$\begin{cases} \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2y-x}=\dfrac{3}{2} \\ 3^{x}\cdot 2^{2y}=432 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y-x=1 \\ 3^{x}\cdot 2^{2y}=432 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y-1 \\ 3^{2y-1}\cdot 2^{2y}=432 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x=2y-1 \\ 6^{2y}=432\cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y-1 \\ 2y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

Ответ: $(3;2)$

2. Решите систему уравнений.

a) $\begin{cases} \log_{7} 7x+\log_{7} y=2 \\ y-5x=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log_{2} x-\log_{2} y=4 \\ y-x=6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log_{2}\left(x^{2}+y^{2}\right)=5 \\ \log_{2} x+\log_{2} y=4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log_{3} 2x-\log_{3}\left(\dfrac{2}{y}\right)=1 \\ 4x-y=1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \log_{2} x-\log_{4} y=0 \\ \log_{4} x+\log_{2} y=5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \log_{2} 2x+\log_{2}\left(\dfrac{y}{2}\right)=-1 \\ x-y=-\dfrac{7}{4} \end{cases}$

Решение.

c) $\begin{cases}\log_2\left(x^2+y^2\right)=5\\ \log_2 x+\log_2 y=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_2\left(x^2+y^2\right)=\log_2 2^5\\ \log_2(xy)=\log_2 2^4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=32\\ xy=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+2xy+y^2=32+32\\ xy=16\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}(x+y)^2=64\\ xy=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=8\\ xy=16\\ x+y=-8\\ xy=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\ y=4\\ x=-4\\ y=-4\end{cases}$

Но пара $x=-4, y=-4$ не входит в область определения.

Ответ: $(4;4)$

d) $\begin{cases}\log_3 2x-\log_3\left(\frac{2}{y}\right)=1\\ 4x-y=1\end{cases}$ Область определения: $\begin{cases}2x>0\\ \frac{2}{y}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\ y>0\end{cases}$

$\begin{cases}\log_3 2x-\log_3\left(\frac{2}{y}\right)=1\\ 4x-y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_3\frac{2x}{\frac{2}{y}}=\log_3 3\\ y=4x-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}xy=3\\ y=4x-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x(4x-1)=3\\ y=4x-1\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}4x^2-x-3=0\\ y=4x-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\ y_1=3\\ x_2=-\frac{3}{4}\\ y_2=-4\end{cases}$

Но пара $\left(-\frac{3}{4};-4\right)$ не входит в область определения.

Ответ: $(1;3)$.

3. Решите систему уравнений.

a) $\begin{cases}3^x-2^{y^2}=77\\ 3^{\frac{x}{2}}-2^{\frac{y^2}{2}}=7\end{cases}$

b) $\begin{cases}3\cdot2^x-2^{x+y}=-2\\ 5\cdot2^{x+1}-2^{x+y+1}=4\end{cases}$

c) $\begin{cases}9^x-3\cdot2^y=3\\ 9^x\cdot5^y=18\end{cases}$

d) $\begin{cases}\lg x(\lg x+\lg y)=2\\ \lg x-\lg y=3\end{cases}$

e) $\begin{cases}3^x\cdot25^y=5625\\ 5^x\cdot9^y=2025\end{cases}$

f) $\begin{cases}3^x\cdot7^y=63\\ 3^x+7^y=16\end{cases}$

4. Найдите расстояние между числами, выражающими корни системы $\begin{cases}x^{\sqrt{y}}=y\\ y^{\sqrt{y}}=x^4\end{cases}$.

Решение.

$$\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y \\ y^{\sqrt{y}} = x^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lg x^{\sqrt{y}} = \lg y \\ \lg y^{\sqrt{y}} = \lg x^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{y}\lg x = \lg y \\ \sqrt{y}\lg y = 4\lg x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lg x = \dfrac{\lg y}{\sqrt{y}} \\ \sqrt{y}\lg y = \dfrac{4\lg y}{\sqrt{y}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lg x = \dfrac{\lg 4}{2} \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lg x = \lg 2 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

Находим расстояние между числами: $4 - 2 = 2$

Ответ: 2.

5. Найдите xy, если $(x; y)$ – корень системы $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ \log_{\sqrt{3}}(x - y) = 2 \end{cases}$.

6. Найдите $x + y$, если $(x; y)$ – корень системы $\begin{cases} x^{y+1} = 27, \\ x^{2y-5} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$.

ОТВЕТЫ

1. a) $(2;1), (\log_3 7; 2\log_7 3)$; **b)** $(1; \log_5 2)$; **c)** $(2;5)$; **d)** $(1,5;2)$;

e) $(-2;7)$; **f)** $(3;2)$; **g)** $(-2;0)$; **h)** $\left(-\frac{1}{2};2\right)$; **i)** $(2;5)$.

2. a) $(1;7)$; **b)** $\varnothing$; **c)** $(4;4)$; **d)** $(1;3)$; **e)** $(4;16)$; **f)** $\left(\frac{1}{4};2\right)$.

3. a) $\left(4;-\sqrt{2}\right), \left(4;\sqrt{2}\right)$; b) $(1;2)$; c) $(1;1)$; d) $\left(\frac{\sqrt{10}}{10};\frac{\sqrt{10}}{10000}\right), \left(100;\frac{1}{10}\right)$;

e) $(2;2)$; f) $(2;1), (\log_3 7; 2\log_7 3)$.

4. 2. **5.** 10. **6.** 5.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Цель урока: Научить решать уравнения и неравенства и их системы, проверять решение.

Все учащиеся	Умеют решать элементарные логарифмические неравенства.
Большинство учащихся	Умеют выполнять равносильные преобразования при решении логарифмических неравенств.
Некоторые учащиеся	Знают частичные способы решения логарифмических неравенств, проверяют решение.

Активизирующие вопросы

1. Что такое логарифм числа?
2. Приведите свойства логарифма.
3. Что такое внешний корень уравнения?
4. Что означает словосочетание «равносильные уравнения»?

Допустимые ошибки и рекомендации по их устранению

Встречаются случаи, когда учащиеся не обращают внимание на область определения логарифмического выражения в уравнениях и неравенствах, а также иногда выполняют преобразования неравносильных выражений. Рекомендуется развивать у учащихся навыки работы с показательными и логарифмическими тождествами.

Домашнее задание

Примеры **1**(b, d, f, h, j, l, n), **3**(b, d, f, h, j), **4**(b, d, f).

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

Логарифмические неравенства

Пусть $a > 0$ и $a \neq 1$. Тогда неравенства

$$\log_a x < b,\ \log_a x > b,\ \log_a x \leq b,\ \log_a x \geq b$$

являются логарифмическими неравенствами. При их решениях применяется монотонность функции $y = \log_a x$.

Рассмотрим неравенство $\log_a x < b$. Решением этого неравенства является множество значений переменной x, при которых график функции $y = \log_a x$ в системе координат Oxy лежит ниже прямо $y = b$.

Приведите самостоятельно геометрические интерпретации решений неравенств $\log_a x > b$, $\log_a x \leq b$, $\log_a x \geq b$.

Решение логарифмических неравенств

Решением логарифмического неравенства $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ является:

решение системы $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$ при $0 < a < 1$.

решение системы $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$ при $a > 1$.

Решения неравенств $\log_a f(x) \le \log_a g(x)$, $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ и $\log_a f(x) \ge \log_a g(x)$ можно увидеть в следующей таблице:

Виды логарифмических неравенств / Основание	$\log_a f(x) \le \log_a g(x)$	$\log_a f(x) < \log_a g(x)$	$\log_a f(x) > \log_a g(x)$	$\log_a f(x) \ge \log_a g(x)$
При $0 < a < 1$	$\begin{cases} f(x) \ge g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) \le g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$
При $a > 1$	$\begin{cases} f(x) \le g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) \ge g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Пример 1. Решите неравенство $\log_{27} x > \frac{1}{3}$.

Решение.

Область определения $x > 0$. Основание больше 1. Из определения логарифма:

$$\log_{27} x > \frac{1}{3} \Rightarrow x > 27^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x > \sqrt[3]{27} \Rightarrow x > 3 \begin{cases} x > 3 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 3 \Rightarrow x \in (3; \infty).$$

Все значения неизвестной из этого интервала лежат в области определения.

Ответ: $x \in (3; \infty)$.

Пример 2. Решите неравенство $\log_{0,5}(2x-3) > \log_{0,5}(x+1)$.

Решение.

Учитывая, что основание меньше 1, приведём неравенство к равносильной ему системе, а затем решим систему:

$$\begin{cases} 2x-3 < x+1 \\ 2x-3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > 1,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > 1,5 \end{cases} \Rightarrow x \in (1,5; 4)$$

Ответ: (1,5; 4).

Неравенство вида $A \cdot \log_a^2 x + B \cdot \log_a x + C < 0$ решается приведением его в квадратное уравнение введением обозначения $\log_a x = t$.

Пример 4. Решите неравенство $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 \le 0$.

Решение.

Область определения $x > 0$. Введём обозначение $\log_3 x = t$. Тогда получится квадратное неравенство $t^2 - 3t + 2 \le 0$.

Решаем его: $(t-1)(t-2) \le 0, \Rightarrow 1 \le t \le 2$.

Согласно обозначению $1 \le \log_3 x \le 2 \Rightarrow 3 \le x \le 9$. **Ответ:** $[3; 9]$

ПРИМЕРЫ

1. Решите неравенства

a) $\log_2 x > 3$ b) $\log_{0,5} x > 2$ c) $\log_2 8 > x$

d) $\log_5 x > 3$ e) $\log_3 x > 4$ f) $\log_3 x \geq \log_6 36$

g) $\log_2 x < \log_{49} 7$ h) $\log_{\frac{1}{5}}(x-5) > -2$ i) $\log_3(x+20) < 3$

j) $\log_3(4x+2) - \log_3 10 < 0$ k) $\log_8 64 > \log_{\frac{1}{5}} x$ l) $\log_4(5-x^2) > 1$

m) $\log_5(3x-2x^2) > 0$ n) $\log^2_{\frac{1}{2}} x - 9 \leq 0$ o) $5^{\log_5(x-7)} < 4$

Решение.

m) $\log_5(3x-2x^2) > 0$

Найдите отрицательное решение неравенства $\log_{0,2}(x^4+2x^2+1) > \log_{0,2}(6x^2+1)$.

$3x-2x^2 > 0 \Rightarrow x \in (0;1,5)$

$\log_5(3x-2x^2) > \log_5 1$

$3x-2x^2 > 1$, так как $5 > 1$

$2x^2-3x+1 < 0$

Отсюда $x \in (0,5;1)$. Точки интервала $(0,5;1)$ принадлежат области определения.

Ответ: $(0,5;1)$

h) $\log_{\frac{1}{5}}(x-5) > -2$

Находим область определения: $x-5 > 0 \Rightarrow x > 5$

$\log_{\frac{1}{5}}(x-5) > \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

$x-5 < \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

$x-5 < 25$

$x < 30$. Принимаем во внимание область определения, $5 < x < 30$.

Ответ: $(5;30)$

f) $\log_3 x \geq \log_6 36$

Находим область определения: $x > 0$

$\log_3 x \geq 2$

$\log_3 x \geq \log_3 3^2$

$x \geq 9$. Все числа, удовлетворяющие этому неравенству, входят в область определения.

Ответ: $x \geq 9$

2. Сколько целых чисел удовлетворяют неравенству $\log_2(4-x) - \log_2 7 < 0$?

3. Решите неравенства.

a) $\log_{\frac{4}{3}}(x+6) - \log_{\frac{4}{3}} 9 < \log_{\frac{4}{3}} 2 - \log_{\frac{4}{3}} 6$

b) $\log_2(x-1) < \log_2(3x-1)$

c) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-4) \geq \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$

d) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x-6) \geq -3$

e) $\lg^2 x + 11 \cdot \lg x + 10 < 0$

f) $\log_2^2 x - 6\log_2 x + 8 \leq 0$

g) $\log_2 \log_{\sqrt{2}}(x+1) < 1$

h) $2\log_{\frac{1}{5}}(x-2) + 3\log_5(x-2) < 1$

i) $\log_x x^2 + x > 1$

j) $\lg(x+2) + \lg(x-3) \leq \lg x^2$

h) $2\log_{\frac{1}{5}}(x-2) + 3\log_5(x-2) < 1$

Область определения: $x-2>0 \Rightarrow x>2$

$-2\log_5(x-2) + 3\log_5(x-2) < 1$

$\log_5(x-2)^{-2} + \log_5(x-2)^3 < 1$

$\log_5(x-2)^{-2}(x-2)^3 < \log_5 5$

$x-2<5$

$x<7$. Принимая во внимание область определения, получим $2<x<7$. **Ответ**: $(2;7)$

4. Решите неравенства.

a) $\lg 10^{\lg(x^2+21)} > 1 + \lg x$

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2-5x+8)} \leq 2,5$

c) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(6^{x+1} - 36^x\right) \geq -2$

d) $\log_{\frac{x-1}{5x-6}}\left(\sqrt{6}-2x\right) > 0$

e) $x^{1+\lg\sqrt{x}} < 0,1^{-2}$

f) $\sqrt{x^{4\lg x}} < 10x$

c) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(6^{x+1} - 36^x\right) \geq -2$

Область определения: $6^{x+1} - 36^x > 0 \Rightarrow 6^{x+1} > 6^{2x} \Rightarrow x+1 > 2x \Rightarrow x < 1$

$\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(6^{x+1} - 36^x\right) \geq \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2}$

$6^{x+1} - 36^x \leq 5$

$6^{2x}-6\cdot 6^{x}+5\geq 0$

$6^{x}=t$

$t^{2}-6t+5\geq 0$

$t\in(-\infty;1]\cup[5;\infty)\Rightarrow x\in(-\infty;0]\cup[\log_6 5;\infty)$.

Принимая во внимание область определения, получим $x\in(-\infty;0]\cup[\log_6 5;1)$.

Ответ: $(-\infty;0]\cup[\log_6 5;1)$

5. Найдите отрицательное решение неравенства $\log_{0,2}(x^4+2x^2+1) > \log_{0,2}(6x^2+1)$.

ОТВЕТЫ

1. **a)** $x>8$; **b)** $0<x<\frac{1}{4}$; **c)** $x<3$; **d)** $x>125$; **e)** $x>81$;

f) $x\geq 9$; **g)** $0<x<\sqrt{2}$; **h)** $5<x<30$; **i)** $-20<x<7$; **j)** $-\frac{1}{2}<x<2$;

k) $x>\frac{1}{25}$; **l)** $-1<x<1$; **m)** $\frac{1}{2}<x<1$; **n)** $\frac{1}{8}\leq x\leq 8$; **o)** $7<x<11$

2. 6 целых чисел.

3. **a)** $(-6;-3)$; **b)** $(1;\infty)$; **c)** $(2;5]$; **d)** $[-2;-1)\cup(6;7]$; **e)** $\left(\frac{1}{10^{10}};\frac{1}{10}\right)$;

f) $[4;16]$; **g)** $(0;1)$; **h)** $(2;7)$; **i)** $(0;1)\cup(1;\infty)$; **j)** $(3;\infty)$.

4. **a)** $(0;3)\cup(7;\infty)$; **b)** $[1;4]$; **c)** $(-\infty;0]\cup[\log_6 5;1)$; **d)** $\left(\frac{-1+\sqrt{6}}{2};1\right)$;

e) $\left(10^{-1-\sqrt{5}};10^{-1+\sqrt{5}}\right)$; **f)** $\left(\frac{\sqrt{10}}{10};10\right)$. **5.** -1.

ПРИМЕНЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Цель урока: Учащиеся умеют вычислять и применят сложные проценты; моделируют проблемы, используя показательные и логарифмические функции.

Все учащиеся	Понимают понятие процента. Отличают сложные и простые проценты.
Большинство учащихся	Умеют вычислять и применять сложные проценты.
Некоторые учащиеся	Могут решать задачи, приводящие к сложным процентам. Умеют вычислять ипотечные платежи.

Активизирующие вопросы

1. Что вы знаете о процентах?
2. Как выражаются числа в процентах?
3. Что вы знаете о банковских кредитах?
4. Объясните понятия ипотечного долга, первоначального капитала, срока, годовых процентов.

Допустимые ошибки и рекомендации по их устранению

Учащиеся иногда путают формулы простых и сложных процентов. Рекомендуется развивать у учащихся навыки работы с формулами простых и сложных процентов.

Задачи на вычисления ипотечного долга впервые вводятся в школьный курс математики. Поэтому выявление возможных ошибок и работу над устранением их мы оставляем учителям на их усмотрение.

Домашнее задание

Задачи **1, 3, 5**.

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

Формула сложных процентов

Допустим, клиент хочет занять некоторую сумму Q_0 денег. Кредитор может потребовать погашения первоначальной суммы с прибылью P в течение определённого срока. За срок можно взять один день, два дня, ..., одну неделю, две недели, ..., один месяц, два месяца и т. д. Следовательно, сумма, которую заёмщик погасит в указанный период, составит

$$Q_1 = Q_0 + P.$$

В этом случае величина $p = \dfrac{P}{Q_0} \cdot 100\%$

называется ***процентом погашения*** заемного долга.

1. Формула простых процентов. Если процент p применяется только к взятому долгу Q_0, сумма, причитающаяся в конце первого срока, будет

$$Q_1 = Q_0 + \frac{p}{100} \cdot Q_0 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) Q_0.$$

При этом формула $P_1 = \dfrac{p}{100} \cdot Q_0 = P$

– это прибыль кредитора в конце первого срока. Сумма долга в конце второго срока

будет $Q_2 = Q_1 + P_1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)Q_0 + \frac{p}{100}Q_0 = \left(1 + \frac{2p}{100}\right)Q_0$,

а прибыль кредитора в конце второго срока будет

$$P_2 = \frac{2p}{100} \cdot Q_0 \text{ (очевидно, что } P_2 = 2P\text{)}.$$

Повторяя этот процесс n раз, выясняется, что сумма долга в конце n-го срока будет

$$Q_n = \left(1 + \frac{np}{100}\right)Q_0,$$

а прибыль кредитора в конце n-го срока будет

$$P_n = \frac{np}{100} \cdot Q_0 \text{ (очевидно, что } P_n = nP\text{)}.$$

Проценты, рассчитанные таким образом, называются **простыми процентами**, а формула

$$Q_n = \left(1 + \frac{np}{100}\right)Q_0$$

называется **формулой простых процентов.**

2. Формула сложных процентов. Проценты могут быть рассчитаны путём добавления прибыли, полученной за каждый срок, к полученному долгу. В конце первого срока сумма долга составит

$$Q_1 = Q_0 + \frac{p}{100} \cdot Q_0 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)Q_0.$$

Здесь $P_1 = Q_1 - Q_0 = \frac{p}{100} \cdot Q_0$

– прибыль кредитора в конце первого срока. Сумма долга в конце второго срока будет

$$Q_2 = Q_1 + \frac{p}{100}Q_1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)Q_1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 Q_0,$$

а прибыль кредитора в конце второго срока будет

$$P_2 = Q_2 - Q_0 = \left(\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 - 1\right)Q_0.$$

Повторяя этот процесс n раз, выясняется, что сумма долга на конец n-го срока равна

$$Q_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n Q_0,$$

а прибыль кредитора на конец n-го срока равна

$$P_n = Q_n - Q_0 = \left(\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1\right)Q_0.$$

Проценты, рассчитанные таким образом, называются сложными процентами, а формула $Q_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n Q_0$ называется ***формулой сложных процентов.***

Радиоактивный распад

Период полураспада. Некоторые химические элементы испускают частицы из своих ядер. Такие элементы называются радиоактивными элементами, процесс испускания

частиц из их ядер называется радиоактивным распадом. В результате радиоактивного распада исходный химический элемент превращается в другой химический элемент.

Пусть масса исходного химического элемента равна m_0, а время, за которое её половина распадается, равно T_1. Тогда $m_1 = \frac{m_0}{2}$ – масса элемента, не распавшегося в течение времени $t_1 = T_1$. Пусть для распада половины массы m_1 требуется время T_2. Ясно, что после времени $t_2 = T_1 + T_2$ масса нераспавшегося элемента равна $m_2 = \frac{m_1}{2} = \frac{m_0}{2^2}$. Пусть требуется время T_3 для распада половины массы m_2. Далее $m_3 = \frac{m_2}{2} = \frac{m_0}{2^3}$ – масса элемента, не распавшегося в течение времени $t_3 = T_1 + T_2 + T_3$, и пусть требуется время T_4 для распада половины массы m_3. Этот процесс может продолжаться бесконечно.

В результате многолетнего опыта доказано, что $T_1 = T_2 = T_3 = \ldots = T_n = T_{n+1} = \ldots$. Таким образом, время, за которое распадается половина массы одного элемента, является постоянной величиной. Эта величина называется периодом полураспада элемента и обозначается через T:

$$T = T_1 = T_2 = T_3 = \ldots = T_n = T_{n+1} = \ldots .$$

В результате получаются равенства:

$$t_1 = T_1 = T,$$
$$t_2 = T_1 + T_2 = 2T,$$
$$t_3 = T_1 + T_2 + T_3 = 3T,\ldots,$$
$$t_n = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n = nT.$$

Итак, масса элемента с начальной массой m_0, не распавшегося за время $t_n = nT$, равна $m_n = \frac{m_0}{2^n} = 2^{-n} m_0$. Если учесть здесь, что $n = \frac{t_n}{T}$, то имеем равенство $m_n = 2^{-\frac{t_n}{T}} m_0$. Эта формула справедлива и для произвольного момента времени t:

$$m(t) = 2^{-\frac{t}{T}} m_0.$$

Таким образом, масса нераспавшегося радиоактивного элемента является показательной функцией времени.

Налог на добавленную стоимость (сокращенно НДС)

Вы знакомы с понятием налога. Производитель или импортёр товара (оптовый или розничный торговец) должен уплатить налог с продаж государству. Налог на добавленную стоимость – это налог, взимаемый государством во многих точках цепочки поставок, от производителя до розничного продавца. На каждом этапе налогом с продаж облагается только добавленная к товару стоимость. Окончательная ситуация с налогом с продаж остаётся за потребителем.

НДС – это налог на добавленную стоимость при каждой передаче товара от первоначального производителя продавцу.

Допустим, ставка НДС 10%. Предположим, что предприниматель купил товар на 8 000 000 сумов. Тогда с него удерживается 800 000 сумов (10% от 8 000 000 сумов). Затем он продал тот же товар за 11 500 000 сумов. При этом ему выплачивается 1 150 000 сумов (10% от 11 500 000 сумов).

Тогда ему придётся платить НДС в размере 1 150 000 – 800 000=350 000 сумов.

ПРИМЕРЫ

1. Сколько денег семья вернёт банку в конце срока, взяв дом начальной ценой 360 000 000 сум через ипотеку на 20 лет под 18% годовых? Какую прибыль получит банк?

2. Найдите сложные проценты по долгу в размере 5000 долларов на 3 года по ставке 8% годовых.

3. Вахид занял 50 млн сумов и согласился выплатить проценты по ставкам 10%, 12% и 14% за первый, второй и третий год соответственно. Найдите общую сумму долга через 3 года.

Решение.

По условиям задачи Вахид погасит кредит и проценты через 3 года. Может случиться, что Вахид взял кредит с простыми процентами или сложными процентами. Рассмотрим два случая отдельно.

Случай **1.** Пусть Вахид взял кредит под простые проценты. Тогда в конце 1-го года долг Вахида будет

$$Q_1 = \left(1+\tfrac{10}{100}\right)\cdot 50 \text{ млн} = 55 \text{ млн сумов.}$$

К основному долгу добавляется 55 млн – 50 млн = 5 млн сумов. В конце 2-го года 12% основного долга 50 млн сумов будет

$$Q_2 = \left(1+\tfrac{12}{100}\right)\cdot 50 \text{ млн} = 56 \text{ млн сумов.}$$

и в конце 2-го года к основному долгу добавится 56 млн – 50 млн = 6 млн сумов. Наконец, в конце 3-го года 14% основного долга 50 млн сумов составляют

$$Q_3 = \left(1+\tfrac{14}{100}\right)\cdot 50 \text{ млн} = 57 \text{ млн сумов.}$$

В конце 3-го года к основному долгу добавится 56 млн – 50 млн = 6 млн сумов.

Итак, через 3 года Вахид обязан оплатить основную сумму и проценты к ней:

50 млн + 5 млн + 6 млн + 7 млн = 68 млн сумов.

Случай 2. Пусть Вахид взял кредит под сложные проценты. Тогда общий долг Вахида через 3 года будет

$$Q = \left(1+\tfrac{14}{100}\right)\left(1+\tfrac{12}{100}\right)\left(1+\tfrac{10}{100}\right)\cdot 50 \text{ млн} = 70 \text{ млн } 224 \text{ тысячи сумов.}$$

4. Вкладчик вложил в банк 100 миллионов сумов. Взамен он получил 133,1 млн сумов. Банк давал 10% годовых. Как долго он хранил деньги в банке?

5. Вкладчик перечислил на банковский счет 26 млн сумов. Через 18 месяцев на его счету было 32 млн сумов. Какова годовая процентная ставка?

6. У меня есть 400 долларов. Мой друг предложил мне инвестировать в банк. Я могу вкладывать мои сбережения в валютный счет под 13% годовых или в сумовой счёт под 1% в месяц.

а) Сколько я получу через год, если положу деньги на валютный счёт?

б) Какую сумму долларов я получу через год, если переведу эти деньги в сумы и положу на сумовой счёт? Учитывайте курс доллара и сума. Принимать, что инфляция составляет 10% в год.

Решение.

a) В этом случае общая сумма, возвращаемая банку через 1 год, составляет

$$\left(1+\tfrac{13}{100}\right)\cdot 400 = 452 \text{ долларов.}$$

b) В этом случае предположим, что курс доллара по отношению к суму повышается на 10% за 1 год. Пусть текущая стоимость доллара по отношению к суму составляет 1 \$ = C_0 сумов, то через 1 год она будет 1 \$ = $1{,}1C_0 = C_1$ сумов. Внесенные в банк $400C_0$ сумы через 1 год будут

$$\left(1+\tfrac{1}{100}\right)^{12}\cdot 400 \approx 1{,}381\cdot 400C_0 = 455{,}22C_0 \text{ сумов.}$$

Если перевести эту сумму в доллары, то получится, что банк должен вернуть

$$\frac{455{,}2C_0}{C_1} = \frac{455{,}24C_0}{1{,}1C_0} \approx 413{,}85 \text{ долларов.}$$

7. Мурад платит налог в размере 7%, если покупает товар на 10 миллионов сумов. Если он продаст тот же товар за 13 млн сумов, то потребитель платит налог в размере 9%. Узнайте НДС, подлежащий уплате Мурадом.

8. Если бизнесмен продаёт товар за 7 500 000 сумов, с него будет взиматься налог с продаж по ставке 12%. Рассчитайте начальную цену товара, включая налог, уплаченный предпринимателем, если он платит НДС в размере 180 000 сумов.

9. Производитель объявил цену своего продукта 12 000 000 за одну единицу. Он предоставил оптовику скидку 30%, а оптовик, в свою очередь, предоставил розничному продавцу скидку 20% от рекламируемой цены. Если ставка налога с продаж для продукта составляет 10% и розничный торговец продаёт его потребителю по рекламируемой цене, найдите налог на добавленную стоимость, уплачиваемый оптовым и розничным торговцами.

Решение.

Так как ставка налога с продаж установлена в размере 10%, оптовик продает товар розничному продавцу за

$$1{,}1\cdot 12 \text{ млн} = 13{,}2 \text{ млн сумов,}$$

а розничный продавец продает тот же товар потребителю за

$$1{,}1\cdot 13{,}2 \text{ млн} = 14{,}52 \text{ млн сумов.}$$

Но поскольку производитель дал скидку 30%, он продает товар оптовику за

$$0{,}1\cdot 8{,}4 \text{ млн} = 840 \text{ тыс. сумов}$$

и платит налог 0,1·8,4 млн = 840 тыс. сумов.

Поскольку оптовик дает скидку 20%, он продает товар розничному продавцу за

$$0{,}8 \cdot 13{,}2 \text{ млн} = 10{,}56 \text{ млн сумов.}$$

В этом случае оптовик уплачивает налог в размере $0{,}1 \cdot 10{,}56$ млн = 1 млн 56 тыс. сум.

Розничный продавец не делает никаких скидок потребителю и реализует один товар на 14,52 млн сумов. В этом случае он платит $0{,}1 \cdot 14{,}52$ млн = 1 млн 452 тыс. налогов. В результате НДС, уплаченный оптовиком, составляет 1 млн 56 тыс. – 840 тыс. = 216 тыс. сумов, а НДС, уплаченный розничным продавцом, составляет 1 млн 452 тыс. – 1 млн 56 тыс. = 396 тыс. сумов.

10. Розничный торговец покупает товар у оптового торговца на сумму 80 000 сумов, а у оптовика удерживается налог с продаж по фиксированной ставке 8%. Розничный торговец устанавливает цену в размере 100 000 сумов, и с неё взимается потребительский налог с продаж по той же ставке. Сколько НДС платит розничный торговец государству?

СУММАТИВНАЯ ОЦЕНКА. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3.

Вариант I

1. Упростите выражения:

a) $a^{\sqrt{3}} : \left(\frac{1}{a}\right)^{2-\sqrt{3}}$ b) $\log_2 16 - \ln e - \lg 10$

2. Решите неравенства.

a) $6^{2x-1} = \frac{1}{216}$ b) $\log_7 (1+3x) = 2$

3. Решите неравенства.

a) $0,6^x > 1\frac{2}{3}$ b) $\log_2 (x+3) \geq -1$

4. Решите систему уравнений:

a) $\begin{cases} x+y=-2 \\ 6^{x+5y}=36 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log_6 3x + \log_6 y = 1 \\ y-x=1 \end{cases}$

5. Вкладчик перевел на банковский счет 2400 долларов США. Если годовая процентная ставка равна 19, сколько денег получит вкладчик через 3 года?

Вариант II

1. Упростите выражения:

a) $x^e \cdot \sqrt[3]{a^6 : x^{3e}}$ b) $\ln e - \log_3 27 + \lg 1000$

2. Решите неравенства.

a) $0,2^{3-5x} = 25$ b) $\log_4 (5x-1) = 3$

3. Решите неравенства.

a) $\left(1\frac{1}{4}\right)^x < \frac{16}{25}$ b) $\log_3 (2-x) \leq 2$

4. Решите систему уравнений:

a) $\begin{cases} x-y=4 \\ 5^{x+y}=25 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y=1 \\ \log_3 y + \log_3 x = 1 \end{cases}$

5. Предприниматель получил из банка кредит в размере 3000 долларов США на 5 лет. Если он должен вернуть в банк 8100 долларов по истечению срока, то найдите процентную ставку по кредиту.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Цель урока: Научить строить графики и определять свойства тригонометрических и обратных тригонометрических функций; определять функцию на основе её графика; определять периодические процессы.

Все учащиеся	Знают функции $y = sin\ x$, $y = cos\ x$, $y = tg\ x$, $y = ctg\ x$ и их свойства. Знают и могут найти основной период тригонометрических функций.
Большинство учащихся	Могут построить график тригонометрических функций; определять функцию на основе ее графика. Знают свойства функций $y = sin\ (ax+b)$, $y = cos\ (ax+b)$, $y = tg\ (ax+b)$, $y = ctg\ (ax+b)$; могут найти их основной период; умеют проверить их на чётность и нечётность.
Некоторые учащиеся	Знают функции $y = \lvert sin\ x\rvert$, $y = \lvert cos\ x\rvert$, $y = \lvert tg\ x\rvert$, $y = \lvert ctg\ x\rvert$ и их свойства. Могут определять период и четность или нечетность сложных тригонометрических функций.

Активизирующие вопросы

1. Что такое радианная мера угла?
2. Для заданного угла α определите величины $sin\ \alpha$, $cos\ \alpha$, $tg\ \alpha$, $ctg\ \alpha$.
3. Напишите основные тригонометрические тождества.

Допустимые ошибки и рекомендации по их устранению

При построении графиков функции $y = tg\ x$ и $y = ctg\ x$ необходимо научить учащихся обращать внимание на область определения. Каждый раз при работе с функцией $y = tg\ x$ или $y = ctg\ x$ необходимо подчеркнуть, что:

Функция $y = tg\ x$ определена при всех x, кроме точек $\frac{\pi}{2} + \pi$, т. е. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$;

Функция $y = ctg\ x$ определена при всех x, кроме точек n, т. е $x \neq \pi n$, $n \in Z$.

Каждый раз при рассмотрении функций $y = sin\ x$ или $y = cos\ x$ необходимо учесть то, что $x \in (-\infty; +\infty)$ и $y \in [-1;\ 1]$.

Часто учащиеся думают, что основной период функций $y = tg\ x$ и $y = ctg\ x$ равен π. Чтобы преодолеть такую погрешность, рекомендуется подробно объяснять основные периоды тригонометрических функций, изображая их в единичной окружности.

Домашнее задание

Примеры **1 (d, e, g), 2 (a, b), 3 (a, b), 7 (b, c, d), 9 (a, b, c), 10 (c, d)** на странице 137.

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

Синус, косинус, тангенс и котангенс угла

Внимание! Точка A_α будет иметь некоторые координаты в плоскости Oxy. Предположим, что координатами точки A_α на плоскости Oxy является пара $(x; y)$.

Определение

1) Величина x называется косинусом угла α и обозначается через $cos\alpha$.

2) Величина y называется синусом угла α и обозначается через $sin\alpha$.

3) Отношение $\frac{y}{x}$ называется тангенсом угла α и обозначается через $tg\alpha$.

4) Отношение $\frac{x}{y}$ называется котангенсом угла α и обозначается через $ctg\alpha$.

Итак, по определению

$$cos\alpha = x, \qquad sin\alpha = y, \qquad tg\alpha = \frac{y}{x}, \qquad ctg\alpha = \frac{x}{y}. \qquad (1)$$

Внимание! Если вместо единичной окружности рассматривать произвольную окружность радиуса R, то образуются равенства:

$$cos\,\alpha = \frac{x}{R}, \qquad sin\,\alpha = \frac{y}{R}, \qquad tg\,\alpha = \frac{y}{x}, \qquad ctg\,\alpha = \frac{x}{y}. \qquad (1')$$

Функции $y = sinx$, $y = cosx$, $y = tgx$, $y = ctgx$ и их свойства, графики

В результате получим функции $y = sinx$, $y = cosx$, $y = tgx$, $y = ctgx$, называемые тригонометрическими функциями, сопоставляющие в соответствие числу x значения $cosx$, $sinx$, tgx, $ctgx$, соответственно.

Эти функции являются периодическими, т. е. для каждого $k \in Z$ выполняются равенства:

$$f(x+2\pi k) = cos(x+2\pi k) = cosx = f(x),$$
$$f(x+2\pi k) = sin(x+2\pi k) = sinx = f(x),$$
$$f(x+2\pi k) = tg(x+2\pi k) = tgx = f(x),$$
$$f(x+2\pi k) = ctg(x+2\pi k) = ctgx = f(x).$$

Итак, основной период функций $y = cosx$ и $y = sinx$ равен $T_0 = 2\pi$, а основной период функций $y = tgx$ и $y = ctgx$ равен $T_0 = \pi$.

Области определения и множества значений тригонометрических функций:

для $y = cosx$ и $y = sinx$ имеем $D(y) = (-\infty; +\infty)$, $E(y) = [-1; 1]$;

для $y = tgx$ имеем $D(y) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$, $E(y) = (-\infty; +\infty)$;

для $y = ctgx$ имеем $D(y) = (\pi k, \pi(k+1))$, $k \in Z$; $E(y) = (-\infty; +\infty)$.

Функция $y = cosx$ – чётная: $f(-x) = cos(-x) = cos\,x = f(x)$.

Функции $y = sinx$, $y = tgx$, $y = ctgx$ являются нечётными:

Графики тригонометрических функций показаны на следующих рисунках.

Рисунок 2

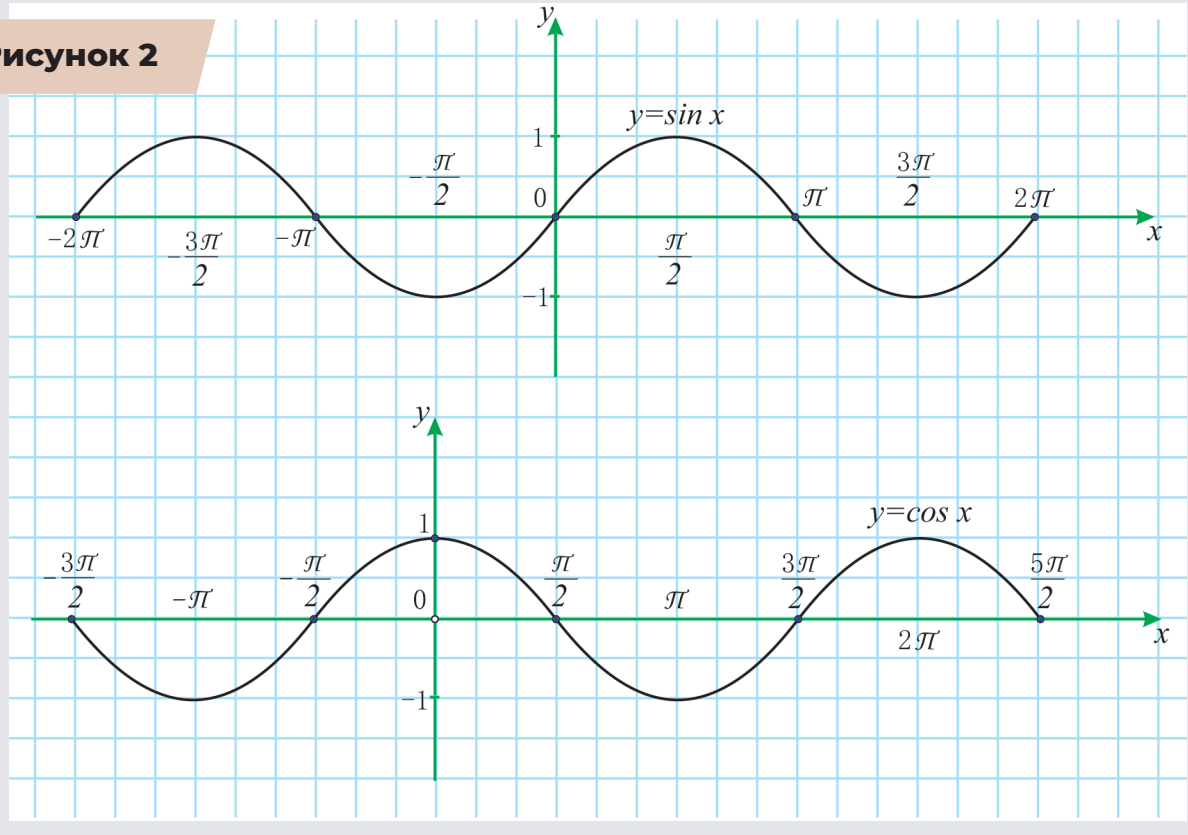
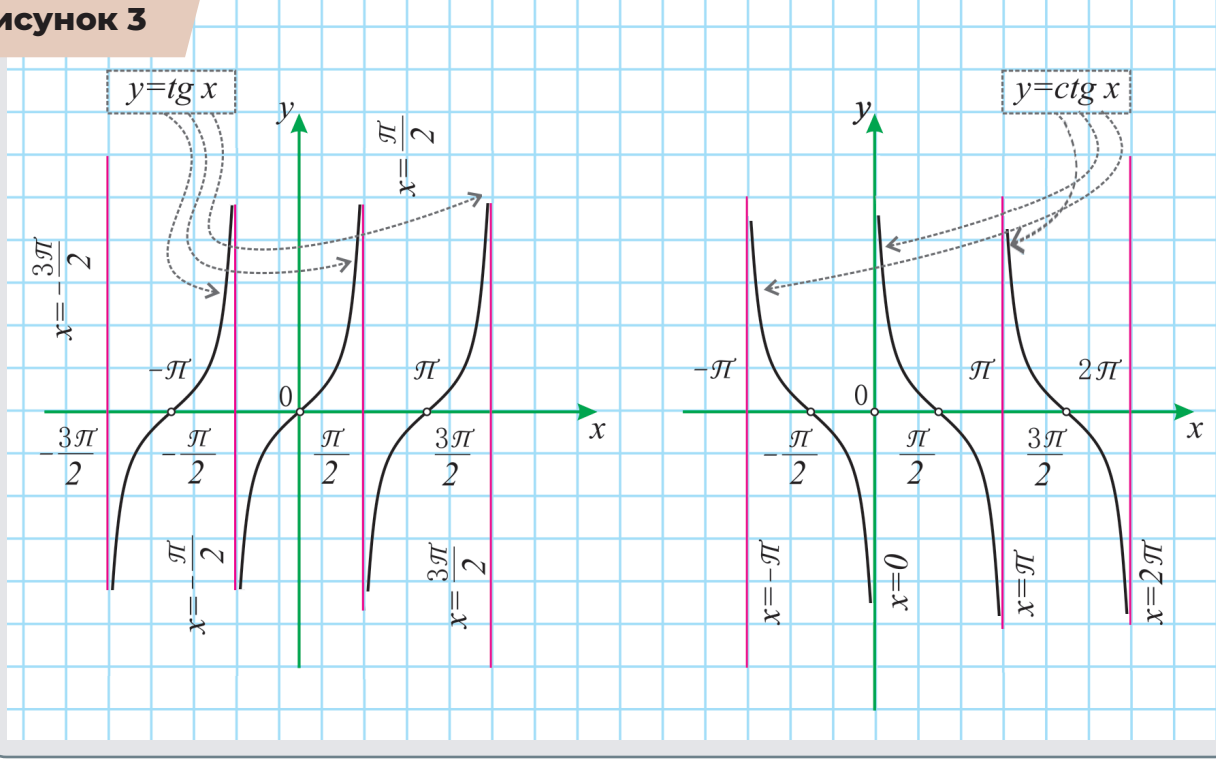


Рисунок 3



Из этих графиков следуют важные выводы:

скачано с сайта www.idum.uz

1) функция $y = sinx$ возрастает на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ и каждому x из этого промежутка ставит в соответствие единственное значение y из отрезка $[-1; 1]$;

2) функция $y = cosx$ убывает на промежутке $[0; \pi]$ и каждому x из этого промежутка ставит в соответствие единственное значение y из отрезка $[-1; 1]$;

3) функция $y = tgx$ возрастает на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ и каждому x из этого интервала ставит в соответствие единственное значение y из интервала $(-\infty; +\infty)$;

4) функция $y = ctgx$ убывает на интервале $(0; \pi)$ и каждому x из этого интервала ставит в соответствие единственное значение y из интервала $(-\infty; +\infty)$.

Отметим, что при решении примеров на нахождение области определения в некоторых случаях достаточно указать те точки, в которых функция не определена.

Пример 1. Найдите область определения функции $y = 2tg(3x-1)$.

Решение. Так как функция $y = tgx$ не определена в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$, то функция $y = 2tg(3x-1)$ не определена в значениях $\frac{\pi}{2} + \pi k$ аргумента $3x-1$. Это явление обозначается так: $3x-1 \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$. Отсюда $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$.

Ответ: Функция $y = 2tg(3x-1)$ определена во всех точках x числовой прямой, которые подчиняются условиям $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$.

Пример 2. Найдите множество значений функции $y = 2 - \frac{1}{3}cos(5x-4)$.

Решение. При решении этого примера воспользуемся следующим двойным неравенством.

$$-1 \le cos\, x \le 1,$$

справедливого во всех значениях x. Итак,

$$-1 \le cos(5x-4) \le 1.$$

Умножаем все его члены на $-\frac{1}{3}$. $\quad -\frac{1}{3} \le -\frac{1}{3}cos(5x-4) \le \frac{1}{3}$

Прибавим 2 ко всем членам последнего двойного неравенства.

$$2 - \frac{1}{3} \le 2 - \frac{1}{3}cos(5x-4) \le 2 + \frac{1}{3}$$

После приведения получим

$$1\frac{2}{3} \le 2 - \frac{1}{3}cos(5x-4) \le 2\frac{1}{3} \text{ или } 1\frac{2}{3} \le y \le 2\frac{1}{3}.$$

Ответ: Множество значений заданной функции есть отрезок $\left[1\frac{2}{3};2\frac{1}{3}\right]$, или по-другому, $E(y) = \left[1\frac{2}{3};2\frac{1}{3}\right]$.

Как известно, если основным (наименьшим положительным) периодом функции $y=f(x)$ является T, то величина $\frac{T}{|k|}$ является основным периодом функции $y=af(kx+b)$, $k\neq 0$.

Пример 3. Найдите наименьший положительный период функции $y=2\sin\left(\frac{4}{3}x+7\right)$.

Решение. Так как основным периодом функции $y=\sin x$ является $T=2\pi$, то

$$\frac{T}{\frac{4}{3}}=\frac{3T}{4}=\frac{3\cdot 2\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$$

– основной период функции $y=2\sin\left(\frac{4}{3}x+7\right)$.

Ответ: Основной период заданной функции $\frac{3\pi}{2}$.

ПРИМЕРЫ

1. Найдите область определения функции.

a) $y=\cos 3x$ b) $y=\sin\frac{2x-1}{5}$ c) $y=\sin\frac{1}{x+5}$ d) $y=\sin\sqrt{\frac{1-x}{x+3}}$

e) $y=tg3x$ f) $y=ctg\frac{2x}{5}$ g) $y=tg\frac{1}{x}$

Решение.

f) Функция $y=ctg\,x$ не определена в значениях $x=\pi n$, $n\in Z$ аргумента x. Но тогда функция $y=ctg\,\frac{2x}{5}$ не определена в значениях $\frac{2x}{5}=\pi n$, $n\in Z$. Следовательно, функция $y=ctg\,\frac{2x}{5}$ определена во всех значениях аргумента x, для которых $x\neq\frac{5\pi n}{2}$, $n\in Z$.

Ответ: Функция $y=ctg\,\frac{2x}{5}$ определена в точках x, $x\neq\frac{5\pi n}{2}$, $n\in Z$.

2. Найдите множество значений функции.

a) $y=-1+\cos x$ b) $y=-6\sin 3x\cos 3x$ c) $y=2+\cos x$ d) $y=-3\sin 2x+2$

e) $y=5tg4x$ f) $y=3-4\cos 5x$ g) $y=-5+\frac{1}{x}\cos x\sin x$

Решение. f)

1. Для функции $y=\cos$ x имеем $y\in[-1;\ 1]$, т. е. $-1\le\cos x\le 1$ при всех $x\in(-\infty;+\infty)$.
2. Перемножая на -4 все части двойного неравенства, получим $-4\le-4\cos x\le 4$.
3. Прибавляя 3 ко всем его частям, обнаружим, что $-1\le 3-4\cos x\le 7$.

Итак, для функции $y=3-4\cos x$ при всех $x\in(-\infty;+\infty)$ имеем $-1\le y\le 7$.

Ответ: $E(y)=[-1;\ 7]$.

3. Определите чётность или нечётность функций.

a) $y=2xtgx$ b) $y=x^3-tg^3x$ c) $y=tgx\sin^2 x$ d) $y=tg2x+2\sin x$

e) $y = x^2 + tg^2 x$ f) $y = tg10|x|$ g) $y = \frac{x^2 + \cos x}{2}$ h) $y = \frac{\sin x + \cos x}{x+5}$

4. Используя график функции $y = sinx$, постройте график следующих функций.

a) $y = -sinx$ b) $y = 2sinx$ c) $y = -0{,}5sinx$ d) $y = |sinx|$

e) $y = sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ f) $y = |sin|x||$ g) $y = 1 + sinx$ h) $y = sin2x$

5. Используя график функции $y = cosx$, постройте график следующих функций.

a) $y = -cosx$ b) $y = 0{,}5cosx$ c) $y = cos2x$ d) $y = |cosx|$

e) $y = cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ f) $y = |cos|x||$ g) $y = 2 - cosx$ h) $y = cos4x$

6. Постройте график функции.

a) $y = tg2x$ b) $y = ctg\frac{x}{2}$ c) $y = 2tgx$ d) $y = \frac{1}{3}ctgx$

7. Определите чётность или нечётность функций.

a) $y = \frac{\cos 2x - \sin^2 x}{x^2}$ b) $y = ctg3x + 5sinx$ c) $y = sin5x$

d) $y = 2sin^2 x$ e) $y = sin^2 x + sinx$ f) $y = 5sin^3 x + 2sinx$

Решение: a) Числитель выражает собой чётную функцию как разность чётных функций $\cos 2x$ и $\sin^2 x$. А в знаменателе находится чётная функция x^2. Поэтому $y = \frac{\cos 2x - \sin^2 x}{x^2}$ – чётная функция как частное чётных функций.

Ответ: a) $y = \frac{\cos 2x - \sin^2 x}{x^2}$ – чётная функция.

8. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(-\infty;\infty)$:

a) покажите, что функция $f(x) + f(-x)$ – чётная;

b) покажите, что функция $f(x) - f(-x)$ – нечётная.

9. Найдите наименьший положительный период функции.

a) $f(x) = cos(3x+1)$ b) $f(x) = sin\left(\frac{x}{4} - 3\right)$ c) $f(x) = tg(2x+1)$

d) $f(x) = sin2\pi x$ e) $f(x) = cos\sqrt{3x}$ f) $f(x) = tg(4\pi x - 3)$

10. Найдите наименьший положительный период заданной функции $f(x)$:

a) $f(x) = sin\frac{3x}{2} + tg7x$ b) $f(x) = cos\,x + 2\,sin\left(\frac{3x}{5} + \frac{\pi}{6}\right)$

c) $f(x) = ctg(x-1) - 3sin3x$ d) $f(x) = \sin 3x + \cos\frac{3x}{4} + \frac{1}{2}tg\frac{9x}{5}$

Решение: d)

1) Наименьший положительный период для $sin\,3x$ равен $T_1 = \frac{2\pi}{3} = 120^0$;

2) Наименьший положительный период для $cos\,\frac{3x}{4}$ равен $T_2 = \frac{8\pi}{3} = 480^0$;

3) Наименьший положительный период для $tg\,\frac{9x}{5}$ равен $T_3 = \frac{5\pi}{9} = 100^0$.

4) Наименьший положительный период для $sin\,3x + cos\,\frac{3x}{4} - \frac{1}{2}tg\,\frac{9x}{5}$ равен

$$EKUK\left(120^o, 480^o, 100^o\right) = 24000 = \frac{40\pi}{3}.$$

Ответ: $T = \frac{40\pi}{3}$

11. Покажите, что $T = -5\pi$ является периодом функции $f(x) = sin\,6x$.

12. Покажите, что $T = \pi$ является периодом функции $f(x) = \sqrt{sin\,2x + 1}$.

13. У какой из следующих функций наименьший положительный период равен π?

a) $y = sinx$ b) $y = cosx$ c) $y = tgx$ d) $y = ctgx$

14. Постройте график функции.

a) $y = |sin\,x|$ b) $y = |cos\,x|$ c) $y = |tgx|$ d) $y = |ctgx|$

Решение: 1)

1. Сперва построим график функции $y = sin\,x$.

2. Так как $|sin\,x| \geq 0$ при всех $x \in (-\infty; +\infty)$, то симметрично отражая часть графика, расположенную внизу оси Ox, получим график искомой функции.

ОТВЕТЫ

1. a) $\mathbb{R}$ **b)** $\mathbb{R}$ **c)** $x \neq -5$ **d)** $(-3;1]$ **e)** $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$ **f)** $x \neq \frac{5\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

g) $x \neq 0, x \neq \frac{2}{\pi(1+2k)}, k \in \mathbb{Z}$

2. a) [-2; 0] **b)** [-3; 3] **c)** [1; 3] **d)** [-1; 5]

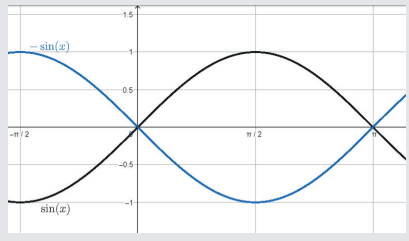
e) $\mathbb{R}$ **f)** [-1; 7] **g)** [-5,25; 4,75]

3. a) чётная **b) не**чётная **c) не**чётная **d) не**чётная **e)** чётная

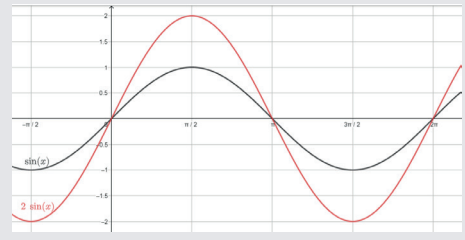
f) чётная **g)** чётная **h)** ни чётная, ни нечётная

4.

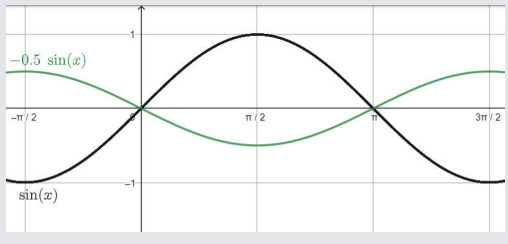
a)



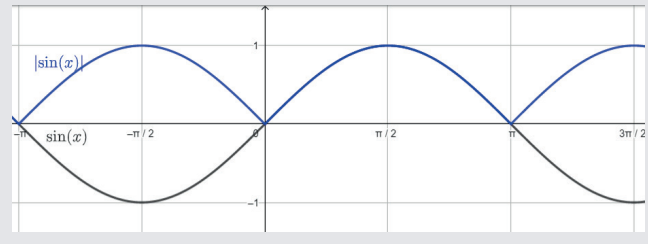
b)



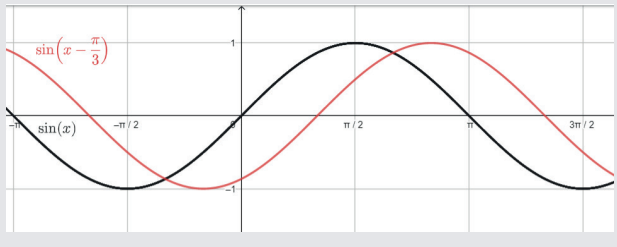
c)



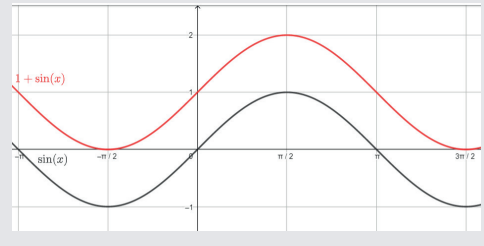
d)



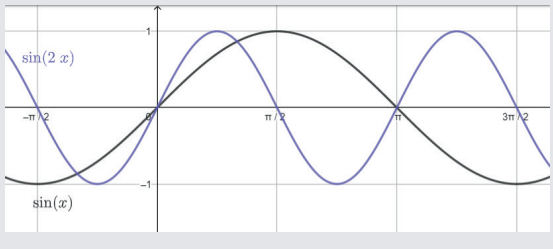
e)



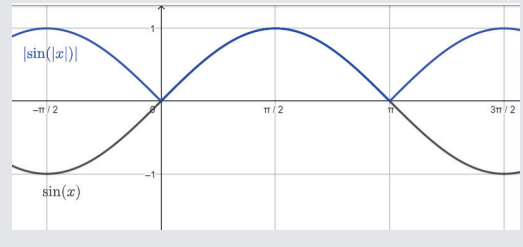
f)



g)

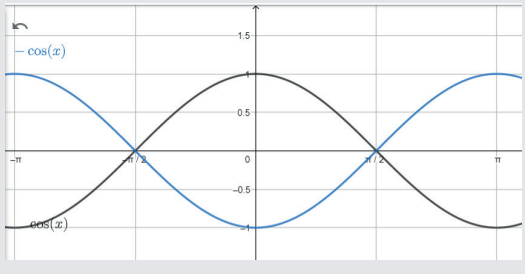


h)

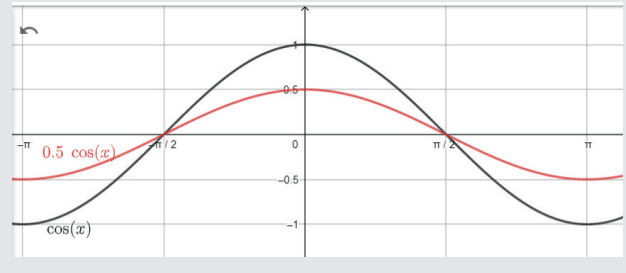


5.

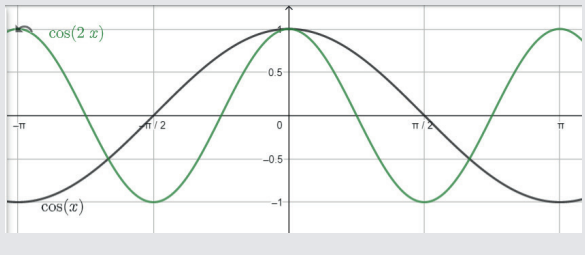
a)



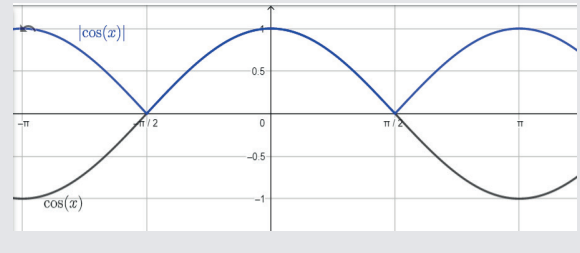
b)



c)

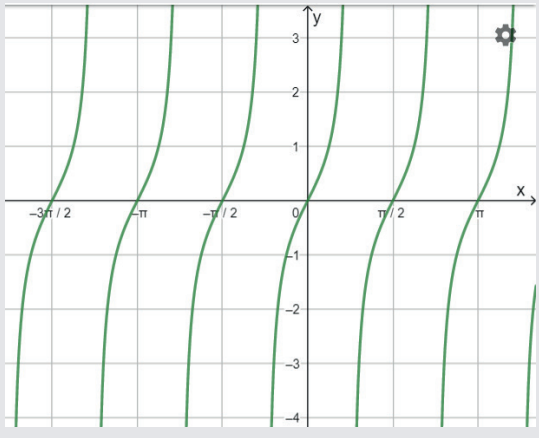


d)

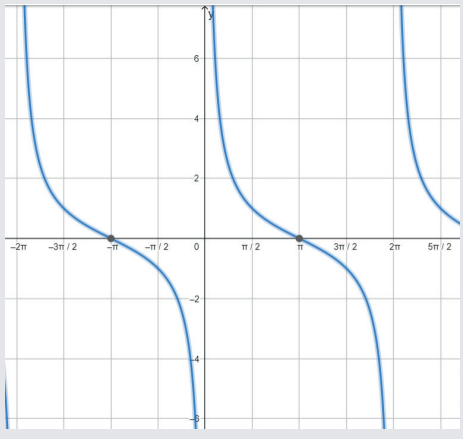


6.

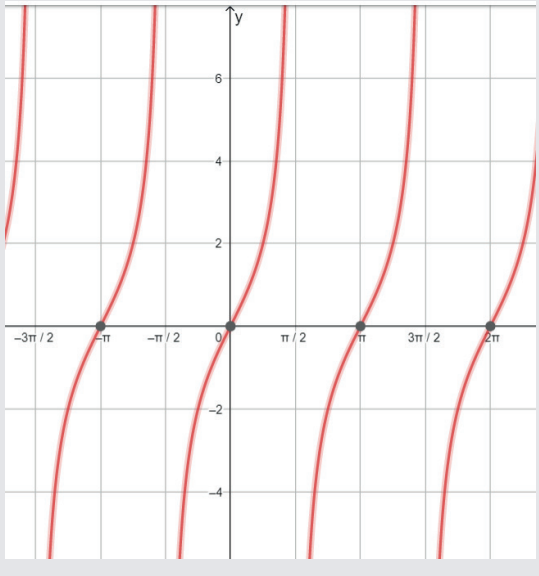
a)



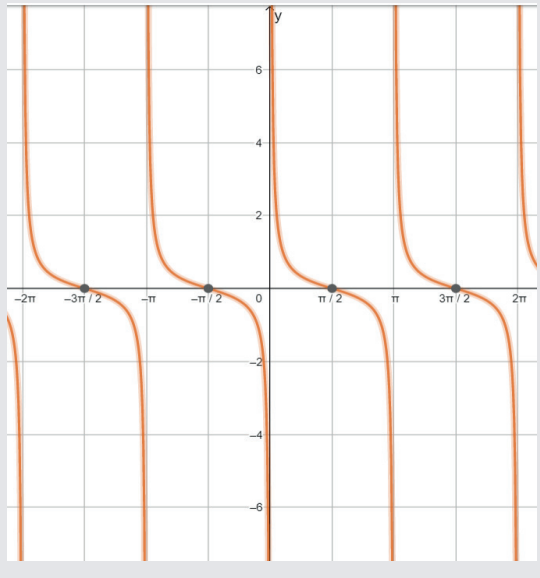
b)



a)



b)



7. **a)** чётная **b)** нечётная **c)** нечётная **d)** чётная **e)** ни чётная, ни нечётная **f)** нечётная

9. **a)** $\frac{2\pi}{3}$ **b)** 3π **c)** $\frac{\pi}{2}$ **d)** 1 **e)** $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ **f)** 0,25

10. **a)** 4π **b)** 10π **c)** 2π **d)** $\frac{40\pi}{3}$

13. **c)** и **d)**

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА, ГРАФИКИ

Цель урока: Научить строить построить графики и определять свойства тригонометрических и обратных тригонометрических функций; определяют функцию на основе ее графика.

Все учащиеся	Знают, что функция: $y = sin\,x$ возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, установить взаимнооднозначное соответствие между $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ и $[-1;1]$; $y = cos\,x$ убывает на отрезке $[0;\pi]$ – между $[0;\pi]$ и $[-1;1]$; $y = tg\,x$ возрастаетна интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ – между $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ и $(-\infty;+\infty)$; $y = ctg\,x$ убывает на интервале $(0;\pi)$ – между $(0;\pi)$ и $(-\infty;+\infty)$.
Большинство учащихся	Знают, что обратной для функции: $y = sin\,x$ является возрастающая функция $y = arcsin\,x$, определенная на отрезке $[-1;1]$ со значениями в отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $y = cos\,x$ является убывающая функция $y = arccos\,x$, определенная на отрезке $[-1;1]$ со значениями в отрезке $[0;\pi]$; $y = tg\,x$ является возрастающая функция $y = arctg\,x$, определенная на промежутке $(-\infty;+\infty)$ со значениями в интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$; $y = ctg\,x$ является убывающая функция $y = arcctg\,x$, определенная на промежутке $(-\infty;+\infty)$ со значениями в интервале $(0;\pi)$.
Некоторые учащиеся	Знают и применяют тождества, устанавливающие взаимосвязь между тригонометрическими и обратными тригонометрическими функциями.

Оценка

Учащиеся оцениваются в классе на основе формативной оценки.

Рекомендуется выполнить примеры 1 (c-f), 2 (f, i, t), 3 c), 4 (e-l), 5 (d-i) в странице 144 за 5 занятий..

Рекомендуется использовать дифференцированный подход, основанный на успеваемости учащихся, при котором все учащиеся должны уметь решать зеленые примеры.

Рекомендуется показать решение по крайней мере 1 зеленого, 2 синих примеров.

Активизирующие вопросы

1. Что такое возрастающая (убывающая) функция?
2. Укажите область определения функций $y = sin\,x$, $y = cos\,x$, $y = tg\,x$, $y = ctg\,x$.
3. Укажите множество значений функций $y = sin\,x$, $y = cos\,x$, $y = tg\,x$, $y = ctg\,x$.
4. Является ли возрастающей обратная возрастающей функции?

5. Является ли возрастающей обратная возрастающей функции?
6. Какой график тригонометрической функции симметричен относительно начала координат?

Допустимые ошибки и рекомендации по их устранению

В большинстве случаев учащиеся предполагают, что для функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ существуют обратные на их области определения, т. е. на $(-\infty; +\infty)$. Для предотвращения такого недоразумения необходимо научить учащимся обращать внимание на то, что всякая функция допускает обратную только в промежутке взаимной однозначности (если такой промежуток существует). Для функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ промежутками взаимной однозначности являются, например, отрезки $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $[0; \pi]$, соответственно. Поэтому для них на указанных отрезках существуют обратные $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$.

Аналогично, интервалы $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $(0; \pi)$ являются промежутками взаимной однозначности для функций $y = tg\,x$ и $y = ctg\,x$, соответственно. Поэтому для них на указанных интервалах существуют обратные $y = arctg\,x$ и $y = arcctg\,x$.

Домашнее задание

Примеры 1 (a, b); 2 (f, i, t); 3 (a, b, d), 4 (a, b, d), 5 (a, b, c), страница 144.

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

Функция ***y = arcsinx*** является обратной к функции ***y = sinx***: $sin(arcsinx) = x, \quad x \in [-1; 1]$

$$arcsin(sinx) = x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Свойства функции *y = arcsinx*:

- $D(y) = [-1; 1]$;
- $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
- $y = arcsinx$ – возрастающая функция;
- наибольшее значение функции $y = arcsinx$ равно $\frac{\pi}{2}$, а её наименьшее значение равно $-\frac{\pi}{2}$;
- график функции $y = arcsinx$ проходит через начало координат;
- $y = arcsinx$ – нечётная функция, т. е. $arcsin(-x) = -arcsinx$;
- функция $y = arcsinx$ не является периодической.

Рисунок 1

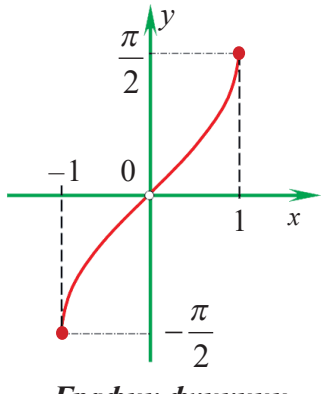


График функции y = arcsinx

Свойства функции *y = arccosx*:

- $D(y) = [-1; 1]$;
- $E(y) = [0; \pi]$;
- $y = arccosx$ – убывающая функция;
- наибольшее значение функции $y = arccosx$ равно π, а её наименьшее значение равно 0;

- график функции $y = arccosx$ пересекается с осью Ox в точке $(1; 0)$ с абсциссой $x = 1$, а с осью Oy в точке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ с ординатой $y = \frac{\pi}{2}$;
- $y = arccosx$ – ни нечётная, ни чётная функция. Однако здесь справедливо равенство

$$arccos(-x) = \pi - arccosx;$$

- функция $y = arccosx$ не является периодической (область определения не периодична).

Функция $y = arctgx$ обладает следующими свойствами:

- $D(y) = (-\infty; +\infty)$;
- $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;
- $y = arctgx$ – возрастающая функция;
- функция $y = arctgx$ не достигает наибольшего и наименьшего значения;
- график функции $y = arctgx$ проходит через начало координат;
- $y = arctgx$ нечётная функция, т. е.

$$arctg(-x) = -arctgx;$$

- функция $y = arctgx$ не является периодической.

Рисунок 2

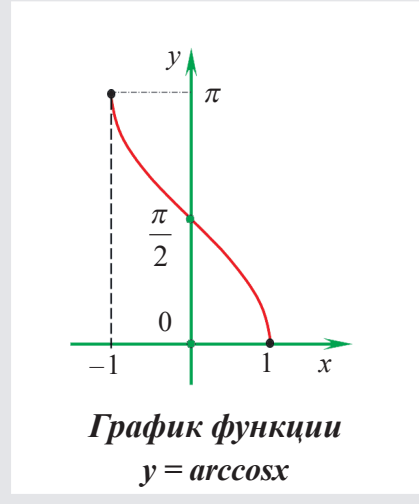


График функции $y = arccosx$

$y = arcctgx$.

Функция **$y = arcctgx$** является обратной к функции **$y = ctgx$**: $ctg(arcctgx) = x$, $x \in (-\infty; +\infty)$, $arcctg(ctgx) = x$, $x \in (0; \pi)$.

Рисунок 3

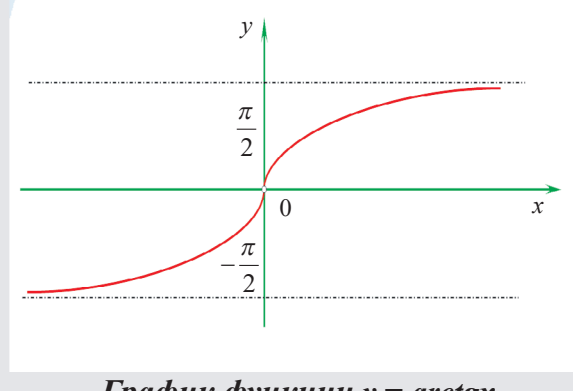


График функции $y = arctgx$

Функция $y = arcctgx$ обладает следующими свойствами:

- $D(y)=(-\infty;+\infty)$;
- $D(y)=(0;\pi)$;
- $y = arcctgx$ – убывающая функция;
- функция $y = arcctgx$ не достигает наибольшего и наименьшего значения;
- график функции $y = arcctgx$ не пересекается с осью Ox, пересекается с осью Oy в точке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ с ординатой $y = \frac{\pi}{2}$;
- $y = arcctgx$ – не является ни нечётной, ни чётной. Но, тем не менее, имеет место

$$arcctg(-x) = \pi - arcctgx;$$

функция $y = arcctgx$ не является периодической.

Рисунок 4

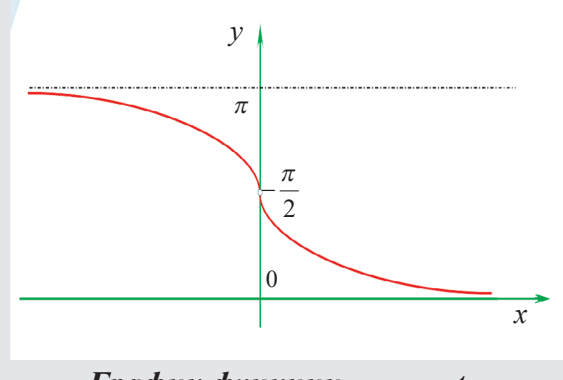


График функции $y = arcctgx$

Пример 1. Найдите значение выражения $arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Пусть $arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=x$. В этом случае данное задание можно поставить иначе: найти значение x из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, удовлетворяющего равенству $sinx=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Известно, что равенство $sinx=\frac{\sqrt{3}}{2}$ имеет место, когда $x=\frac{\pi}{3}$. Таким образом $arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$.

Ответ: $arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$.

В таблице ниже показаны некоторые значения выражения $arcsin\alpha$.

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$arcsinx$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Пример 2. Найдите значение выражения $arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Пусть $arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=x$. В этом случае данное задание можно поставить по другому: найти значение x из промежутка $[0;\pi]$, удовлетворяющего равенству $cosx=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Известно, что равенство $cosx=\frac{\sqrt{2}}{2}$ имеет место при $x=\frac{\pi}{4}$:

Ответ: $arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.

В следующей таблице приведены некоторые значения выражения $arccos\,x$.

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$arccosx$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Пример 3. Найдите значение выражения $arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Решение. Пусть $arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=x$. Значит, требуется найти значение x, удовлетворяющее равенству $tgx=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Известно, что $tg\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$.

В таблице приведены некоторые значения выражения *arctg x*.

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$arctgx$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Пример 4. Найдите значение выражения $arcctg\sqrt{3}$.

Решение. Пусть $arcctg\sqrt{3}=x$. Значит, требуется найти значение x, удовлетворяющее равенству $ctgx=\sqrt{3}$. Известно, что $ctg\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$.

Ответ: $arcctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}$.

В таблице приведены некоторые значения выражения *arcctg x*.

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$arcctgx$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

ПРИМЕРЫ

1. Имеют ли смысл следующие выражения?

a) $arcsin(\sqrt{3}-1)$ b) $arcsin(4-\sqrt{5})$ c) $arccos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

d) $arccos\left(\sqrt{2}\right)$ e) $arctg(\sqrt{2})$ f) $arcctg(-100)$

c) Решение: c) Сперва отметим, что областью определения функции $y = arccosx$ является отрезок $x\in[-1;1]$. Потом оценим значение числа $x=-\frac{\pi}{3}$, $\pi\approx3.14$ имеем $-\frac{\pi}{3}<-1$. Откуда, Значит, выражение $arccos(-\frac{\pi}{3})$ бессмысленно.

Ответ: Выражение $arccos\ (-\frac{\pi}{3})$ не имеет смысла.

2. Вычислите.

a) $arcsin\frac{1}{2}$ b) $arcsin\ (-1)$ c) $arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}$ d) $arcsin 0$

e) $arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ g) $arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ h) $arccos\frac{1}{2}$

i) $arccos 0$ j) $arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$ k) $arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ l) $arctg 0$

m) $arctg(-1)$ n) $arctg\frac{1}{\sqrt{3}}$ o) $arctg\sqrt{3}$ p) $arctg1$

q) $arctg(-\sqrt{3})$ r) $arcctg\sqrt{3}$ s) $arcctg(-1)$ t) $arcctg\frac{1}{\sqrt{3}}$

Решение: c)

Сперва упрощаем выражение в скобках:

$$\frac{1-2(2+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}}-\frac{1}{1+\sqrt{3}}=\frac{1-4-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}-\frac{1}{1+\sqrt{3}}=\frac{-3-2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}=\frac{-3(1+\sqrt{3})}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}=-\sqrt{3}.$$

$$arctg\left(\frac{1-2(2+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}}-\frac{1}{1+\sqrt{3}}\right)=arctg(-\sqrt{3})$$

Потом, учитывая, что $arctg(-x)=-arctgx$ – нечётная функция, найдём искомое значение: $arctg(-\sqrt{3})=-arctg\sqrt{3}=-\frac{\pi}{3}$.

Ответ: $arctg\left(\frac{1-2(2+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}}-\frac{1}{1+\sqrt{3}}\right)=-\frac{\pi}{3}$.

3. Вычислите.

a) $arcsin\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right)$

b) $arccos\left(\frac{10+5\sqrt{5}}{\frac{5}{2}(3+\sqrt{5})}-\frac{\frac{5}{2}(3+\sqrt{5})}{10+5\sqrt{5}}\right)$

c) $arctg\left(\frac{1-2(2+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}}-\frac{1}{1+\sqrt{3}}\right)$

d) $arcctg\left(\frac{1+\sqrt{\frac{7}{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\sqrt{\frac{7}{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}}-\frac{1-\sqrt{\frac{7}{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\sqrt{\frac{7}{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)$

4. Вычислите.

a) $cos(arctg2)$ b) $sin(arctg7)$ c) $cos\left(arcsin\frac{1}{4}\right)$

d) $ctg(arctg5)$ e) $sin(arctg11)$ f) $sin\left(arccos\frac{1}{5}\right)$

g) $cos(arcctg(-4))$ h) $ctg(arcsin(-0,9))$ i) $sin\left(arccos\left(-\frac{4}{7}\right)\right)$

j) $ctg(arctg(-15))$ k) $tg(arccos(-0,3))$ l) $ctg\left(arccos\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$

5. Вычислите.

a) $cos(2arcsin0,2)$ b) $sin\left(2arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$ c) $sin(2arcctg\sqrt{26})$

d) $tg(2arccos0,6)$ e) $tg\left(2arcsin\frac{7}{9}\right)$ f) $cos(2arccos(-0,8))$

g) $tg(2arcctg(-3))$ h) $sin(2arcsin(-0,1))$ i) $tg(2arcctg20)$

e) Решение: e)

1) Введя обозначение $arcsin\frac{7}{9}=\alpha$, приводим заданное выражение к виду $tg2\alpha$.

2) Воспользуемся формулой $tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$ и $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

3) $sin(arcsin\,x)=x,\ cos(arcsin\,x)=\sqrt{1-sin^2(arcsin\,x)}=1-x^2$.

4) $tg\alpha=tg\left(arcsin\frac{7}{9}\right)=\frac{sin\left(arcsin\frac{7}{9}\right)}{cos\left(arcsin\frac{7}{9}\right)}=\frac{\frac{7}{9}}{\sqrt{1-sin^2\left(arcsin\frac{7}{9}\right)}}=\frac{\frac{7}{9}}{\frac{4\sqrt{2}}{9}}=\frac{7}{4\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{8}$.

5) $tg\left(2\,arcsin\frac{7}{9}\right)=\frac{2tg\left(arcsin\frac{7}{9}\right)}{1-tg^2\left(arcsin\frac{7}{9}\right)}=\frac{2\cdot\frac{7\sqrt{2}}{8}}{1-\left(\frac{7\sqrt{2}}{8}\right)^2}=-\frac{\frac{7\sqrt{2}}{4}}{\frac{17}{32}}=-\frac{56\sqrt{2}}{17}$.

Ответ: $tg\left(2\,arcsin\frac{7}{9}\right)=-\frac{56\sqrt{2}}{17}$.

ОТВЕТЫ

1. **a)** имеет **b)** не имеет **c)** не имеет **d)** не имеет **e)** имеет **f)** имеет

2. **a)** $\frac{\pi}{6}$ **b)** $-\frac{\pi}{2}$ **c)** $\frac{\pi}{4}$ **d)** 0 **e)** $\frac{\pi}{3}$ **f)** $-\frac{\pi}{4}$ **g)** $\frac{3\pi}{4}$
h) $\frac{\pi}{3}$ **i)** $\frac{\pi}{2}$ **j)** $\frac{5\pi}{6}$ **k)** $\frac{\pi}{4}$ **l)** 0 **m)** $-\frac{\pi}{4}$ **n)** $\frac{\pi}{6}$
o) $\frac{\pi}{3}$ **p)** $\frac{\pi}{4}$ **q)** $-\frac{}{3}$ **r)** $\frac{}{6}$ **s)** $\frac{3\pi}{4}$ **t)** $\frac{\pi}{3}$

3. **a)** $\frac{\pi}{4}$ **b)** 0 **c)** $\frac{5\pi}{6}$ **d)** $\frac{\pi}{3}$

4. **a)** $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **b)** $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ **c)** $\frac{\sqrt{15}}{4}$ **d)** $\frac{1}{5}$ **e)** $\frac{11\sqrt{122}}{122}$ **f)** $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ **g)** $-\frac{4\sqrt{17}}{17}$
h) $-\frac{\sqrt{91}}{3}$ **i)** $\frac{\sqrt{33}}{7}$ **j)** $-\frac{1}{15}$ **k)** $-\frac{\sqrt{19}}{9}$ **l)** $-\frac{\pi\sqrt{16-\pi^2}}{16-\pi^2}$

5. **a)** 0,92 **b)** $-\frac{4\sqrt{5}}{9}$ **c)** $\frac{\sqrt{26}}{54}$ **d)** $-\frac{24}{7}$ **e)** $-\frac{56\sqrt{2}}{17}$ **f)** $\frac{7}{25}$ **g)** –0,75
h) $-\frac{3\sqrt{11}}{50}$ **i)** $\frac{40}{399}$

ПРОЕКТНАЯ РАБОТА

Цель занятия: сформировать у учащихся умение использовать тригонометрические и обратные тригонометрические функции в реальной жизненной ситуации, в частности, при выборе места в кинотеатре.

Все учащиеся	Знают основные тригонометрические функции, с помощью которых они выражают заданный острый угол в прямоугольном треугольнике через его стороны.
Большинство учащиеся	Выражают острый угол в прямоугольном треугольнике, используя стороны и тригонометрические функции, находят выражение угла, используя обратные тригонометрические функции.
Некоторые учащиеся	Выражают острый угол в произвольном треугольнике с помощью сторон и тригонометрических функций, находят максимальное значение угла с помощью приложения Geogebra.

Выделенное время	**Учитель**	**Учащиеся**	**Необходимые учебные материалы**
2 мин.	Делит учащихся на 5-6 малых групп.	Делятся на небольшие группы.	
3 мин.	Объясняет 3 случая, приведенных на рисунке 1 в учебнике.	Внимательно слушают учителя.	Учебник, стр. 145, рис. 1.
15 мин.	Объясняет группам условие a) задания 1 и дает каждой группе лист формата A4 для вычисления математических операций, указанных в условии.	Анализируют ситуацию a) на рисунке 2. Используя данных доказывают, что функция θ от x имеет вид $\theta = arctg\frac{28}{x} - arctg\frac{6}{x}$.	Ситуация на рисунке 2 должна быть предварительно нарисована на доске.
	Просит у каждой группы дать свой ответ; слушает, проверяет, комментирует ответы групп.	Выйдет по 1 представителю из каждой группы и напишет свои ответы на доске, комментирует их.	На доске должна быть нарисована таблица, чтобы группы могли записать свои ответы. Уведомление о регламенте. Каждой группе дается 1 минута.
10 мин.	Объясняет группам условие b) задания 1. Предлагает использовать формулу тангенса разности: $\theta = arctg\left(\frac{22x}{x^2+168}\right)$ Дает группам 5 минут на обсуждение.	Находят $\theta = arctg\left(\frac{22x}{x^2+168}\right)$ по формуле тангенса разности. Находят максимальное значение угла θ с помощью приложения Geogebra.	На доске должны быть написаны формулы суммы и разности синуса и косинуса, а также формула разности тангенса. Бумага формата A4 для каждой группе.

	Просит у каждой группы дать свой ответ; слушает, проверяет, комментирует ответы групп.	Выходит по 1 представителю из каждой группы (не тот учащийся, который ответил на предыдущее задание) и напишет свои ответы на доске, комментирует их.	Уведомление о регламенте. Каждой группе дается 1 минута.
10 daq	Объясняет группам условие c) задания 1, предлагает им построить график зависимости θ от x с помощью приложения Geogebra. Какое значение x максимизирует θ? В каком ряду лучше сидеть? Какой угол обзора на этом ряде?	Выходят по 2 представителя из каждой группы (не те учащиеся, ответившие на предыдущие задания) и объясняют ответ группы. И один из учеников может на компьютере (или на доске) нарисовать эскиз графика. Второй поясняет, при каком значении x угол θ максимален.	Компьютер или телефон с установленным приложением GeoGebra. Уведомление о регламенте. Каждой группе дается 1 минута. Бумага формата A4 для каждой группе.
5 daq	Дает каждой группе задание 2 в учебнике в качестве проектной работы. Кроме того, оценивает обстановку в обоих кинотеатрах, говорит, какой из них может иметь больший угол обзора, и требует, что группа совместно завершил рисунок идеального кинотеатра с указанием своих замер. Объясняет порядок выполнения проектной работы и требования к ней.	Внимательно слушают учителя; обсуждают порядок проведения проектных работ; делят задания между собой.	Список учащихся. Рядом с именем каждого ученика должна быть написана его группа.
Рефлексия учителя: подчеркнет, что на уроке было пройдено хорошо, а над чем нужно поработать.			

Порядок выполнения проекта:

1. Выполнить задание 2 проектной работы на странице 146 учебника в группах.
2. Подробно опишите этапы вывода формулы угла в части a).
3. В части b) запишите шаги для построения графика θ как функции от x с помощью графического приложения Geogebra и найдите значение x, которое максимизирует θ.
4. Напишите подробные ответы на следующие вопросы: В каком ряду лучше сидеть? Какой угол обзора на этом ряде?
5. Сравните два кинотеатра, приведенные в проектной работе 2, и объясните логическими доводами, какой из них более удобен для зрителей.
6. Работа с группой, чтобы нарисовать идеальный кинотеатр, указывая размеры.

Требования к работе над проектом:

1. Практическая проектная работа, письменно.
2. Рисунок идеального кинотеатра.
3. Защита проекта - 5 минут.

Срок выполнения проекта: 1 неделя.

Критерии оценки: рубрика.

Категория/ Оценка	5	4	3	2
Практическая письменная работа	Даны полные ответы на вопросы 1-5 в порядке выполнения проекта.	Даны ответы на большую часть вопросов 1-5. Встречаются небольшие погрешности в расчете ряда и угла.	Даны частичные ответы на вопросы 1-5. Имеются грубые погрешности в расчете ряда и угла.	Даны ответы с ошибками только одному или двум вопросам, или отсутствует ответ.
Рисование кинотеатра	Схема кинотеатра оформлена с эстетикой, а также с точными размерами и яркими цветами.	Схема кинотеатра оформлена с точными размерами.	В оформлении схемы кинотеатра не учтены или не показаны его размеры.	Не оформлена схема кинотеатра.
Математический состав проекта	Расчеты сделаны правильно.	Большая часть расчета выполнена правильно.	Расчеты частично сделаны правильно.	Расчеты произведены неправильно.
Соблюдение требования и порядка	Требование и порядок были полностью соблюдены и работа представлена в срок.	Требование и порядок были соблюдены в большинстве части, и работа представлена во время.	Требование и порядок не соблюдены в большинстве части, работа представлена в срок.	Требование и порядок не соблюдены, работа не представлена в срок.
Навыки презентации проекта	Информация была представлена с отличным знанием и творческим подходом.	Информация была представлена с приемлемым знанием и творческим подходом.	Информация была представлена с ограниченным знанием и творческим подходом.	Информация неясна или отсутствует, представлена с ограниченным творческим подходом.
Навык работы в группе	Каждый член группы внес свой вклад в материал проекта и презентацию.	Большинство из членов группы внес свой вклад в материал проекта и презентацию.	Некоторые члены группы внесли свой вклад в материал проекта и презентацию.	Отдельные члены группы внесли свой вклад в материал проекта и презентацию.

ГДЕ СИДЕТЬ В КИНО?

Всем известно, что угловой размер объекта зависит от его удалённости от зрителя. Чем дальше объект, тем меньше его угловой размер. Угловой размер определяется углом зрения, под которым предмет виден зрителю целиком.

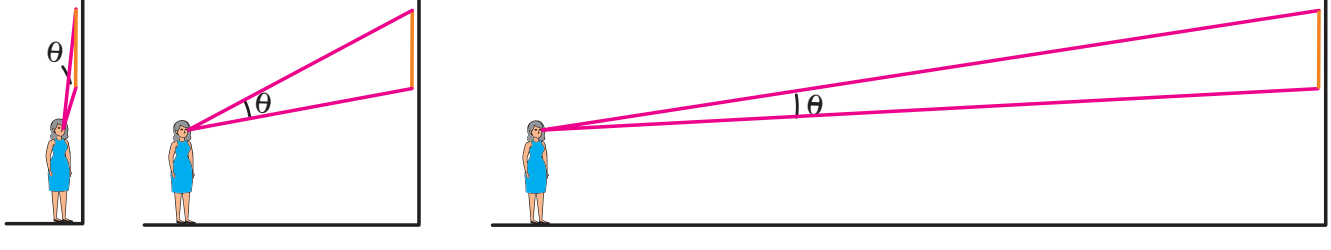


Рисунок 1

Если вы смотрите на картину на стене, как далеко вы должны находиться, чтобы получить максимальный обзор? Если картина висит выше уровня глаз, то стягивающий угол явно мал, если вы находитесь слишком близко или слишком далеко, как показано на рисунках 1 и 2. То же самое происходит и при выборе места в кинотеатре.

Пример 1. Экран в кинотеатре имеет высоту 22 фута (1 fut = 0,3048 m) и высоту 10 футов над уровнем пола. Первый ряд сидений находится в 7 футах от экрана, а ряды друг от друга – в 3 футах. Вы решаете сесть в ряд с максимальной видимостью, то есть там, где угол θ экрана в вашем ряде максимален. Допустим, ваши глаза находятся на высоте 4 фута над полом, как на картинке, и вы сидите на расстоянии x от экрана (рис. 1).

Задание 1. Докажите, что справедливо равенство $\theta = arctg\frac{\text{ù}}{x} - arctg\frac{}{x}$.

Задание 2. Используйте формулу тангенса разности, чтобы получить равенство

$$\theta = arctg\left(\frac{22x}{x^2+168}\right).$$

Задание 3. Считая θ как функцию от x, постройте её график. При этом рекомендуется использование приложение GeoGebra. Какое значение x максимизирует θ? В каком ряду лучше сидеть? Какой угол обзора в этом ряду?

Пример 2. Предположим, что начиная с первого ряда пол зала наклонён под углом α к горизонту, а расстояние между рядами равно 3, длина наклона, как показано на рис. 2, равна x. **Задание 4.** Используйте формулу для косинусов, чтобы вывести:

$$\theta = arccos\left(\frac{a^2+b^2-484}{2ab}\right).$$

Здесь

$$a^2 = (7+x\cos\alpha)^2 + (28-x\sin\alpha)^2$$

и

$$b^2 = (7+x\cos\alpha)^2 + (x\sin\alpha-6)^2.$$

Задание 5. С помощью графического приложения GeoGebra. начертите зависимость θ от x и найдите значение x, которое максимизирует θ. В каком ряду лучше сидеть? Какой угол обзора в этом ряду?

Рисунок 2

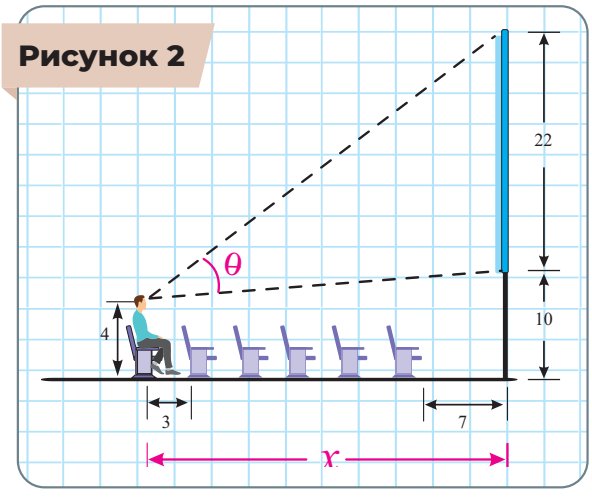
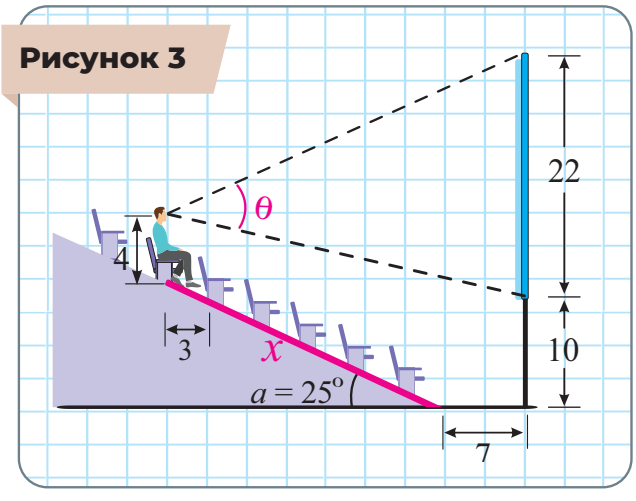


Рисунок 3



ПРОЕКТНАЯ РАБОТА

Модель хищник-жертва

Функции синус и косинус в основном используются в физике и технике для моделирования колебательного поведения, такого как движение маятника или ток в электрической цепи. Но эти черты проявляются и в других дисциплинах. В этом проекте мы рассмотрим использование тригонометрических функций в биологии – мы будем использовать функцию синуса для моделирования популяции хищника и его жертвы.



Предполагается, что на изолированном острове обитают два вида млекопитающих: рыси и кролики. Рысь – хищник, который питается кроликами,а кролик является его добычей..

Как показано на рисунке 1, популяции рысей и кроликов периодически колеблются. В части A графика много кроликов, поэтому рыси много едят и их численность увеличивается. К моменту, описанному в части B, рыси питаются кроликами так много, что популяция кроликов сокращается. В части C популяция кроликов сократилась настолько, что рыси стало не хватать пищи, поэтому популяция рысей начинает сокращаться. В результате гибели слишком большого количества рысей в части D количество врагов кроликов уменьшится, а их количество снова увеличится. Это возвращает нас к исходной точке, и цикл повторяется снова и снова.

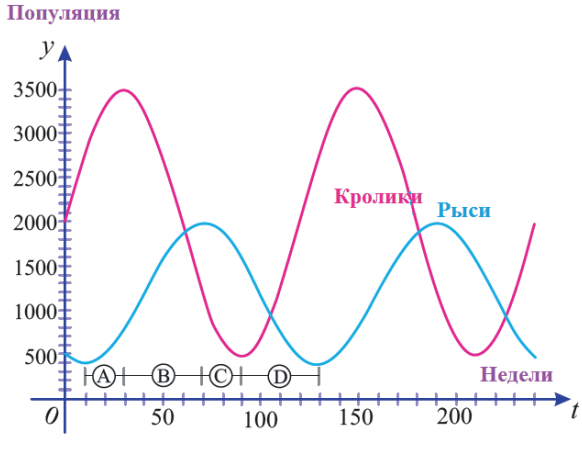


Рисунок 1

Графики на рисунке 1 состоят из сдвинутой вверх синусоиды, поэтому они представляют собой графики функций вида

$$y = a\sin k(t-b)+c$$

Здесь c – величина вертикального смещения синусоиды. Отметим, что среднее значение функции c составляет половину от наибольшего и наименьшего значений на графике. Амплитуда – это величина отклонений от среднего значения графика (см. рис. 2).

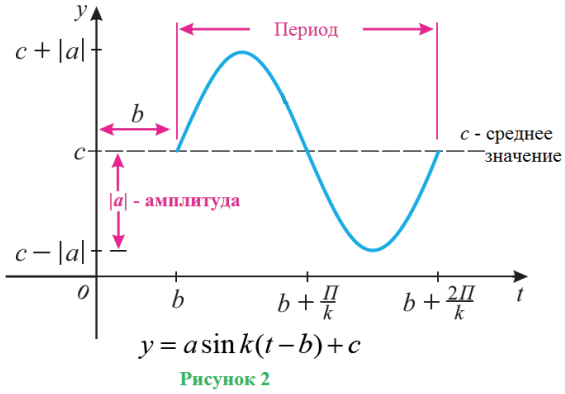


Рисунок 2

Задания

1. Найдите функции вида $y = a\ sin\ k(t-b)+c$, которые моделируют популяции рыси и кролика, изображенные на рисунке 1. Нарисуйте график обеих составленных вами функций в GeoGebra и сравните их с рисунком 1. Проверьте правильность функций, построенных вами.

2. Добавьте функции популяции рысей и кроликов, чтобы сформировать новую функцию, моделирующую общую популяцию млекопитающих на этом острове. Постройте график этой функции в GeoGebra и найдите ее среднее значение, амплитуду, период и отклонение. Как средняя численность и период общей популяции млекопитающих связаны со средней численностью и периодом популяции рыси и кролика?

3. В маленьком озере на острове водятся два вида рыбы: щука и морской окунь. Щука – хищник, питающийся морским окунем. Численность рыб в озере периодически колеблется в течение 180 дней. Количество щук колеблется от 500 до 1500, а количество морского окуня колеблется от 1000 до 3000. После того, как морской окунь достигает максимальной популяции за один период, через 30 дней щука достигает максимальной популяции.

а) Постройте график (аналогично рисунку 1), показывающий два полных цикла популяционного цикла этих видов рыб. Предположим, что популяция окуня максимальна в момент времени $t = 0$.

б) Найдите функцию косинуса вида $y = a\cos k(t-b)+c$, которая моделирует популяцию щуки и морского окуня в озере.

4. В реальной жизни большинство популяций хищников-жертв не будут такими, как описанные здесь примеры. В большинстве случаев популяции как хищника, так и жертвы колеблются, но амплитуда колебаний становится все меньше и меньше, пока обе популяции не стабилизируются около постоянного значения. Нарисуйте приблизительный график, показывающий, как могут вести себя популяции хищников и жертв в этой ситуации.

СУММАТИВНАЯ ОЦЕНКА. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4.

Вариант 1

1. Найти множество значений функции $y = 2\sin 3x - 3\cos 3x$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3\sin x - 4\cos x$.

3. Найти точку пересечения графика функции $ó = (x - \mathbb{0})arctgx$ с осью Ox.

4. Вычислите $\cos\left(2\arcsin\frac{4}{5}\right)$.

5. Найти значение выражения $arctg3 - \arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Вариант 2

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 1 - 6sin2x + 8cos2x$.

2. Найти множество значений функции $y = 4\cos 2x - 6\sin 2x + 5$.

3. Найти точку пересечения графика функции $ó = (x - 2)\arcsin x$ с осью Ox.

4. Вычислите $\sin\left(2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

5. Найти значение выражения $arctg\sqrt{2} - arctg\frac{1}{\sqrt{2}}$.

ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Цель урока: Научить решать простейшие тригонометрические уравнения и неравенства; решать уравнения и неравенства и их системы, проверять решение.

Все учащиеся	Решают уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $tg\,x = a$, $ctg\,x = a$ по формулам. Знают, что уравнения $\sin x = a$ и $\cos x = a$ не имеют корней при $\lvert a \rvert > 1$.
Большинство учащихся	Решают простейшие уравнения, приводящие к виду $\sin x = a$, $\cos x = a$, $tg\,x = a$, $ctg\,x = a$. Например, $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Находят корни уравнений $\sin x = a$, $\cos x = a$, $tg\,x = a$, $ctg\,x = a$ в заданном промежутке. Например, находят корни уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$, лежащие в отрезке $[0;\, 4\pi]$. Решают тригонометрическое уравнение, применяя единичную окружность..
Некоторые учащиеся	Решают уравнения, приводящие к виду $\sin x = a$, $\cos x = a$, $tg\,x = a$, $ctg\,x$ a. Например, $\sin 5x \cos 2x + \cos 5x \sin 2x = -\frac{1}{2}$. Решают тригонометрическое уравнение графически.

Оценка

Учащиеся оцениваются в классе на основе формативной оценки.

Рекомендуется использовать дифференцированный подход, основанный на успеваемости учащихся, при котором все учащиеся должны уметь решать зеленые примеры.

Рекомендуется показать решение по крайней мере 1 зеленого, 1 синего примеров.

Кроме того, для приобретения учащимися знаний, умений и навыков по решению уравнений типа $\sin x = 1$, $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x = 0$, $\cos x = \frac{1}{2}$, $tg\,x = \sqrt{3}$, $ctg\,x = 1$, ... рекомендуется проводить самостоятельную работу и математический диктант.

В план занятия прибавьте решение уравнений вида $2\sin x \cos x = 1$, $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$, $tg\,x + 2 = \cos^2 x + \sin^2 x$, $\sin x = tg\,x\,ctg\,x$, $\cos x\left(\sin x - 2\right) = 0$ и т. д.

Активизирующие вопросы

1. Чему равны синус, косинус, тангенс и котангенс углов 0°, 30°, 45°, 60°, 90°?
3. Какие из тригонометрических функций четные, а какие нет?
4. Какие значения может принимать $\sin x$ ($\cos x$, $tg\,x$, $ctg\,x$)?
5. Как вычисляется арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс отрицательного числа?

Допустимые ошибки и рекомендации по их устранению

В большинстве случаев учащиеся корни уравнений вида $cos\,x = \frac{1}{2}$ записывают как $x = \frac{\pi}{3}$. Необходимо подчеркнуть, что если тригонометрическое уравнение имеет хотя бы один корень, то оно имеет бесконечно много корней.

Уравнения вида $sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$ лучше решать, заменяя его равносильным уравнением $sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

Домашнее задание

Примеры 1 (f, l,0), 2 (f, l, o,r), 3 (f, h, k), 4 (f, h, i), 5 (d).

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

Уравнения вида *sinx = a*

Если $a > 1$ или $a < -1$, то уравнение $sin\,x = a$ не имеет корней. Поэтому в таких случаях пишут, что решение уравнения $sin\,x = a$ состоит из пустого множества $\varnothing$;

Если $-1 \le a \le 1$, то решение уравнения, $sin\,x = a$ состоит из значений вида

$$x = (-1)^n\, arcsin\, a + \pi n,\ n \in Z.$$

Частные случаи.

1) $sinx = -1$. Решение состоит из значений аргумента $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

2) $sinx = 0$. Значения $x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ составляют решение.

3) $sinx = 1$. Множество значений аргумента $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ составляет решение данного уравнения.

Уравнения вида *cosx = a*

Если $a > 1$ или $a < -1$, то уравнение $\boldsymbol{cos\,x = a}$ не имеет корней. Поэтому в таких случаях пишут, что решение уравнения $\boldsymbol{cos\,x = a}$ состоит из пустого множества $\varnothing$;

Если $-1 \le a \le 1$, то решение уравнения $sinx = a$ состоит из значений вида

$$x = \pm\, arccos\, a + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Частные случаи

1) $cosx = -1$. Решение состоит из значений неизвестной $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

2) $cosx = 0$. Решение состоит из совокупности значений неизвестной

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

3) $cosx = 1$. Решение состоит из множества значений неизвестной

$$x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение вида $tgx = a$

Для каждого целого числа n значение

$$x = arctga + \pi n$$

переменной x является корнем уравнения. В этом случае решение имеет вид

$$x = arctga + \pi n,\ n \in Z.$$

Уравнение вида $ctgx = a$

Для каждого целого числа n значение

$$x = arcctga + \pi n$$

переменной x является корнем уравнения, а решение имеет вид

$$x = arcctga + \pi n,\ n \in Z.$$

Пример 1. Решите уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

Решение. Известно, что $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Кроме того, равенство $\sin x = \frac{1}{2}$ выполняется также при значении $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$ (рис. 1). Поскольку синус является периодической функцией с основным периодом 2π, то для любого целого n при

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$$

и

$$x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi n = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

будет выполнено $\sin x = \frac{1}{2}$ (рис. 2). Эти два значения можно обобщить следующим образом:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Действительно, если n чётно, т. е. $n = 2k$, то получим $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$; если n нечётно, то есть $n = 2k+1$ то, $x = -\frac{\pi}{6} + \pi(2k+1)$. Итак, получили полное решение.

Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Рисунок 1

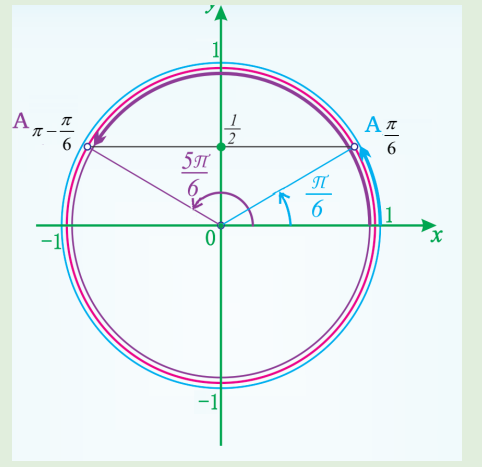
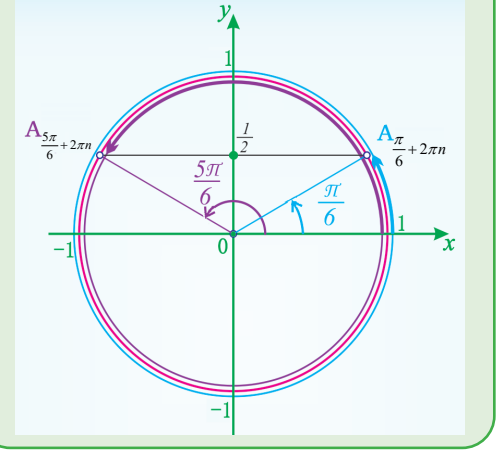


Рисунок 2



Пример 2. Решите уравнение $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Известно, что $\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (рис. 3). Поскольку косинус – периодическая функция с периодом 2π, то равенство $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ будет выполнено (рис. 4) для любого значения аргумента вида $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ или $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$.

Обобщая эти два уравнения, получаем решение уравнения.

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Рисунок 3

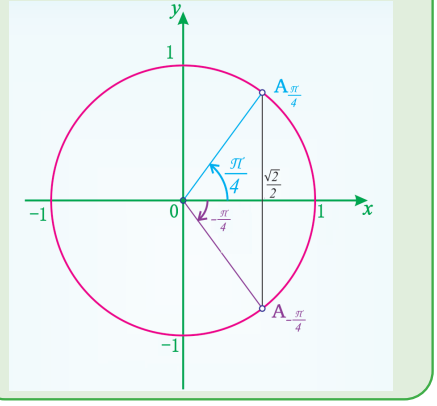
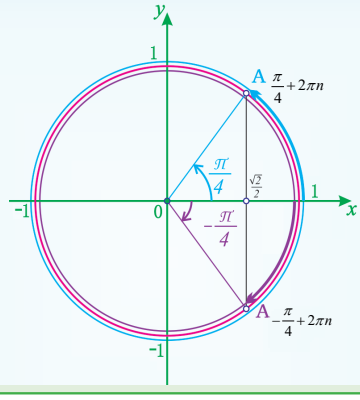


Рисунок 4



ПРИМЕРЫ

1. Решите уравнение.

a) $sin2x=1$ b) $\sin\frac{x}{3} = -1$ c) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 0$

d) $2sin4x=\sqrt{5}$ e) $\sin(4x-1) = -\frac{\pi}{3}$ f) $\sin x = \frac{1}{2}$

g) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ h) $sin4x = 1$ i) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

j) $\sin\left(x + \frac{\pi}{7}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ k) $\sin\frac{2x}{3} = -1$ l) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = 0$

m) $\sin(3x+1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ n) $\sin(-x) = -\frac{1}{2}$ o) $\sin\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = 1$

2. Решите уравнение.

a) $\cos\frac{2x}{5} = 1$ b) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{7}\right) = -1$ c) $\cos 8x = 0$

d) $\cos 3x = 1,2$ e) $2\cos(x-1) = \frac{11}{2}$ f) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\cos x = -\frac{1}{2}$ h) $\cos x = -1$ i) $\cos\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

j) $cos\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}$ k) $cos\frac{3x}{4}=0$ l) $cos\,4x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

m) $\sqrt{3}+2cos\frac{\pi x}{9}=0$ n) $1-2cos\frac{3\pi x}{4}=0$ o) $cos\left(\pi\left(x-3\right)\right)=1$

p) $sin^2\frac{2}{3}\boldsymbol{x}=\frac{3}{4}$ q) $cos^2\frac{3}{2}\boldsymbol{x}=\frac{1}{4}$ r) $2cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}=0$

3. Решите уравнение.

a) $tgx=\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $tgx=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ c) $tgx=-1$

d) $tgx=\sqrt{3}$ e) $tg\frac{2x}{5}=-\sqrt{3}$ f) $tg\left(x+\frac{7\pi}{3}\right)=1$

g) $tg(\frac{\pi}{4}\left(x-1\right)=0$ h) $1-\sqrt{3}tg\frac{2\pi x}{7}=0$ i) $tg9x=tg45°$

j) $tg6x=tg\frac{2\pi}{3}$ k) $3tg\left(x+\frac{5\pi}{36}\right)+\sqrt{3}=0$

4. Решите уравнение.

a) $ctgx=\sqrt{3}$ b) $ctgx=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ c) $ctg4x=sin0°$

d) $ctg(\pi\left(2x+3\right)=cos0°$ e) $\sqrt{3}+ctg\frac{\pi x}{5}=0$ f) $ctg7x=-\sqrt{3}$

g) $ctg\frac{3x}{2}=1$ h) $ctg3x=\sqrt{3}$ i) $ctg\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=0$

5. Найдите корни уравнения в заданном отрезке.

a) $sin3x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $[0;2\pi]$ b) $cos\,3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $[-\pi;\pi]$

c) $tg\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $[0;\pi]$ d) $ctg4x=-1$, $[-3\pi;3\pi]$

6. При каких значениях a верно равенство $tgx=\frac{a+1}{a-1}$?

7. При каких значениях a справедливо равенство $sin\,x=a+\frac{1}{a}$?

Решение: Для того, чтобы заданное равенство имело место, требуется выполнение двойного неравенства $-1\le a+\frac{1}{a}\le 1$. При $a=0$ правая часть неравенства не определена. Итак, $a+\frac{1}{a}$. $a>0$ Поэтому имеем $a+\frac{1}{a}\ge 2$, a< 0 и $a+\frac{1}{a}\le -2$.

Ответ: Заданное равенство не имеет место ни при каком значении $a \in \varnothing$.

Этих формул из теоретической части может быть достаточно.

I. Если $\sin x = a,\ x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z$, то $a \in [-1;1]$.

Если $a = 1, a = -1, a = 0$, то $\sin x = a$ решения уравнений можно записать более простыми формулами:

$\sin x = 1,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z.$

$\sin x = -1,\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z.$

$\sin x = 0,\ x = \pi k, k \in Z.$

II. $\cos x = a, x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in Z.$

Если $a = 1, a = -1, a = 0$, то $\cos x = a$ решения уравнений можно записать более простыми формулами:

$\cos x = 1,\ x = 2\pi k, k \in Z.$

$\cos x = -1,\ x = \pi + 2\pi k, k \in Z.$

$\cos x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$

III. $tgx = a,\ x = arctga + \pi k, k \in Z.$

IV. $ctgx = a,\ x = arcctga + \pi k, k \in Z.$

8. При каких значениях a выполняется равенство $5\cos(2x-3) = a - \frac{6}{a}$?

9. При каких значениях a не выполняется равенство $5\sin(x-7) = a - \frac{4}{a}$?

ОТВЕТЫ

1. **a)** $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$ **b)** $-\frac{3\pi}{2} + 6\pi n, n \in Z$ **c)** $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$

d) не имеет решения **e)** не имеет решения **f)** $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

g) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$ **h)** $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$ **i)** $(-1)^n \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$

j) $\frac{4\pi}{21} + 2\pi n; \frac{11\pi}{21} + 2\pi n, n \in Z$ **k)** $-\frac{3\pi}{4} + 3\pi n, n \in Z$ **l)** $-\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$

m) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$ **n)** $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$ **o)** $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$

2. **a)** $5\pi n, n \in Z$ **b)** $\frac{4\pi}{7} + \pi n, n \in Z$ **c)** $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}, n \in Z$

d) не имеет решения **e)** не имеет решения **f)** $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

g) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$ **h)** $\pi+2\pi n, n\in Z$ **i)** $\pm\frac{3\pi}{2}+4\pi n, n\in Z$

j) $\frac{8\pi}{15}+2\pi n; -\frac{2\pi}{15}+2\pi n, n\in Z$ **k)** $\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi n}{3}, n\in Z$ **l)** $\pm\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$

m) $\pm 7,5+18n, n\in Z$ **n)** $\pm\frac{4}{9}+\frac{8}{3}n, n\in Z$ **o)** $3+2n, n\in Z$

p) $\pm\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi n}{2}, n\in Z$ **q)** $\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}, n\in Z$ **r)** $\frac{\pi}{2}+\pi n; -\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$

3. a) $\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$ **b)** $-\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$ **c)** $-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$

d) $\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$ **e)** $-\frac{5\pi}{6}+\frac{5\pi n}{2}, n\in Z$ **f)** $-\frac{25\pi}{12}+\pi n, n\in Z$

g) $1+4n, n\in Z$ **h)** $\frac{7}{12}+\frac{7}{2}n, n\in Z$ **i)** $\frac{\pi}{36}+\frac{\pi n}{9}, n\in Z$

j) $-\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{6}, n\in Z$ **k)** $-\frac{11\pi}{36}+\pi n, n\in Z$

4. a) $\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$ **b)** $\frac{2\pi}{3}+\pi n, n\in Z$ **c)** $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}, n\in Z$

d) $-1\frac{3}{8}+\frac{1}{2}n, n\in Z$ **e)** $4\frac{1}{6}+5n, n\in Z$ **f)** $\frac{5\pi}{42}+\frac{\pi n}{7}, n\in Z$

g) $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}, n\in Z$ **h)** $\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}, n\in Z$ **i)** $\frac{7\pi}{20}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$

5. a) $\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{11\pi}{12},\frac{17\pi}{12},\frac{19\pi}{12}$ **b)** $-\frac{13\pi}{18},-\frac{11\pi}{18},-\frac{\pi}{18},\frac{\pi}{18},\frac{11\pi}{18},\frac{13\pi}{18}$ **c)** $\frac{\pi}{3}$

d) $-\frac{45\pi}{16},-\frac{41\pi}{16},-\frac{37\pi}{16},-\frac{33\pi}{16},-\frac{29\pi}{16},-\frac{25\pi}{16},-\frac{21\pi}{16},-\frac{17\pi}{16},-\frac{13\pi}{16},-\frac{9\pi}{16},-\frac{5\pi}{16},-\frac{\pi}{16},\frac{3\pi}{16},\frac{7\pi}{16},$

$\frac{11\pi}{16},\frac{15\pi}{16},\frac{19\pi}{16},\frac{23\pi}{16},\frac{27\pi}{16},\frac{31\pi}{16},\frac{35\pi}{16},\frac{39\pi}{16},\frac{43\pi}{16},\frac{47\pi}{16}$

6. $a\in(-\infty;1)\cup(1;\infty)$ **7.** $a\in\varnothing$ **8.** $[-6;-1]\cup[1;6]$

9. $\left[-\frac{5+\sqrt{41}}{2};\frac{5-\sqrt{41}}{2}\right]\cup\left[\frac{-5+\sqrt{41}}{2};\frac{5+\sqrt{41}}{2}\right]$

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Цель урока: Научить решать простейшие тригонометрические уравнения; решать некоторые тригонометрические уравнения.

Все учащиеся	Решают тригонометрические уравнения вида $a\,f^2(x)+b\,g(x)+c=0$, где $f(x)$, $g(x)$ – функции вида $\sin x$, $\cos x$, $tg\,x$, $ctg\,x$. Например, $a\sin^2 x+b\cos x+c=0$, или $a\,tg\,x+b\,ctg\,x+c=0$. Умеют решать тригонометрические уравнения вида $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$.
Большинство учащихся	Умеют решать тригонометрические уравнения вида $a\sin x+b\sin x=c$, или $\sin kx-\sin mx=\cos nx$.
Некоторые учащиеся	Умеют решать тригонометрические уравнения вида $a\sin 2x+b(\sin x\pm\cos x)=0$. Решают уравнения с тригонометрической функцией переменной в знаменателе

Оценка

Учащиеся оцениваются в классе на основе формативной оценки.

Рекомендуется использовать дифференцированный подход, основанный на успеваемости учащихся, при котором все учащиеся должны уметь решать зеленые примеры.

Рекомендуется показать решение по крайней мере 1 зеленого, 1 синего примеров.

Активизирующие вопросы

1. Какие уравнения называют простейшими тригонометрическими уравнениями?
2. В чем может быть своеобразное отличие тригонометрических уравнений от уравнений, изученных до сих пор в школе? (Важно понимать, что они имеют бесконечно много решений.)
3. Что означает запись $n\in Z$ в формулах, указывающих корни тригонометрических уравнений? (Важно отметить, что n, будучи целым числом, принимает бесконечно много значений, каждому значению которого соответствует один корень уравнения)

Допустимые ошибки и рекомендации по их устранению

1. Иногда при решении тригонометрические уравнения возведением обе части равенства в квадрат, приводит к появлению посторонних корней. Может случиться, что лучше будет таких уравнений решать перейдя к половине аргумента. Например, уравнений вида $\sin \pm \cos x=1$.

1. Сокращение всех членов тригонометрического уравнения может привести к потере корней. Например, в уравнениях вида $\sin x\cdot\cos x=\sin x$.

2. При решении тригонометрических уравнений, в которых присутствуют tgx или $ctgx$, требуется обратить внимание на область определения уравнения.

Домашнее задание

Примеры **2, 6, 9, 13, 16, 21, 26, 30, 35.**

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

Уравнения, приведённые к квадратным уравнениям

Пример 1. Решите уравнение $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$.

Решение.

Это квадратное уравнение относительно $\sin x$. Если обозначим $\sin x = t$, то получим $2t^2 - 3t + 1 = 0$. Его корни $t_1 = 1, \quad t_2 = \frac{1}{2}$. Подставляя эти значения, мы получим

1) $\sin x = 1,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$, 2) $\sin x = \frac{1}{2},\ x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = c$

Пример 5. Решите уравнение $3\sin x - 2\cos x = 0$.

Решение.

1) Разделив обе части уравнения на $\cos x$, составим уравнение $3tgx - 2 = 0$. Решаем последнее уравнение

2) $3tgx - 2 = 0, \Rightarrow tgx = \frac{2}{3}, \Rightarrow x = arctg\frac{2}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $x = arctg\frac{2}{3} + \pi n,\ n \in Z$

Уравнения, допускающие разложение на множители

Пример 8. Решите уравнение $\sin 9x - \sin x = \cos 5x$.

Решение.

Так как $\sin 9x - \sin x = 2\sin\frac{9x - x}{2}\cos\frac{9x + x}{2} = 2\sin 4x\cos 5x$,

то $2\sin 4x\cos 5x = \cos 5x \Rightarrow \cos 5x(2\sin 4x - 1) = 0$. Далее каждый множитель приравняем к нулю и решим полученное уравнение:

1) $\cos 5x = 0,\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5},\ n \in Z$

2) $2\sin 4x - 1 = 0 \Rightarrow \sin 4x = \frac{1}{2},\ 4x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z,\ x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4},\ n \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5},\ x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4},\ n \in Z$.

ПРИМЕРЫ

1. $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$

2. $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$

3. $2ctg^2 3x - 3ctg3x + 1 = 0$

4. $tg^2 x - 2tgx = 3$

5. $2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$

6. $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0$

7. $2\cos x = 1 - \sqrt{\cos x}$

8. $\sin 2x = \cos^4 x - \sin^4 x$

9. $\sin 5x = \frac{2}{3}\cos^2 5x$

10. $\cos^4 \frac{x}{5} + \sin^2 \frac{x}{5} = 1$

11. $3tg2x - 2ctg2x - 1 = 0$

12. $2tgx - 2ctgx = 3$

13. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$

14. $\sin 2x + \cos 2x = 0$

15. $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

16. $\sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 0$

17. $\cos x - \sin x = 1$

18. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

19. $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = -1$

20. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

21. $3\sin x + 4\cos x = 3$

22. $\sin 4x + \cos 4x = 4$

23. $\sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$

24. $\cos 2x = \sqrt{2}\left(\cos x - \sin x\right)$

25.. $\cos 3x \cos 2x = \sin 3x \sin 2x$

26. $\sin 5x \cos 4x - \cos 5x \sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

27. $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$

28. $\cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x$

29. $\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$

30. $\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x$

31. $(2\cos x - 3)\cdot ctgx = 0$

32. $(tgx - 3)(\cos x - \frac{1}{2}) = 0$

33. $tg3x\cos x = 0$

34. $\sin 2x tgx = 0$

35. $\frac{\cos 2x}{1 + tgx} = 0$

Решение. $\cos 2x = 0$ и $1 + tgx \neq 0$. Имеем

$$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z; x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$$

Итак, при $n = 2k + 1$, $k \in Z$, т. е. при нечётных $n \in Z$ значения

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(2n + 1) = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in Z$ не являются корнями для заданного уравнения.

$k = 2n, n \in Z$ если $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, то $n \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

36. $\frac{1 - 2\cos 2x}{\cos 2x - 2} = 0$

37. $\frac{tgx}{\sin 5x} = 0$

38. $\frac{\cos x}{1 - \cos 4x} = 0$

39. $|\cos 2x - 1| - 2|\cos 2x + 2| = 0$

40. $\sin^3 x + \cos^4 x = 1$

41. $\cos x\sqrt{\sin x} = 0$

42. $\cos 3x + 2\cos x = 0$

43. $\sin^{13} x + \cos^{13} x = 1$

44. $\sin 9x = 2\sin 3x$

Решение:

$\sin 9x = 2\sin 3x \Rightarrow \sin 9x - \sin 3x = \sin 3x \Rightarrow 2\sin 3x\cos 6x = \sin 3x \Rightarrow \sin 3x(2\cos 6x - 1) = 0$

$\sin 3x = 0;\ 3x = \pi k, k \in Z;\ x = \frac{\pi k}{3},\ k \in Z.$

$2\cos 6x - 1 = 0;\ \cos 6x = \frac{1}{2};\ 6x = \pm \arccos\frac{1}{2} + 2\pi k, k \in Z;\ 6x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z;\ x = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$

Ответ: $\frac{\pi k}{3},\ \pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$.

ОТВЕТЫ

1. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

2. $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$

3. $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}n,\ \frac{1}{3}arcctg\frac{1}{2} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$

4. $arctg3 + \pi n,\ -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

5. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

6. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$

7. $x = \pm\arccos\frac{1}{4} + 2\pi n, n \in Z$

8. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n, n \in Z$

9. $(-1)^n\frac{\pi}{30} + \frac{\pi n}{5}, n \in Z$

10. $x = \frac{5\pi n}{2}, n \in Z$

11. $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},-\frac{1}{2}arctg\frac{2}{3}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$

12. $arctg2+\pi n$, $-arctg\frac{1}{2}+\pi n, n\in Z$

13. $\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$

14. $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n, n\in Z$

15. $x=-\frac{5\pi}{12}+\pi n, n\in Z$

16. $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$

17. $2\pi n, -\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$

18. $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$

19. $2\pi+4\pi n$, $-\pi+4\pi n, n\in Z$

20. $x=(-1)^n\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$

21. $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $-2arctg\frac{1}{7}+2\pi n, n\in Z$

22. $x\in\varnothing$

23. $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$

24. $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$

25. $x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}, n\in Z$

26. $x=(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$

27. $x=\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}, n\in Z$

28. $\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5}$, $x=\frac{3\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$

29. $\frac{\pi n}{4}$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$

30. $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}, n\in Z$

31. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$

32. $arctg3+\pi n$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$

33. $x=\frac{\pi n}{3}, n\in Z$

34. $ù=\pi$, n ∈

35. $\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$

36. $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$

37. *Не имеет решения.*

38. *Не имеет решения.*

39. $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$

40. πn, $\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$

41. πn, $\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$

42. $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$

43. $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $2\pi n, n\in Z$

44. $\frac{\pi n}{3}$, $\pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}, n\in Z$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Цель урока: Научить умеют решать простейшие тригонометрические уравнения и неравенства; решать уравнения, неравенства и их системы, проверять решение.

Все учащиеся	Используя соответствующие формулы, могут записывать решение неравенств, таких как. $\sin x < a$, $\cos x < a$, $tg\,x < a$, $ctg\,x < a$; $\sin x \le a$, $\cos x \le a$, $tg\,x \le a$, $ctg\,x \le a$; $\sin x > a$, $\cos x > a$, $tg\,x > a$, $ctg\,x > a$; $\sin x \ge a$, $\cos x \ge a$, $tg\,x \ge a$, $ctg\,x \ge a$.
Большинство учащихся	Умеют решать тригонометрические уравнения, приводящиеся к видам $\sin x < a$, $\cos x < a$, $tg\,x < a$, $ctg\,x < a$; $\sin x \le a$, $\cos x \le a$, $tg\,x \le a$, $ctg\,x \le a$; $\sin x > a$, $\cos x > a$, $tg\,x > a$, $ctg\,x > a$; $\sin x \ge a$, $\cos x \ge a$, $tg\,x \ge a$, $ctg\,x \ge a$.
Некоторые учащиеся	Могут решать тригонометрические неравенства с помощью единичной окружности. Понимают геометрическую интерпретацию тригонометрических неравенств и их решений.

Оценка

Учащиеся оцениваются в классе на основе формативной оценки.

Рекомендуется использовать дифференцированный подход, основанный на успеваемости учащихся, при котором все учащиеся должны уметь решать зеленые примеры.

Рекомендуется показать решение по крайней мере 1 зеленого, 1 синего примеров.

Активизирующие вопросы

1. Что вы подразумеваете под единичной окружностью с центром в начале координат? Постройте её.

2. Сколько точек на этой окружности имеют ординату, равную $\frac{1}{2}$?

3. На этой окружности укажите точки, ординаты которых больше $\frac{1}{2}$ (меньше $\frac{1}{2}$).

4. Выделите дугу, образованную поворотом точки $(1;\ 0)$ на единичной окружности на угол в пределах заданного промежутка: a) $(0^0;\ 180^0)$; b) $[-120^0;\ 0^0]$.

Допустимые ошибки и рекомендации по их устранению

Учащиеся испытывают трудности при оформлении ответа после решения неравенства с помощью окружности. Необходимо научиться сформулировать интервалы в обратном направлении движения часовой стрелки.

У учащихся рекомендуется сформировать знания того, что при $a > 1$ для неравенства $\sin x > a$, $\sin x \geq a$, $\cos x > a$ и $\cos x \geq a$ решение – пустое множество $\varnothing$, а для $\sin x < a$, $\sin x \leq a$, $\cos x < a$ и $\cos x \leq a$ решением является вся числовая прямая $R = (-\infty; +\infty)$.

Домашнее задание

Примеры **1 (i, j, k, l), 2 (i, ,j, k, l), 3 (f, g, h), 4 (d), 5 (f).**

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

Тогда для некоторого числа a простейшими тригонометрическими неравенствами считаются неравенства вида $f(x) < a$, $f(x) \leq a$, $f(x) > a$, $f(x) \geq a$.

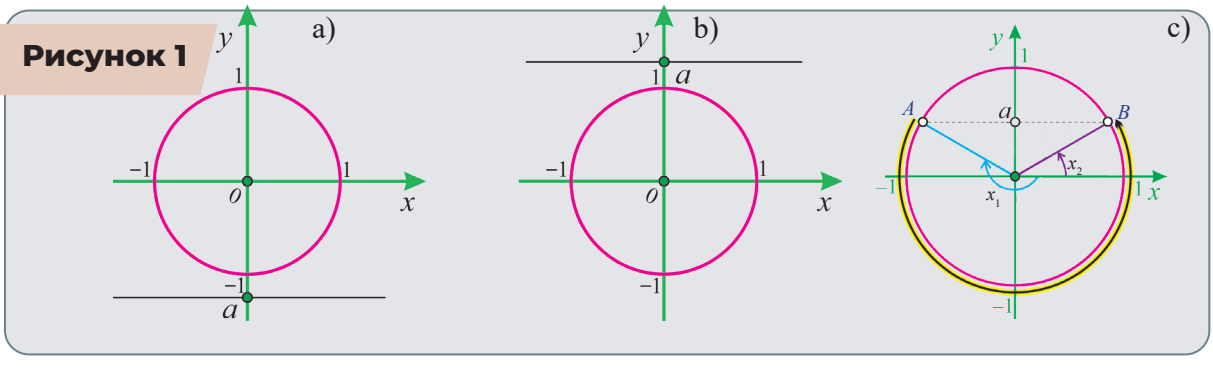
Решение неравенств $\sin x < a$ и $\sin x \leq a$

При решении этого неравенства рассмотрим следующие случаи значений a.

1) Если $a \leq -1$, то решением неравенства $\sin x < a$ является $\varnothing$ (рис. 1a).
2) Если $a > 1$, решение неравенства $\sin x < a$ есть числовая ось $(-\infty; +\infty)$ (рис. 1b).
3) Если $a < -1$, то решение неравенства $\sin x \leq a$ является $\varnothing$ (рис. 1a).
4) Если $a \geq 1$, решение неравенства $\sin x \leq a$ есть числовая ось $(-\infty; +\infty)$(рис. 1b).
5) Если $a = -1$, решением неравенства $\sin x \leq -1$ является множество, состоящее из значений переменной $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.
6) Если $a = 1$, то неравенство $\sin x < 1$ выполнено во всех точках числовой оси $(-\infty; +\infty)$, кроме точек $\frac{\pi}{2} + 2\pi n\ \ n \in Z$. Эта ситуация может быть записана так:

$$x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi(n+1)\right),\ n \in Z \text{ или } x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Рисунок 1



7) При $-1 < a < 1$ решением неравенства $\sin x < a$ является (рис. 1c) множество тех значений переменной x, для которых выполнены неравенства

$$x_1 < x < x_2$$
$$x_1 = -\pi - \arcsin a$$
$$x_2 = \arcsin a$$

$$-\arcsin a + (2n-1)\pi < x < \arcsin a + 2n\pi,\ n \in Z.$$

8) При $-1 < a < 1$ решением неравенства $\sin x \leq a$ является (рис. 1c) множество тех значений переменной x, для которых выполнены неравенства

$$-\arcsin a + (2n-1)\pi \leq x \leq \arcsin a + 2n\pi,\ n \in Z.$$

Решение неравенств $cosx < a$ и $cosx \le a$

1) Если $a \le -1$, то решением неравенства $cosx < a$ является $\varnothing$ (рис. 2a).

2) Если $a > 1$, то решением неравенства $cosx < a$ является вся числовая прямая $(-\infty; +\infty)$ (рис. 2b).

3) Если $a < -1$, то решением неравенства $cosx \le a$ является $\varnothing$ (рис. 2a).

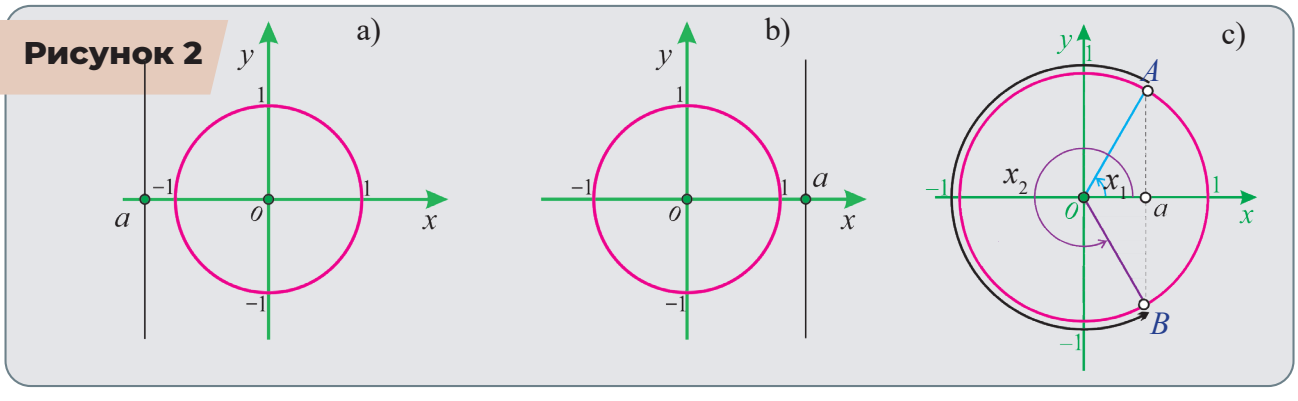
4) Если $a = -1$, то решением неравенства $cosx \le -1$ является множество точек $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$.

5) Если $a = 1$, то решением неравенства $cosx < 1$ является множество тех точек x, для которых $x \ne 2\pi n$ $x \ne 2\pi n$.

Решение в этом случае может быть записано так: $x \in (2\pi n; 2\pi(n+1))$ $n \in Z$

6) Если $a \ge 1$, то решением неравенства $cosx \le a$ является вся числовая прямая $(-\infty; +\infty)$ (рис. 2b).

Рисунок 2



7) Если $-1 < a < 1$, то решением неравенства $cosx < a$ является (рис. 2c) множество тех значений переменной x, для которой выполнены неравенства

$$\boldsymbol{arccosa + 2\pi n < x < 2\pi - arccosa + 2\pi,\ n \in Z.}$$

8) Если $-1 < a < 1$, то решением неравенства $cosx \le a$ является (рис. 2c) множество тех значений переменной x, для которой выполнены неравенства

$$\boldsymbol{arccosa + 2\pi n \le x \le 2\pi - arccosa + 2\pi,\ n \in Z.}$$

Решение неравенств $tgx < a$ и $tgx \le a$

При решении неравенств $tgx < a$ и $tgx \le a$ целесообразно использовать график функции $y = tgx$ (рис. 3).

Из рис. 3 видно, что неравенства $tgx < a$ и $tgx \le a$ справедливы при значениях x, для которых $-\frac{\pi}{2} < x < arctga$ и $-\frac{\pi}{2} < x \le arctga$ соответственно. Поскольку $y = tgx$ – периодическая функция с основным периодом π, то решением неравенств $tgx < a$ и $tgx \le a$ являются множества всех значений переменной x, для которых, соответственно, выполнены неравенства

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < arctga + \pi n,\ n \in Z,$$

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \le arctga + \pi n,\ n \in Z.$$

Решение неравенств $ctgx < a$ и $ctgx \le a$

Неравенства $ctgx < a$ и $ctgx \le a$ справедливы при значениях x, для которых

$$arcctg\ a < x < \pi \text{ и } arcctg\ a \le x < \pi,$$

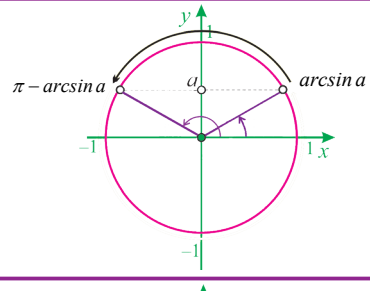
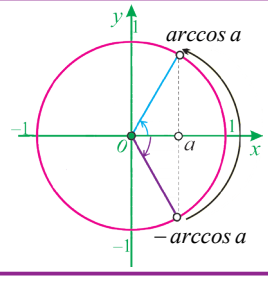
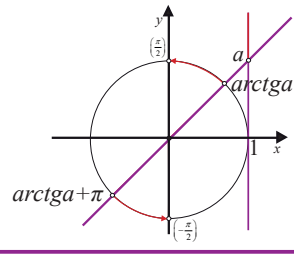
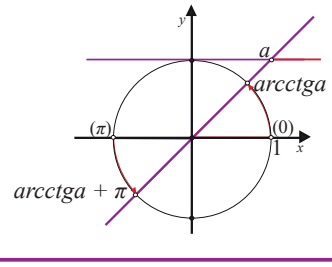
соответственно. Поскольку $y=ctgx$ – периодическая функция с основным периодом π, то решением неравенств $ctgx < a$ и $ctgx \le a$ являются множества всех значений переменной x, для которых, соответственно, выполнены неравенства

$$\boldsymbol{arcctga + \pi n < x < \pi + \pi n,\ n \in Z,}$$

и

$$\boldsymbol{arcctga + \pi n \le x < \pi + \pi n,\ n \in Z.}$$

Решение некоторых тригонометрических неравенств

Неравенство	Решение	Изображение на окружностях
$\boldsymbol{sinx > a}$	$arcsin\,a + 2\pi n < x < \pi - arcsin\,a + 2\pi n,\ n \in Z$	
$\boldsymbol{cosx > a}$	$-arccos\,a + 2\pi n < x < arccos\,a + 2\pi n,\ n \in Z$	
$\boldsymbol{tgx > a}$	$arctga + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$	
$\boldsymbol{ctgx > a}$	$\pi n < x < arcctga + \pi n,\ n \in Z$	

Пример 1. Решите неравенство: $\sin x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение

$$-\pi - arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n \le x \le arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z$$

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le x \le -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$$

Ответ: $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right],\ \mathrm{n} \in Z$.

Пример 2. Решите неравенство: $\cos x \le \frac{1}{2}$.

Решение

$$-arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n \le x \le arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z$$

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le x \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$$

Ответ: $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right],\ n \in Z$

Пример 3. Решите неравенство: $tg\frac{x}{4} \le -1$.

Решение

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < \frac{x}{4} \le arctg(-1) + \pi n,\ \mathrm{n} \in Z$$

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < \frac{x}{4} \le -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ \mathrm{n} \in Z$$

$$-2\pi + 4\pi n < x \le -\pi + 4\pi n,\ \mathrm{n} \in Z$$

Ответ: $\left(-2\pi + 4\pi n; -\pi + 4\pi n\right],\ \mathrm{n} \in Z$.

Пример 4. Решите неравенство: $ctg\frac{x}{5} < -\sqrt{3}$.

Решение

$$arcctg\left(-\sqrt{3}\right) + \pi n < \frac{x}{5} < \pi + \pi n,\ n \in Z \quad \Rightarrow \quad \frac{5\pi}{6} + \pi n < \frac{x}{5} < \pi + \pi n,\ n \in Z \quad \Rightarrow$$

$$\frac{25\pi}{6} + 5\pi n < x < 5\pi + 5\pi n,\ \mathrm{n} \in Z$$

Ответ: $\left(\frac{25\pi}{6} + 5\pi n; 5\pi + 5\pi n\right),\ \mathrm{n} \in Z$.

ПРИМЕРЫ

1. Решите неравенства.

a) $sinx > 1$ b) $sinx \geq 1$ c) $sinx < 1$ d) $sinx \leq 1$

e) $sinx > -1$ f) $sinx \geq -1$ g) $sinx < -1$ h) $sinx \leq -1$

i) $sinx > 1,5$ j) $sinx \geq -1,2$ k) $sinx < 1,1$ l) $sinx \leq -2$

2. Решите неравенства.

a) $cosx > 1$ b) $cosx \geq 1$ c) $cosx < 1$ d) $cosx \leq 1$

e) $cosx > -1$ f) $cosx \geq -1$ g) $cosx < -1$ h) $cosx \leq -1$

i) $cosx > 2$ j) $cosx \geq -1,6$ k) $cosx < 1,4$ l) $cosx \leq -1,7$

3. Решите неравенства.

a) $sin\,2x \geq 0$ b) $cos\,3x \leq 0$ c) $cos\,x \leq \frac{1}{2}$ d) $sin\,x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $cos\,2x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $sin\,3x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ g) $\sqrt{2} - 2\,sin\,x > 0$ h) $2\,cos\,x + \sqrt{3} \leq 0$

4. Решите неравенства.

a) $sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) < 0$ b) $cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 0$

c) $cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. Решите неравенства.

a) $tg\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \geq \sqrt{3}$ b) $tg\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) > 0$ c) $ctg\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $ctg\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$ e) $ctg\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) < 0$ f) $tg\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) \leq -1$

6. Найдите решение неравенства $sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \quad \frac{1}{2}$ в отрезке $[0;\ \pi]$.

7. Найдите решение неравенства $tg\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) < -\sqrt{3}$ в отрезке $\left[-\frac{3}{8}; \frac{21}{8}\right]$

8. Решите неравенства.

a) $cos2x - 3cosx < 0$ b) $2sin^2x - 5sinx + 3 \geq 0$

c) $3cos^2x + 7cosx + 4 \leq 0$ d) $tg^2x - 4tgx + 3 < 0$

9. Решите неравенства.

a) $cos\left(3sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right)<-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $sin\left(cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)>-\frac{1}{2}$

Решение: a)

$$arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\pi k<3sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)<2\pi-arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\pi k, k\in Z$$

$$\frac{5\pi}{6}+2\pi k<3sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)<2\pi-\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$$

$$\frac{5\pi}{6}+2\pi k<3sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)<\frac{7\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$$

$$\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3}<sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)<\frac{7\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3}, k\in Z$$

1) При $k=0$ получим $\frac{5\pi}{18}<sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)<\frac{7\pi}{18}$. В этом случае достаточно решить неравенство.

Имеем $sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)>\frac{5\pi}{18}$.

$$arcsin\frac{5\pi}{18}+2\pi k<x-\frac{\pi}{6}<\pi-arcsin\frac{5\pi}{18}+2\pi k, k\in Z$$

$$\frac{\pi}{6}+arcsin\frac{5\pi}{18}+2\pi k<x<\frac{7\pi}{6}-arcsin\frac{5\pi}{18}+2\pi k, k\in Z$$

2) При $k=-1$ получим $-\frac{7\pi}{18}<sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)<-\frac{5\pi}{18}$. Это двойное неравенство равносильно неравенству $sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)<-\frac{5\pi}{18}$. Решаем неравенство:

$$-\pi-arcsin\left(-\frac{5\pi}{18}\right)+2\pi k<x-\frac{\pi}{6}<arcsin\left(-\frac{5\pi}{18}\right)+2\pi k, k\in Z$$

$$-\pi+arcsin\frac{5\pi}{18}+2\pi k<x-\frac{\pi}{6}<-arcsin\frac{5\pi}{18}+2\pi k, k\in Z$$

$$arcsin\frac{5\pi}{18}-\frac{5\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{\pi}{6}-arcsin\frac{5\pi}{18}+2\pi k, k\in Z$$

Ответ: $arcsin\frac{5\pi}{18}-\frac{5\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{\pi}{6}-arcsin\frac{5\pi}{18}+2\pi k,$

$\frac{\pi}{6}+arcsin\frac{5\pi}{18}+2\pi k<x<\frac{7\pi}{6}-arcsin\frac{5\pi}{18}+2\pi k, k\in Z$.

ОТВЕТЫ

1. **a)** $x \in \varnothing$ **b)** $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ **c)** $x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ **d)** $x \in R$

e) $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ **f)** $x \in R$ **g)** $x \in \varnothing$ **h)** $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

i) $x \in \varnothing$ **j)** $x \in R$ **k)** $x \in R$ **l)** $x \in \varnothing$

2. **a)** $x \in \varnothing$ **b)** $x = 2\pi n, n \in Z$ **c)** $x \neq 2\pi n, n \in Z$ **d)** $x \in R$ **e)** $x \neq \pi + 2\pi n, n \in Z$

f) $x \in R$ **g)** $x \in \varnothing$ **h)** $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$ **i)** $x \in \varnothing$ **j)** $x \in R$ **k)** $x \in R$ **l)** $x \in \varnothing$

3. **a)** $\left[\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right], n \in Z$ **b)** $\left[\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}\right], n \in Z$ **c)** $\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in Z$

d) $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in Z$ **e)** $\left(-\frac{\pi}{8} + \pi n; \frac{\pi}{8} + \pi n\right), n \in Z$

f) $\left(-\frac{4\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}\right), n \in Z$ **g)** $\left(-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in Z$

h) $\left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z$

4. **a)** $\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}\right), n \in Z$ **b)** $\left[\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi n\right], n \in Z$

c) $\left(\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$ **d)** $\left(\frac{\pi}{24} + \pi n; \frac{19\pi}{24} + \pi n\right), n \in Z$

5. **a)** $\left[\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}\right), n \in Z$ **b)** $\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}; \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}\right), n \in Z$

c) $\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; \frac{11\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}\right), n \in Z$ **d)** $\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}\right], n \in Z$

e) $\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}; \frac{4\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}\right), n \in Z$ **f)** $\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4}; -\frac{\pi}{48} + \frac{\pi n}{4}\right], n \in Z$

6. $\left(\frac{5\pi}{12}; \frac{3\pi}{4}\right)$

7. $\left[-\frac{3}{8}; -\frac{\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{21}{8}\right]$

8. **a)** $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z$ **b)** $x \in (-\infty; \infty)$

c) $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$ **d)** $\left(\frac{\pi}{4} + \pi n; arctg3 + \pi n\right), n \in Z$

СУММАТИВНАЯ ОЦЕНКА. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5.

Вариант 1

1. Решите уравнение: $\sqrt{3}tg\left(3x-\frac{\pi}{7}\right)=-1$

2. Решите уравнение: $sin\,3x\cdot cos\,x-cos\,3x\cdot sin\,x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Решите уравнение: $3sin^2 2x + 7cos2x - 3 = 0$

4. Решите уравнение: $cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\le 0$

5. Решите уравнение: $cos^2\,2x-sin^2\,2x<\frac{\sqrt{2}}{2}$

Вариант 2

1. Решите уравнение: $\sin\left(4x-\frac{\pi}{7}\right)=-1$

2. Решите уравнение: $3cos^2x - 5sin^2x - sin2x=0$

3. Решите уравнение: $sin2x + cos2x = 1$

4. Решите уравнение: $ctg\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)>-\sqrt{3}$

5. Решите уравнение: $4sinxcosx > -1$

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Цель урока: Научить анализировать элементарные случайные события, строить их модели; получать результаты на основе испытания; различать типы событий; анализировать вероятность случайного события, противоположного события и его вероятность.

Все учащиеся	Знают определения случайного события, совместного события, несовместного события, элементарного события, сложного события, равновозможных событий, противоположных событий.
Большинство учащихся	Могут различать логически ложные рассуждения; решать задачи, исходя из определений и формул.
Некоторые учащиеся	Могут решать нестандартные задачи.

Активизирующие вопросы

1. Что вы подразумеваете под испытанием?
2. Что такое событие?
3. Как вы определили бы вероятность события?
4. Как объяснили бы вы комбинацию предметов в вашей папке?

Допустимые ошибки и рекомендации по их устранению

В большинстве случаях учащиеся выдают логически подходящий результат за ответ, который может оказаться не верным. Необходимо научить подходить к задаче с точки зрения математики, с использованием определений и фактов.

Домашнее задание

Составить примеры, соответствующие введенным определениям.

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

Теория вероятностей – один из основных разделов современной математики. Предметом теории вероятностей является изучение законов случайных событий. Её главные понятия – испытание и событие.

Понятие события

Определение. Любой результат (или последствие) эксперимента называется событием. События обозначаются заглавными буквами латинского алфавита – A, B, C, ...

В обычной жизни, практической деятельности и научных исследованиях часто встречаются эксперименты и испытания, результаты которых нельзя предсказать с полной уверенностью.

Например, при подбрасывании монеты нельзя точно сказать, какая сторона выпадет; неизвестно попадание в цель при выстреле; при бросании кубика невозможно предугадать выпадение числа 6; нельзя предсказать номер выигрышного лотерейного билета и т.д.

Определение. События, которые обязательно произойдут в результате испытания, называются достоверными событиями и обычно обозначаются буквой **Ω**.

Например, при подбрасывании кости выпадение номера от 1 до 6; содержание не более чем 1000 букв у выбранного наугад слова; наступление ночи за днём и т. д. – всё это достоверные события.

Определение. Событие, которое не произойдет ни в каком испытании, называется невозможным событием и обычно обозначается символом Ø.

Например, два выигрыша в одной лотерее, посадка космического корабля на Солнце и его возвращение, полёт самолёта на высоте 20 km и т. д. – невозможные события.

Определение. Событие, которое может произойти или нет в результате испытания, называется случайным событием.

Например, выпадение гербовой стороны при подбрасывании монеты, попадание в цель при выстреле, выигрыш лотерейного билета, выпадение очка 6 при бросании игральной кости и т. д. – случайные события.

Определение. Если наступление одного события исключает наступление других событий, то такие события называются несовместными.

Пример 1. Из коробки с деталями взяли одну деталь. При этом выход качественной детали исключает выход некачественной детали или наоборот. События «выход качественной детали» и «выход некачественной детали» являются несовместными.

Пример 2. При подбрасывании монеты выпадение орла (гербовой стороны) исключает выпадение решки (стороны с цифрой). События «выпадение орла» и «выпадение решки» несовместны.

Определение. Если события могут происходить независимо от наступления других, то такие события называются совместными событиями.

Например, «вышло солнце» и «день холодный» – события, которые могут происходить совместно.

Определение. Событие, представляющее единственный исход испытания, называется элементарным событием.

Определение. Событие, которое можно разложить на элементарные события, называется сложным.

Определение. Если нет оснований говорить о том, что какое-либо одно из нескольких событий имеет большую возможность наступления в результате испытания, чем другие, то такие события называются равновозможными событиями.

Например, при подбрасывании монеты, выпадении орла или решки, или при бросании игральной кости выпадение одного из чисел от одного до шести – все это равновозможные события.

Определение. Событием, противоположным событию A, называется событие $\bar{A}$, состоящее в ненаступлении события A.

Понятие зависимых и независимых событий

Определение. Если наступление одного из двух событий не зависит от наступления или ненаступления второго события, то такие события называются независимыми событиями.

Пример 3. Монету подбрасывают дважды. Вероятность выпадения решки при первом броске (событие A) не зависит от того, выпадет ли решка при втором броске (событие B). С другой стороны, вероятность выпадения орла во втором испытании не зависит от результата первого эксперимента. Таким образом, события A и B независимы.

Определение. Если любые два из нескольких событий не зависимы, то они называются попарно независимыми.

Пример 6. Монету подбросили 3 раза. Пусть A, B, C – события падений орла в первой, второй и третьей попытках, соответственно. Ясно, что никакие два рассматриваемых событий (т. е. (A и B), (A и C), (B и C)) независимы. Таким образом, события A, B и C попарно независимы.

Пример 7. Одна грань правильного тетраэдра красная, другая – жёлтая, третья – синяя, а четвертая – в этих трёх цветах (рис. 1). При бросании тетраэдра выпадение красного цвета – это событие A, выпадение жёлтого – событие B, а выпадение синего – событие C. При этом события A, B и C попарно независимы.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

Цель урока: Уметь анализировать элементарные случайные события, строить их модели; получать результаты на основе испытания; различать типы событий; анализировать вероятность случайного события, противоположного события и его вероятность.

Все учащиеся	Знают классическое определение вероятности, вероятность достоверного события, вероятность невозможного события.
Большинство учащихся	Могут проводить несложные доказательства, оценивать логическую правильность утверждений, читать информацию, представленную в таблице.
Некоторые учащиеся	Могут решать сложные задачи.

Активизирующие вопросы

1. Что вы подразумеваете под испытанием?
2. Что такое событие?
3. Как вы определили бы вероятность события?
4. Как объяснили бы вы комбинацию предметов в вашей папке?

Допустимые ошибки и рекомендации по их устранению

В большинстве случаев учащиеся неправильно используют формулы комбинаторики: перестановки, размещения и сочетания. Необходимо решать больше примеров на комбинаторику на факультативных занятиях.

Домашнее задание

Задачи **2, 4, 6, 8.**

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМЫ

Классическое определение вероятности

Определение. ***Вероятность события*** A – это отношение числа m событий, благоприятствующих наступлению A, к числу n всевозможных элементарных событий испытания. Вероятность события A обозначается через $P(A)$. Итак, по определению

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Из определения вероятности вытекают следующие свойства.

1. Вероятность достоверного события равна 1. То есть $P(\Omega)=1$**.**

Действительно, если событие достоверно, то любой элементарный исход опыта благоприятствует его наступлению. В этом случае $m=n$ и, следовательно,

$$P(\Omega)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1.$$

Пример 1. В сосуде 20 шаров, пронумерованных от 1 до 20. Один шар был вынут из сосуда наугад. Какова вероятность того, что порядковый номер этого шара не больше 20 (событие *A*)?

Решение. Порядковый номер любого из шаров в сосуде не превосходит 20. Следовательно, количество элементарных событий, благоприятствующих наступлению события *A*, и количество всевозможных элементарных событий равны: $m = n = 20$ и $P(A)=\frac{m}{n}=1$. В этом случае событие *A* является достоверным.

Ответ: P(A)=1.

2. Вероятность невозможного события равна нулю, т. е. P(∅)=0

Действительно, если событие не происходит, никакие элементарные события испытания не будут благоприятствовать его наступлению. В этом случае $m = 0$ и $n \geq 1$ (существует хотя бы одно элементарное событие в испытании), следовательно,

$$P(\varnothing)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0.$$

Пример 2. В коробке 10 шаров, из них 4 белые, остальные чёрные. Один шар был взят из этой коробки наугад. Какова вероятность того, что это – красный шар (событие *A*)?

Решение. В этом примере событие *A* заключается во взятии красного шара. В коробке нет красного шара, поэтому число *m* благоприятствующих событий к наступлению события *A* равно нулю, т. е. *m = 0.* В опыте имеются всего 10 элементарных событий, каждое из которых заключаются во взятии одного шара (белого или чёрного, но не красного шара), т. е. *n*=10. Итак, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0$. В этом случае *A* – невозможное событие.

Ответ: P(A)=0.

3. Вероятность случайного события – положительное число, заключённое между 0 и 1.

В самом деле, лишь часть всех элементарных явлений опыта благоприятствует наступлению случайного события (не являющегося невозможным и достоверным событием). В этом случае $0 < m < n$. Тогда $0 < \frac{m}{n} < 1$ и, следовательно, $0 < P(A) < 1$.

Таким образом, вероятность любого события удовлетворяет следующему двойному неравенству:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Пример 3. В мешке 12 шаров, из них 3 белых, 4 чёрных и 5 красных. Один шар был вынут наугад. Найдите вероятность того, что вынутый шар черный (событие A).

Решение. Количество благоприятствующих элементарных событий $m = 4$, а общее количество элементарных событий $n = 12$, поэтому вероятность события A равна:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}.$$

Статистическое определение вероятности

Относительная частота, наряду с вероятностью, является одним из главных понятий теории вероятностей.

Определение. Относительная частота события – это отношение количества испытаний, в которых наступило событие A, к общему количеству фактически провёденных испытаний. Относительное событие обозначается через $W(A)$. Таким образом, относительная частота события A определяется по формуле

$$W(A)=\frac{M}{N}.$$

где M – количество испытаний, при которых наступило событие A, N – общее количество проведённых испытаний.

Определение. Статистическая вероятность события – это относительная частота данного события при больших количествах испытаний.

Пример 1. Снайпер произвёл по цели 30 выстрелов. Если известно, что 23 из них попали в мишень, найдите относительную частоту попадания пуль в мишень.

Решение. 23 пули попали в цель, поэтому количество наступлений события $M=23$, а общее количество выстрелов $N=30$, поэтому относительная частота этого события $W(A)=\frac{23}{30}$.

Геометрическое определение вероятности

Если событие попадания брошенной точки в область Ω достоверно, то вероятность попадания этой точки в кусок ω, отделённый от этой области, равна отношению размера $m(\omega)$ куска ω к размеру $m(\Omega)$ области Ω:

$$P(A)=\frac{m(\omega)}{m(\Omega)}.$$

Здесь размером области может быть длина, площадь или объём.

Если взять за область Ω отрезок L, а за область ω кусок l отрезка L, то вероятность того, что точка, брошенная на отрезок L, попадёт в кусок l, найдётся равенством

$$P(A)=\frac{l}{L}.$$

Если рассматривать область Ω как поверхность S, а область ω как поверхность s (лежащей в S), то вероятность того, что точка, брошенная в поверхность S, попадёт в поверхность s, вычисляется формулой

$$P(A)=\frac{s}{S}.$$

Если взять область Ω за объём V, а область ω за объём v, то вероятность попадания точки, брошенной в объем V, в объём v вычисляется равенством

$$P(A)=\frac{v}{V}.$$

Геометрическое определение также может быть интерпретировано по времени. Если событие неизбежно произойдёт в течение времени T, то вероятность того, что это событие произойдёт в течение времени t, равна:

$$P(A)=\frac{t}{T}.$$

Пример 1. Точка брошена в окружность радиуса R. Найдите вероятность того, что выпавшая точка попадёт в правильный n-угольник, вписанный в окружность.

Решение. Пусть $S(D_n)$ – площадь n-угольника, $S(D)$ – площадь окружности (рис. 1).

Через B_n обозначим событие попадания точки в правильный n-угольник, вписанный в окружность. Тогда

$$P(B_n)=\frac{S(D_n)}{S(D)}=\frac{n\cdot\frac{R^2}{2}\cdot sin\frac{2\pi}{n}}{\pi R^2}=\frac{n\cdot sin\frac{2\pi}{n}}{2\pi}=\frac{sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи этой задачи.

a) Точка брошена в окружность радиуса *R*. Найдите вероятность того, что выпавшая точка попадёт в правильный треугольник, вписанный в окружность.

Решение. Пусть $S(D_3)$ – площадь треугольника, $S(D)$ – площадь окружности (рис. 2), B_3 – событие попадания точки в правильный треугольник. В этом случае

$$P(B_3)=\frac{S(D_3)}{S(D)}=\frac{3\cdot sin\frac{2\pi}{3}}{2\pi}=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\approx 0,4137.$$

b) Точка брошена в окружность радиуса R. Найдите вероятность того, что выпавшая точка попадёт в квадрат, вписанный в окружность.

Решение. Пусть $S(D_4)$ – площадь квадрата, $S(D)$ – площадь окружности (рис. 3), B_4 – событие попадания точки в квадрат. В этом случае

$$P(B_4)=\frac{S(D_4)}{S(D)}=\frac{4\cdot sin\frac{2\pi}{4}}{2\pi}=\frac{2}{\pi}\approx 0,637.$$

c) Точка брошена в окружность радиуса R. Найдите вероятность того, что выпавшая точка попадёт внутрь правильного шестиугольника, вписанного в окружность.

Решение. Пусть $S(D_6)$ – площадь шестиугольника, $S(D)$ – площадь окружности (рис. 4), B_6 – событие попадания точки в шестиугольник. В этом случае

$$P(B_6)=\frac{S(D_6)}{S(D)}=\frac{6\cdot sin\frac{2\pi}{6}}{2\pi}=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\approx 0,8274.$$

ЗАДАЧИ

1. В лотерее 1000 билетов. 500 из них выигрышные и 500 без выигрыша. Было куплено два билета. Какова вероятность того, что оба билета выигрышные?

2. Монету подбрасывают два раза. Какова вероятность того, что в обоих случаях выпадет орёл?

3. На полках разместили 20 книг. Какова вероятность того, что определённые 5 из них разместятся рядом (событие A)?

4. Выбрасываются две игральные кости. Сумма выпавших чисел – чётное число. При этом найдите вероятность того, что хотя бы на одном из кубиков всегда выпадет 6.

5. Бросают две кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших чисел равна 5, а их произведение равно 4.

6. Найдите вероятность того, что при броске двух игральных костей сумма выпавших чисел равна 7.

7. Задумывается двузначное число разными цифрами. Найдите вероятность того, что наугад сказанное число окажется задуманным числом.

8. В коробке 20 шаров: 10 чёрных и 10 белых. Из ящика вынули наугад один шар. Найдите вероятность того, что этот шар был: a) белым; b) чёрным.

9. Отдел технического контроля обнаружил 5 бракованных книг в случайной партии из 100 книг. Найдите относительную частоту бракованных книг.

10. По мишени было произведено 20 выстрелов. 18 из них поразили цель. Найдите относительную частоту попадания в цель.

11. При тестировании партии предметов относительная частота годных предметов составила 0,9. Если всего проверено 200 предметов, найдите количество годных предметов.

12. Когда 920 жителей города спросили, как они добираются до работы, оказалось, что 350 из них ездят на машине, 420 – на общественном транспорте, 80 – на велосипеде и 70 – пешком. Определите относительную частоту добирающих на работу:

1) на машине;
2) на общественном транспорте;
3) на велосипеде;
4) пешком.

13. В окружности радиусом 20 cm начерчены две непересекающиеся окружности, одна радиусом 5 cm, а другая радиусом 10 cm. Найдите вероятность того, что точка, взятая наугад изнутри большего круга, окажется внутри одной из меньших окружностей.

14. Двое друзей договорились встретиться в определённом месте между 10 и 11 часами. Первый пришедший ждёт второго 20 минут, затем уходит. Найдите вероятность того, что друзья встретятся, если они имеют равные шансы приехать в заданный промежуток времени.

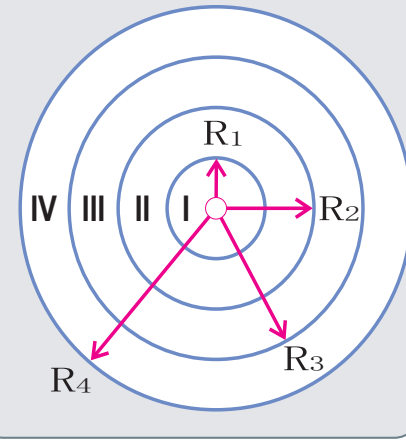
15. В результате сильного шторма телефонная линия была оборвана на расстоянии от 40 до 70 километров. Найдите вероятность того, что разрыв произойдёт между 50 и 55 километрами.

16. Внутри круга нарисован квадрат. Какова вероятность того, что точка, помещённая внутри круга, окажется внутри квадрата?

17. Мишень представляет собой концентрические круги с радиусами $R_1 = r$, $R_2 = 2r$, $R_3 = 3r$, $R_4 = 4r$. Если достоверно попадание копья, брошенного в мишень, найдите вероятность того, что копьё попадёт в каждую область (рис. 7).

18. Подбросили две кости одновременно. Найдите вероятность того, что сумма выпавших чисел равна пяти.

Рисунок 7



19. В классе 30 учеников, 10 из них ходят в кружок математики. В классе наугад были отобраны 6 учеников. Найдите вероятность того, что хотя бы один из них посещает математический кружок.

20. Найдите вероятность того, что из 3 синих и 4 зелёных шаров случайно выбранными 3-мя шарами будут 2 синих и 1 зелёный.

21. Найдите вероятность выпадения чётного очка при однократном броске кости.

22. 26 из 10 000 арбузов треснули во время транспортировки. Найдите относительную частоту числа лопнувших арбузов.

23. В коробке 7 белых и 3 чёрных шара. Найдите вероятность того, что взятый наугад шар окажется белым.

24. Абонент, набирая номер в телефоне, забыл две цифры в конце и набрал их наугад, только зная, что эти цифры разные. Найдите вероятность того, что будет набран правильный номер.

25. Устройство состоит из 5 элементов, из которых 2 изношены. При включении устройства включаются случайным образом 2 элемента. Найдите вероятность того, что включёнными окажутся неизношенные элементы.

26. В коробке m белых и n чёрных шаров. Из коробки взяли один шар. Найдите вероятность того, что взятый шар будет белым.

27. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 20. Какова вероятность того, что это число кратно 5?

ОТВЕТЫ

1. $\frac{C_{500}^2 \cdot C_{500}^0}{C_{1000}^2} = \frac{499}{1998}$ **2.** $\frac{1}{4}$ **3.** $\frac{16 \cdot 5! \cdot 15!}{20!} = \frac{1}{969}$ **4.** $\frac{1}{18}$

5. $\frac{1}{18}$ **6.** $\frac{1}{6}$ **7.** $\frac{1}{81}$ **8. a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **9.** $\frac{1}{20}$

10. $\frac{9}{10}$ **11.** 180 **12.** 1) $\frac{35}{92}$; 2) $\frac{21}{46}$; 3) $\frac{2}{23}$; 4) $\frac{7}{92}$ **13.** $\frac{5}{16}$

14. $\frac{1}{6}$ **15.** $\frac{1}{6}$ **16.** $\frac{2}{\pi}$ **17.** $P(I) = \frac{1}{16}$; $P(III) = \frac{5}{16}$; $P(III) = \frac{5}{16}$; $P(IV) = \frac{7}{16}$;

18. $\frac{1}{9}$ **19.** $\frac{C_{30}^6 - C_{20}^6}{C_{30}^6}$ **20.** $\frac{C_3^2 \cdot C_4^1}{C_7^3} = \frac{12}{35}$ **21.** $\frac{1}{2}$ **22.** $\frac{7}{10}$

23 $\frac{7}{10}$ **24.** $\frac{1}{90}$ **25.** $\frac{3}{10}$ **26.** $\frac{m}{m+n}$ **27.** $\frac{1}{5}$

СУММАТИВНАЯ ОЦЕНКА. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6.

Вариант 1

1. Событие, которое обязательно произойдёт в результате испытания, называется … событием. (Дополните предложение). Приведите пример.

2. В коробке 15 шариков, из них 6 белых, остальные черные. Из ящика были взяты два шарика наугад. Найдите вероятность того, что оба шарика белые.

3. В мешке 20 шаров, 6 белых, 7 черных и остальные красные. Найдите вероятность того, что все наугад взятые 3 шара не красные.

4. 25 книг расставили на полку случайным образом. Какова вероятность того, что 3 определенные книги окажутся рядом?

5. Найдите вероятность того, что точка, брошенная в правильный шестиугольник, описанный около круга радиусом R, не попадет внутрь круга.

Вариант 2

1. Событие, которое не произойдет ни в каком испытании, называется … событием. (Дополните предложение). Приведите пример.

2. В коробке 15 шаров, из них 6 белых, остальные черные. Из этого ящика были случайно взяты два шара. Найдите вероятность того, что оба шара черные.

3. В мешке 20 шаров, 6 белых, 7 черных и остальные красные. Найдите вероятность того, что, хотя бы один из трех наугад вынутых шаров окажется не красным.

4. 25 книг расставили на полку случайным образом. Какова вероятность того, что 6 определенных книг окажутся рядом?

5. Найдите вероятность того, что точка, брошенная в правильный треугольник, описанный около круга радиусом R, не попадет внутрь круга.

ПОВТОРЕНИЕ

ФУНКЦИЯ И ЕЁ СВОЙСТВА

1. Найдите область определения функций.

a) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-4}$ b) $y=\sqrt{3x-x^3}$ c) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x}}$

d) $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(3-x)}{x(4-x)}}$ e) $y=\sqrt{\dfrac{x(x+1)}{(x-2)(4-x)}}$ f) $y=\sqrt{25-x^2}+\dfrac{2x-3}{x+1}$

2. Если $f(x)=x^2$ и $g(x)=2x-1$, при скольких значениях x имеет место $f(g(x))=g(f(x))$?

3. Если $f(x+1)=x^2-3x+2$, то $f(x)=?$

4. Если $f(x)=\sqrt{x^3-1}$, чему равно $f\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)$?

5. Если $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, чему равно $f\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{f(x)}$?

6. Какие значения принимают функции?

a) $f(x)=\dfrac{3}{x-4}$ b) $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ c) $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}+2$

d) $y=-x^4+2x^2+5$ e) $y=\dfrac{x^2-4x+9}{x^2-4x+5}$ f) $y=\sqrt{x^2-6x+11}$

7. Какие из следующих функций чётные?

a) $y=\dfrac{5x^2}{(x-3)^2}$ b) $y=\dfrac{x(x-2)(x-4)}{x^2-6x+8}$ c) $y=x^2+|x+1|$

d) $f(x)=x^3-\dfrac{2}{x^3}$ e) $y=\begin{cases}-x^2, x<0\\ x^2, x\geq 0\end{cases}$ f) $y=\sqrt{x^2-6x+11}$

8. Какие из следующих функций нечётные?

a) $y=3x^5+x^3$ b) $y=(0,25)^x+(0,25)^{-x}$ c) $y=\begin{cases}x, x<0\\ -x, x\geq 0\end{cases}$

d) $y=|x|-1$ e) $y=\dfrac{x^4-2x^2}{3x}$ f) $y=\sqrt{3-x^2-2x}$

РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Решите уравнения (2-21).

1. При каких значениях t уравнения $18x+7=5$ и $18x+7+t=5+t$ равносильны?

2. $\dfrac{4x^2-7x-2}{x^2-5x+6}=0$

3. $2+\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{9}{x}$

4. $1-\dfrac{15}{x}=\dfrac{16}{x^2}$

5. $\dfrac{9}{x}+\dfrac{13}{2x}=2$

6. $\dfrac{2}{x-3}=\dfrac{x}{x+3}$

7. $\dfrac{x^3-3x^2}{x+2}\cdot\dfrac{x^2-4}{x^2}=0$

8. $\dfrac{1-x}{(2-x)(x-3)}+1=\dfrac{1}{2-x}$

9. $\dfrac{1}{x^2-9}+\dfrac{1}{3x-x^2}=\dfrac{3}{2x+6}$

10. $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2-\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^2=0$

11. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{36}{9x-x^2}-\dfrac{x-5}{9-x}=0$

12. $\dfrac{x-49}{50}+\dfrac{x-50}{49}=\dfrac{49}{x-50}+\dfrac{50}{x-49}$

13. $5-\dfrac{x^2-14x-51}{x^2-x-12}=\dfrac{3}{x-4}$

14. $\dfrac{2}{x^2-4}+\dfrac{x-4}{x^2+2x}=\dfrac{1}{x^2-2x}$

15. $\dfrac{30}{x^2-1}-\dfrac{13}{x^2+x+1}=\dfrac{18x+7}{x^3-1}$

16. $\dfrac{x^2-3x}{x-2}+\dfrac{x-2}{x^2-3x}=2,5$

17. $\dfrac{4}{x^2-3x+2}-\dfrac{3}{2x^2-6x+1}+1=0$

18. $\dfrac{x-2}{x+1}+\dfrac{4(x+1)}{x-2}=5$

19. $\dfrac{x^2-x}{x^2-x+1}-\dfrac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$

20. $\dfrac{1}{x^2+2x-3}+\dfrac{18}{x^2+2x+2}=\dfrac{18}{x^2+2x+1}$

21. $x^2+\dfrac{x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{40}{9}$

22. Поезд задержался в пути на 30 минут. Для того чтобы прибыть по расписанию, машинист на отрезке пути 80 km увеличил скорость на 8 km/h. Какова скорость поезда по расписанию?

23. Моторная лодка прошла 28 km по течению реки и 25 km против течения, затратив на весь путь столько же времени, сколько ей понадобилось бы на прохождение 54 km в стоячей воде. Определите скорость лодки в стоячей воде, если известно, что скорость течения реки равна 2 km/h.

Решите уравнения (24-38).

24. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}=\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}$

25. $\dfrac{1+x}{6}-\dfrac{6}{1+x}=\dfrac{4}{x+1}-\dfrac{x+1}{4}$

26. $\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{x+2}{x-2}=3\dfrac{1}{3}$

27. $\dfrac{2x+1}{2x-1}+\dfrac{2x-1}{2x+1}=5,2$

28. $\dfrac{x^2-2x}{x-1}-\dfrac{2x-1}{1-x}=3$

29. $\dfrac{2}{x-4}+\dfrac{4}{x^2-4x}=0,625$

30. $\dfrac{\left(x^2+1\right)x}{\left(x^2-x+1\right)^2}=\dfrac{10}{9}$

31. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}=\dfrac{6}{x+6}$

32. $x^2+\dfrac{1}{x^2}-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+4=0$

33. $x^4-6x^3+10x^2-6x+1=0$

34. $31\left(\dfrac{24-5x}{x+1}+\dfrac{5-6x}{x+4}\right)+370=29\left(\dfrac{17-7x}{x+2}+\dfrac{8x+55}{x+3}\right)$

35. $\dfrac{x+3}{4x^2-9}-\dfrac{3-x}{4x^2+12x+9}=\dfrac{2}{2x-3}$

36. $\dfrac{30}{x^2-1}+\dfrac{7-18x}{x^3+1}=\dfrac{13}{x^2-x+1}$

37. $\dfrac{2x+7}{x^2+5x-6}+\dfrac{3}{x^2+9x+18}=\dfrac{1}{x+3}$

38. $2x^4+x^3-x^2+x+2=0$

СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решите систему уравнений (1-8).

1. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2,5\\ x^2-y^2=3\end{cases}$

2. $\begin{cases}x+y+\dfrac{x}{y}=9\\ \dfrac{(x+y)x}{y}=20\end{cases}$

3. $\begin{cases}2xy-\dfrac{3x}{y}=15\\ xy+\dfrac{x}{y}=15\end{cases}$

4. $\begin{cases}\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{2}{x-y}=3\\ \dfrac{3}{x+y}+\dfrac{4}{x-y}=7\end{cases}$

5. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}-\dfrac{3y}{x}=\dfrac{1}{2}\\ x^3-\dfrac{y^3}{8}=-28\end{cases}$

6. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{25}{12}\\ x^2-y^2=7\end{cases}$

7. $\begin{cases}\dfrac{4y}{x}+\dfrac{x}{y}=5\\ xy=4\end{cases}$

8. $\begin{cases}x+y=5\\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=-\dfrac{13}{6}\end{cases}$

Решите систему уравнений (9-13).

9. $\begin{cases}\dfrac{2}{2x-y}+\dfrac{3}{x-2y}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{2}{2x-y}-\dfrac{1}{x-2y}=\dfrac{1}{18}\end{cases}$

10. $\begin{cases}\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{10}{3}\\ 2x^2+y^2=27\end{cases}$

11. $\begin{cases}\dfrac{6}{x+y}+\dfrac{5}{x-y}=7\\ \dfrac{3}{x+y}-\dfrac{2}{x-y}=-1\end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{11}{2x-3y}+\dfrac{18}{3x-2y}=13 \\ \dfrac{27}{3x-2y}-\dfrac{2}{2x-3y}=1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{y}{3}=3 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Решите неравенства.

1. $(-4x+3)(-5x+4)>0$

2. $(x^2-16)^3(x+7)<0$

3. $(x-2)^2(x-1)(x+7)(x-5)\geq 0$

4. $\dfrac{(x+6)^3(x-4)}{(7-x)^5}<0$

5. $(x^2-1)(x^2+5x+6)(x^2-5x+6)\leq 0$

6. $\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^2+2x+\dfrac{1}{x}-12<0$

7. $\dfrac{5x+4}{x-2}<1$

8. $\dfrac{3x+2}{x-3}>1$

9. $\dfrac{x-4}{x^2-9x+14}>0$

10. $\dfrac{x^4-10x^2+9}{6-2x}<0$

11. $\dfrac{x^2+1}{x-3}>0$ **>0**

12. $\dfrac{x+3}{x^2+7}<0$

13. $\left(3-\sqrt{10}\right)(2x-7)<0$

14. $\dfrac{(x^2-x-2)^2}{x^2+7x-8}\geq 0$

15. $\dfrac{3x-1}{x^2+x+1}\leq 0$

16. $\dfrac{x^2+2x-15}{3x^2+5x-8}\leq 0$

17. $\dfrac{2}{x+2}<\dfrac{1}{x-3}$

18. $\dfrac{3}{2-x}>\dfrac{1}{x+3}$

19. $\dfrac{2}{x+3}<\dfrac{1}{2x-1}$

20. $\dfrac{x+1}{x-2}>\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{2}$

21. $\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x-3}\leq 0$

22. $\dfrac{6}{x-1}\leq\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{7}{x+2}$

23. $\dfrac{14x(2x+3)}{x+1}<\dfrac{(9x-30)(2x+3)}{x-4}$

24. $\dfrac{(5x+4)(3x-2)}{x+3}\leq\dfrac{(3x-2)(x+2)}{1-x}$

25. $(x-3)^2+\dfrac{1}{x^2-6x+9}>2$

26. $\dfrac{2x-3}{4\sqrt{6}-10}>5+2\sqrt{6}$

СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Решите систему неравенств.

1. $\begin{cases} 2x-14<0 \\ -3x+9<0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 6x-1>9-4x \\ 3-2x<x+16 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3(2-3x)+2(3-2x)>x \\ 6<x^2-x(x-8) \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5\left(1-\dfrac{x-4}{4}\right)-7(2x-3)>0 \\ \dfrac{3x-14}{5}-\dfrac{3x-10}{20}-0,7(x+8)<0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2\le 9 \\ x+1>0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x+\dfrac{2x-3}{2}>\dfrac{7x-5}{2} \\ \dfrac{7x-2}{3}-2x>\dfrac{5(x-2)}{4} \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{5x-4}{4}-\dfrac{4x+1}{3}\ge\dfrac{x+2}{4}-7 \\ \dfrac{4x}{3}-1-\dfrac{6x+2}{2}>x+\dfrac{6}{5} \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2+5x-6<0 \\ x+3\ge 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 13-\dfrac{3-7x}{10}+\dfrac{x+1}{2}<14-\dfrac{7-8x}{2} \\ 7(3x-5)+4(17-x)>18-\dfrac{5(2x-6)}{2} \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{3x-1}{6}<\dfrac{2-x}{12}-\dfrac{x+1}{2}+3 \\ x>\dfrac{5x-4}{10}-\dfrac{3x-1}{5}-2,5 \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{3}{4}(x-1)+\dfrac{7}{8}<\dfrac{1}{4}(x-1)+\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{2x-3}{3}<2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2+x+8<0 \\ x^2+6x+5\ge 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 5x\ge 2 \\ -0,3x^2+4,8<0 \\ -2x^2+17x+19\ge 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2-5x\le 0 \\ x-x^2\ge 0 \\ -4x^2-5x+21\ge 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{x-4}{4}-x+1<\dfrac{x-2}{2}-\dfrac{x-3}{3} \\ 3-x>2x-10 \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dfrac{2x}{3}-1<3-2(1-2x) \\ 3x-5>1-2(1-x) \\ 1-2x<3(2x-1) \end{cases}$

17. $\begin{cases} 7<2x+1<11 \\ \dfrac{x+2}{x-5}<\dfrac{x-6}{x-3} \end{cases}$

18. $\begin{cases} -2<2-x<1 \\ \dfrac{x+3}{1-x}\le\dfrac{8-x}{x-4} \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{2}{7}<2^n<3 \\ 3^n>2 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 1<\left(\dfrac{2}{3}\right)^n<3 \\ \left(\dfrac{3}{4}\right)^n<1,5 \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dfrac{1}{5}<3^n<4 \\ 2<\left(\dfrac{1}{3}\right)^n<10 \end{cases}$

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. $\sqrt{x-1}=-4$

2. $\sqrt{x}=8$

3. $\sqrt{x}=-16$

4. $\sqrt[3]{x+1}=2$

5. $\sqrt[4]{x-7}=-3$

6. $\sqrt{x^2+2x-6}\cdot\sqrt{x-9}=0$

7. $1+\sqrt{x+3}=0$

8. $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$

9. $\sqrt{x-4}+\sqrt{x^2-3}=0$

10. $\sqrt{1+4x-x^2}=x-1$

11. $\sqrt{x-3}+\sqrt{2x+4}=-11$

12. $\sqrt{2x^2+8x+7}-2=x$

13. $\sqrt{x^2-7x+12}=2x-6$

14. $\sqrt{4-x}=\sqrt{x-7}$

15. $\sqrt{3+\sqrt{5-x}}=\sqrt{x}$

16. $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$

17. $2\sqrt{x+18}+\sqrt{4x-3}=15$

18. $\sqrt{x+20}-\sqrt{x-1}=3$

19. $\sqrt{x-5}+\sqrt{1-x}=7$

20. $(x^2-5x+6)\cdot\sqrt{2-x}=0$

21. $(2-x)\cdot\sqrt{x^2-x-20}=12-6x$

22. $(x-1)\cdot\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-1}}=0$

23. $(4x-x^2-3)\cdot\sqrt{x^2-2x}=0$

24. $\sqrt[3]{9x+1}=1+3x$

25. $\sqrt{x+5}+\sqrt[4]{x+5}=12$

26. $x^2+11+\sqrt{x^2+4}=42$

27. $x^2+5x+\sqrt{x^2+5x-5}=17$

28. $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2-x-x^2}=\sqrt{x}-1$

29. $\sqrt{4-x}+\sqrt{x-4}=0$

30. $\sqrt{7-5x}+\sqrt{5x-7}=29$

31. $\sqrt{\dfrac{x-1}{2x+1}}+\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}=\dfrac{10}{3}$

32. $\sqrt{5+2x}=10-3\sqrt[4]{5+2x}$

33. $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-2}=(x-7)^2\cdot(x-5)$

34. $2\sqrt{x-1}-5=\dfrac{3}{\sqrt{x-1}}$

35. $\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{x+2}=\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{4-x}$

36. $x^2+\sqrt{x^2+20}=22$

37. $\sqrt{x^3+4x-1-8\sqrt{x^4-x}}=\sqrt{x^3-1}+2\sqrt{x}$

38. $6x^2+7x\sqrt{1+x}=24(1+x)$

39. $\sqrt{(x^2+8x)^2}=x^2+8x$

40. $\sqrt{(4x^2-5x)^2}=5x-4x^2$

41. $\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=2-\sqrt{x-4}$

42. $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2}=x-\dfrac{1}{x}$

43. $\sqrt{5-x}+\sqrt{x-6}=x^2+2x$

44. $\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}=6$

45. $\sqrt{x+8\sqrt{x-16}}+\sqrt{x-8\sqrt{x-16}}=2\sqrt{x-16}$

46. $\dfrac{\sqrt[4]{x^4-16}+\sqrt[6]{x^3-8}}{3x-x^2-2}=0$

СИСТЕМЫ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решите систему уравнений.

1. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=8\\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=15\end{cases}$

2. $\begin{cases}\sqrt{xy}=12\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=7\end{cases}$

3. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=6\\ x-y=12\end{cases}$

4. $\begin{cases}\sqrt{x+3y+6}=2\\ \sqrt{2x-y+2}=1\end{cases}$

5. $\begin{cases}x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=30\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5\end{cases}$

6. $\begin{cases}3\sqrt{x}-\sqrt{y}=8\\ \sqrt{x}+2\sqrt{y}=19\end{cases}$

7. $\begin{cases}25y+x=100-10\sqrt{xy},\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=4,\end{cases}$

8. $\begin{cases}xy=64\\ x-y+\sqrt{xy}=20\end{cases}$

9. $\begin{cases}\sqrt{x+y-1}=1\\ \sqrt{x-y+2}=2y-2\end{cases}$

10. $\begin{cases}x+y-\sqrt{xy}=7\\ xy=9\end{cases}$

11. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=26\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=6\end{cases}$

12. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=-3\\ xy=8\end{cases}$

13. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3\dfrac{3}{4}\\ xy=1\end{cases}$

14. $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=5\\ \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=1\end{cases}$

15. a) $\begin{cases}5x+3\sqrt{xy}+4y=12\\ 3x+2\sqrt{xy}+3y=8\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x-6\sqrt{xy}+7y=9\\ x-4\sqrt{xy}+5y=6\end{cases}$

16. a) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5\\ x+y+4\sqrt{xy}=37\end{cases}$ b) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=4\\ x+y-3\sqrt{xy}=1\end{cases}$

17. a) $\begin{cases}x\sqrt{x}+12y\sqrt{x}=28\\ 8y\sqrt{y}+6x\sqrt{y}=36\end{cases}$ b) $\begin{cases}x\sqrt{x}+27y\sqrt{x}=36\\ 27y\sqrt{y}+9x\sqrt{y}=28\end{cases}$

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Решите уравнения.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{1024}$ b) $\left(\frac{5}{4}\right)^{2x-1} = (0{,}8)^{x-2}$ c) $0{,}5^{\sqrt{x+1}} \cdot 0{,}5^{-1} = 0{,}5^{\sqrt{x}}$

d) $4^{x-1} - 4^{x+1} + 4^{x+2} = 49$ e) $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$ f) $5^{x+1} + 3 \cdot 5^{x-1} - 6 \cdot 5^x + 10 = 0$

2. Сколько корней имеет уравнение $49^x + 7^x + 1 = 57$?

3. Найдите наибольший корень уравнения $9^x - 3^{x+1} + 2 = 0$.

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

1. Решите неравенства.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2-3x} \le \frac{3}{2}$ b) $\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+4} \cdot 7\sqrt{7} < \frac{1}{7}$ c) $(0{,}04)^{2x} > (0{,}2)^{x(3-x)}$

d) $25^x + 5^x > 0$ e) $3^{\frac{x-1}{x+1}} > 27$ f) $3{,}2^{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} \ge 3{,}2\sqrt{3{,}2}$

g) $7^{2x-9} > 7^{3x-6}$ h) $0{,}5^{4x+3} \le 0{,}5^{6x-1}$ i) $2\sqrt{2} \cdot 2^{x-3} \ge \frac{1}{2}$

2. Сколько натуральных чисел удовлетворяют неравенству?

a) $8^{-2x+8} > 512$ b) $2^{5x-7} \le 16$ c) $2^{5x-7} \ge 16$ d) $0{,}1^{4x-5} > 0{,}001$

3. Найдите наибольшее целое число, входящее в решение.

a) $2{,}5^{2x+3} \le 6{,}25$ b) $1{,}1^{5x-3} < 1{,}21$ c) $0{,}7^{9x\ 4}\ \ 0{,}343$ d) $\left(\frac{2}{5}\right)^{7x-9} \ge \frac{8}{125}$

ПОНЯТИЕ ЛОГАРИФМА. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

1. Графику какой функции точка $A(-2;-1)$ не принадлежит?

1) $y = \log_2\left(-\frac{1}{x}\right)$ 2) $y = \log_2|x|$ 3) $y = \log_{\frac{1}{2}}|x|$ 4) $y = -\log_2(-x)$

2. Найдите область определения функции.

a) $y = \lg(x+2) + \lg(3-x)$ b) $y = \ln(x + |x|)$

3. При каком $x \in \{2;3;4;5;6\}$ функция $y = \log_x(x+1)$ достигает наибольшего значения?

4. Как можно преобразовать график функции $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ из графика функции $y = \log_3 x$?

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

1. Вычислите значение выражения.

a) $\log_{12}\sqrt[5]{144}$

b) $\log_3 5-\log_3\frac{5}{27}$

c) $\frac{\log_{27}2}{\log_3 8}$

d) $\frac{\log_{11}12}{\log_{11}6}+\frac{\log_5 3}{\log_5 6}$

e) $\frac{3\log_7 2-\frac{1}{2}\log_7 64}{4\log_5 2+\frac{1}{3}\log_5 27}$

f) $81^{\frac{1}{\log_5 3}}+27^{\log_3 4}+3^{\frac{4}{\log_7 9}}$

g) $\frac{1}{2}\log_3\log_5 125$

h) $-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}$

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

1. Решите уравнения.

a) $\log_5 x=2$

b) $\log_{0,2} x=4$

c) $\log_{\frac{1}{3}} x=-1$

d) $\log_7 x=\frac{1}{3}$

2. Решите уравнения.

a) $\log_3 x+\log_{\frac{1}{3}} x+2=0$

b) $3\log_{\frac{1}{7}} x=\log_{\frac{1}{7}} 9+\log_{\frac{1}{7}} 3$

c) $\log_2(3x-6)=\log_2(2x-3)$

d) $\log_6(14-4x)=\log_6(2x+2)$

3. Решите уравнение.

a) $\log_2^2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$

b) $\log_{\frac{1}{2}}^2\left(x^2+x\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+x\right)=0$

c) $\lg^2 x-\lg x+1=\frac{9}{\lg 10x}$

d) $\log_2^2 x+7\log_2 x+49=\frac{-218}{\log_2\frac{x}{128}}$

4. Решите уравнения.

a) $x^{5+\log_2 x}=\frac{1}{16}$

b) $5^{2(\log_5 2+x)}-2=5^{x+\log_5 2}$

c) $\lg\left(625\sqrt[5]{5^{x^2+20x+5}}\right)=0$

d) $x^{\lg 2}+2^{\lg x}=4$

5. Сколько целых корней имеет уравнение $\log_2(x+4)=-2\log_2\frac{1}{2-x}$?

СИСТЕМЫ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Решите систему уравнений.

a) $\begin{cases}3\cdot 7^x-3^y=12\\7^x\cdot 3^y=15\end{cases}$

b) $\begin{cases}3^{-x}\cdot 2^y=\frac{4}{9}\\x+y=4\end{cases}$

c) $\begin{cases}2^x+2y=1\\3y-6y^2=2^{x-1}\end{cases}$

d) $\begin{cases}2^x+2y=1\\3y-6y^2=2^{x-1}\end{cases}$

e) $\begin{cases}3\cdot 2^x+y=13\\2^{2x+1}+3y=35\end{cases}$

f) $\begin{cases}3\cdot 7^x+3^y=12\\7^x\cdot 3^y=4\end{cases}$

2. Решите систему уравнений.

a) $\begin{cases} \log_5(x+y)=1 \\ 2^x+2^y=12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log_4 x+\log_4 y=1+\log_4 9 \\ 2^{\frac{x+y}{2}}=1024 \end{cases}$

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

1. Решите неравенства.

a) $\log_4(x+5)<0$ b) $\log_3(2-5x)<1$ c) $\log_{\frac{1}{7}}(x+5)>-1$

d) $\log_{0,2}(x-3)+2\geq 0$ e) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+3)>\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ f) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+x+1)\leq 0$

g) $\log_3(13-4^x)>2$ h) $2\log_3 x-\log_x 81<2$ i) $\log_2(x-1)+\log_2(x+1)\geq 3$

2. Сколько натуральных чисел меньше 5 удовлетворяют неравенству $\frac{1}{\log_3 x-2}>\frac{1}{\log_3 x}$?

3. Найдите сумму натуральных чисел, удовлетворяющих неравенству $2\log_5 x-\log_x 125<1$.

4. Сколько натуральных чисел удовлетворяют неравенству $\log_x(3-x)>1$?

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. Найдите область определения функции.

a) $y=\frac{1}{\sin x}$ b) $y=\frac{1}{\cos x}$ c) $y=\frac{\cos x}{\sin x-2\sin^2 x}$

d) $y=\frac{3x}{2\cos x-1}$ e) $y=\cos x+\sin x$ f) $y=\cos x+ctgx$

2. Найдите множество значений функции.

a) $y=3\cos x-1$ b) $y=2-\sin x$ c) $y=1-2\sin^2 x$ d) $y=2\cos^2 x-1$

3. Определите чётность или нечётность заданной функции.

a) $y=\frac{\sin x}{x}$ b) $y=x\cos x$ c) $y=\sin x+x^2$ d) $y=\cos x-x^2$

4. Найдите наименьший положительный период функции.

a) $y=\sin\frac{x}{2}$ b) $y=\cos(3x-1)$ c) $y=tg2x$ d) $y=\cos\frac{x}{3}$

5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции.

a) $y=\cos^4 x-\sin^4 x$ b) $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ c) $y=1-2|\sin 3x|$

6. Найдите нули функции.

a) $y=\sin x-2$ b) $y=2\cos x+1$ c) $y=x\cos x$ d) $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. Найдите область определения функции.

a) $y = arccos\dfrac{2x+3}{4}$ b) $y = arcsin(2 + 3x)$

c) $y = arcsin\left(3\sqrt{x}+2\right)$ d) $y = arccos\dfrac{4-x}{3}$

2. Сравните.

a) $arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ b) $arctg(-1)$ и $arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

c) $arccos\sqrt{3}$ и $arcsin1$ d) $arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $arcsin\dfrac{1}{2}$

3. Найдите значение выражения.

a) $2\,arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+arctg\,(-1)+arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $arcsin\dfrac{1}{2}+4\,arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+arctg\left(-\sqrt{3}\right)$

c) $arctg\left(-\sqrt{3}\right)+arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+arccos1$ d) $arcsin1-\dfrac{1}{2}+arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)+6arctg\sqrt{3}$

4. Вычислите.

a) $2\,arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}+3\,arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ b) $2\,arc\,cos\left(-\dfrac{1}{2}\right)+arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $2\,arc\,tg1+3arctg\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ d) $2\,arc\,tg\,(-1)+3arctg\left(\sqrt{3}\right)$

5. Вычислите.

a) $sin\left(arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ b) $tg\left(arccos\dfrac{1}{2}\right)$ c) $tg\left(arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

d) $sin(4arcsin1)$ e) $cos(arcsin1)$ f) $sin\left(arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

1. Решите уравнение на промежутке $0 \le x < 360^\circ$.

a) $sinx = -0{,}3$ b) $sinx = 0{,}15$ c) $cosx = 0{,}6$ d) $cosx = -0{,}43$

2. Найдите значения x, учитывая промежутки.

a) $4sinx + 2 = 0,\ 0 \le x < 2\pi$ b) $ctgx - \sqrt{3} = 0,\ 0 \le x < 2\pi$

c) $2sin^2x + 5sinx = 3\ \ 0 \le x < 2\pi$ d) $cos2x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0 \le x < 2\pi$

3. Решите уравнение на промежутке $0 \le x < 360^\circ$.

a) $7 - 6\cos^2 x = 5\sin x$ b) $7 + 2cosx = 8sin^2x$ c) $2sinx - 3cosx = 0$

4. Решите уравнения.

a) $sin10x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $cos10x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $tg10x = \sqrt{3}$ d) $ctg10x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

5. Решите уравнения.

a) $sin4x cos3x tg8x = 0$ b) $cos4x = -cos5x$ c) $tg5x = -tg\frac{x}{3}$

6. Решите уравнения.

a) $2sin^2x + cos^2x - 2 = 0$ b) $2sin^2x + cosx = 0$ c) $sinxcosx = 0$

7. Решите уравнения.

a) $sin^2x - 2sinxcosx + cos^2x = 0$ b) $7cos^2x - 3sin^2x = 0$

c) $cos^22x - 10sin2xcos2x + 21sin^22x = 0$ d) $8sin^2x - cos^2x = 0$

8. Решите уравнения подстановкой.

a) $cos^22x + 1 = 2cos^2x$ b) $3cos^2xsinx + 1 = 3cos^2x + sinx$

c) $6cos^2x + 6sin^2x - 3cosx - 3 = 0$ d) $5sin^2xcosx + 6cos^2x - 10cosx + 6 = 0$

9. Решите уравнения.

a) $cos2x + cosx = 0$ b) $cos3x = 2cos2x - 1$

c) $2cos^2x = 4sinxcosx - 1$ d) $cos^2x - 3sinxcosx = -1$

10. Решите уравнения заменой $sinx + cosx = t$.

a) $2(sinx + cosx) + sin2x + 1 = 0$ b) $\sin x + \cos x = +\frac{\sin x}{}$

11. Решите уравнения методом оценки.

a) $2sin^8x - 3cos^8x = 5$ b) $(cos2x - cos4x)^2 = 4 - 4cos^23x$

12. Решите уравнения с помощью введения вспомогательного угла.

a) $12cosx - 5sinx = -13$ b) $sinx + cosx = \sqrt{2}$

13. Решите неравенства.

a) $\sqrt{2}\cos 2x \le 1$ b) $2sin3x > -1$ c) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\sin\left(\frac{x}{4} - 3\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\cos\left(\frac{x}{3} + 2\right) < \frac{1}{2}$

14. Решите неравенства.

a) $sin^2x + 2sinx > 0$ b) $cos^2x - cosx < 0$

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. В лотерее 2000 билетов, 400 из которых выигрышные. Найдите вероятность того, что только один из двух взятых билетов окажется выигрышным.

2. Найдите вероятность того, что при бросании двух костей сумма выпавших очков равна 7, а произведение равно 6.

3. В корзине 7 чёрных и 8 белых шаров. Вынули один шар. Какова вероятность того, что он окажется: а) белым; б) чёрным?

4. Найдите вероятность кратности на 3 наугад взятого натурального числа, не превосходящего 25.

5. Из партии из 1000 книг, отобранных случайным образом в издательстве, 7 оказались непригодными. Найдите относительную частоту непригодных книг.

6. В квадрат вписан круг. Найдите вероятность того, что точка, помещённая в квадрате, окажется внутри круга.

7. Найдите вероятность того, что сумма выпавших чисел при бросании двух костей одновременно меньше шести.

8. В коробке 11 белых и 9 чёрных шаров. Найдите вероятность того, что 2 из 4 взятых наугад шаров будут белыми.

9. В корзине 7 красных и 13 синих мячей. Найдите вероятность того, что 2 взятых наугад мяча будут разного цвета.

10. В коробке 7 белых и 3 чёрных шара. Найдите вероятность того, что вынутые наугад из неё 2 шара окажутся разного цвета.

11. Абонент, набирая номер телефона, забыл три цифры в конце. Найдите вероятность того, что при наборе цифр наугад будет набран правильный номер.

12. В коробке 100 лампочек, 10 из которых неисправны. Найдите вероятность того, что 2 лампочки будут бракованными, если взять 4 лампочки наугад.

13. Найдите вероятность того, что 3 случайно выбранных шаров из 3 синих, 4 красных и 5 зелёных будут разного цвета.

14. Если в партии изделий с относительной частотой пригодности 0,8 проверено 250 изделий, Найдите количество пригодных изделий.

15. В мешке 5 синих и 7 жёлтых шаров. Найдите вероятность того, что два случайно извлечённых шара будут разного цвета.

16. В корзине 5 зелёных, 7 жёлтых и 8 красных яблок. Найдите вероятность того, что 3 случайно выбранных яблока будут разного цвета.

17. В коробке лежат 6 пронумерованных одинаковых игральных костей. По одной извлекают все кости. Найдите вероятность того, что номера извлечённых костей появятся в порядке убывания.

18. В коробке 12 белых и 18 красных шаров. Найдите вероятность того, что 3 из вынутых 4 шаров будут красными.

19. В классе 36 учеников, 13 из них занимаются в шахматном кружке. Найдите вероятность того, что хотя бы один из 7 учеников из этого класса посещает шахматный кружок.

ПОВТОРЕНИЕ (ОТВЕТЫ)

ФУНКЦИЯ И ЕЁ СВОЙСТВА

1. a) $x \neq \pm 2$ **b)** $(-\infty;-\sqrt{3}]\cup[0;\sqrt{3}]$ **c)** $[5;7)\cup(7;9]$

d) $(-\infty;0)\cup[1;3]\cup(4;\infty)$ **e)** $[-1;0]\cup(2;4)$ **f)** $[-5;-1)\cup(-1;5]$

2. 1 **3.** $f(x)=x^2-5x+6$ **4.** x **5.** $\dfrac{4x}{1-x^2}$

6. a) $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$ **b)** $[-1;1]$ **c)** $\{1,3\}$ **d)** $(-\infty;6]$ **e)** $(1;5]$ **f)** $\left[\sqrt{2};\infty\right)$

7. a) Ни чётная, ни нечётная b) Ни чётная, ни нечётная c) Ни чётная, ни нечётная
d) Нечётная e) Нечётная f) Ни чётная, ни нечётная

8. a) Нечётная b) Чётная c) Чётная d) Чётная e) Нечётная f) Ни чётная, ни нечётная

РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. $t \in R$ **2.** $x=-\dfrac{1}{4}$ **3.** $x_1=4;\ x_2=\dfrac{1}{2}$ **4.** $x_1=-1;\ x_2=16$ **5.** $x=7,75$

6. $x_1=-1;\ x_2=6$ **7.** $x_1=3;\ x_2=2$ **8.** $x=1$ **9.** $x_1=1;\ x_2=2$ **10.** $x=0$

11. $x=-5$ **12.** $x_1=0,\ x_2=99,\ x_3=49\dfrac{50}{99}$ **13.** $x=1,5$ **14.** $x=3$

15. $x_1=-4;\ x_2=9$ **16.** $x_1=1;\ x_2=4;\ x_{3,4}=\dfrac{7\pm\sqrt{33}}{4}$ **17.** $x_1=0;\ x_2=3$ **18.** $x=-2$

19. $x_1=0;\ x_2=1$ **20.** $x_1=-4;\ x_2=2;\ x_3=-1\pm2\sqrt{2}$ **21.** $x_1=-\dfrac{2}{3}$ va $x_2=2$ **22.** 32 $\dfrac{km}{h}$

23. 12 $\dfrac{km}{h}$ **24.** $x_1=-\sqrt{6},\ x_2=\sqrt{6}$ **25.** $x_1=-2\sqrt{7}-1,\ x_2=2\sqrt{7}-1$

26. $x_1=-4,\ x_2=4$ **27.** $x_1=-\dfrac{3}{4},\ x_2=\dfrac{3}{4}$ **28.** $x=2$

29. $x_1=-0,8,\ x_2=8$ **30.** $x_1=2,\ x_2=\dfrac{1}{2}$ **31.** $x_1=1,2\ ,\ x_2=2,4$ **32.** $x=1$

33. $x_1=2+\sqrt{3},\ x_2=2-\sqrt{3},\ x_3=1$ **34.** $x=-2,5$ **35.** $x_1=-6,\ x_2=0$

36. $x_1=-9,\ x_2=4$ **37.** $x=-8$ **38.** Не имеет корня

СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. $(-2;-1),(2;1)$ 2. $\left(\frac{10}{3};\frac{2}{3}\right),(4;1)$ 3. $(6;2)(-6;-2)$ 4. $(1;0)$

5. $\left(-4\sqrt[3]{\frac{4}{9}};-2\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right),(-3;2)$ 6. $(4;3),(-4;-3)$ 7. $(4;1),(-4;-1),(2;2),(-2;-2)$

8. $(-10;15),(15;-10)$ 9. $(5;-2)$

10. $\left(2\sqrt{3};\sqrt{3}\right),\left(-2\sqrt{3};-\sqrt{3}\right),\left(-2\sqrt{3};\sqrt{3}\right),\left(2\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)$ 11. $(2;1)$ 12. $(5;3)$

13. $(1;3),(2;6)$

РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

1. $\left(-\infty;\frac{3}{4}\right)\cup\left(\frac{4}{5};\infty\right)$ 2. $(-\infty;-7)\cup(-4;4)$ 3. $[-7;1]\cup\{2\}\cup[5;\infty)$

4. $(-6;4)\cup(7;\infty)$ 5. $[-3;-2]\cup[-1;1]\cup[2;3]$ 6. $\left(\frac{-2-\sqrt{2}}{2};\frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};1\right)$

7. $(-1,5;2)$ 8. $(-\infty;-2,5)\cup(3;\infty)$ 9. $(2;4)\cup(7;\infty)$

10. $(-3;-1)\cup(1;3)\cup(3;\infty)$ 11. $(3;\infty)$ 12. $(-\infty;-3)$ 13. $(3,5;\infty)$

14. $(-\infty;-8)\cup\{-1\}\cup(1;\infty)$ 15. $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right]$ 16. $\left[-5;-\frac{8}{3}\right)\cup(1;3]$

17. $(-\infty;-2)\cup(3;8)$ 18. $(-\infty;-3)\cup\left(-\frac{7}{4};2\right)$ 19. $(-\infty;-3)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{5}{3}\right)$

20. $(-\infty;2)\cup(2;\infty)$ 21. $[1;3)$ 22. $\left(-2;-\frac{5}{4}\right]\cup(-1;1)\cup[5;\infty)$ 23. $(-\infty;-1,5)\cup(-1;1)\cup(4;6)$

24. $(-\infty;-3)\cup\left[\frac{2}{3};1\right)$ 25. $(-\infty;2)\cup(2;3)\cup(3;4)\cup(4;\infty)$ 26. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$

СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

1. $(3;7)$ 2. $(1;\infty)$ 3. $\left(\frac{3}{4};\frac{6}{7}\right)$ 4. $\left(-31\frac{3}{5};2\frac{2}{61}\right)$ 5. $(-1;3]$ 6. $\left(-\frac{2}{3};2\right)$

7. $(-\infty;-1,2)$ 8. $[-3;1)$ 9. $\left(\frac{27}{28};\infty\right)$ 10. $\left(-\frac{27}{11};6\right)$ 11. $(-2,4;4,25)$

12. Не имеет решений. 13. $(4;9,5]$ 14. $[0,4;1]$ 15. $\left(0;4\frac{1}{3}\right)$ 16. $(4;\infty)$

17. $(3,6;5)$ 18. $(1;2,5]$ 19. $n=1$ 20. $n=-1$ 21. $n=-1$

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. $\varnothing$ **2.** 64 **3.** $\varnothing$ **4.** 7 **5.** $\varnothing$ **6.** 9 **7.** $\varnothing$ **8.** 1 **9.** $\varnothing$ **10.** 3

11. $\varnothing$ **12.** -1 **13.** 3 **14.** $\varnothing$ **15.** 4 **16.** $-5;4$ **17.** 7 **18.** 5 **19.** $\varnothing$ **20.** 2 **21.** $-7;8$

22. 2 **23.** $0;2;3$ **24.** $-1;0$ **25.** 76 **26.** $-\frac{\sqrt{126-2\sqrt{141}}}{2};\frac{\sqrt{126-2\sqrt{141}}}{2}$ **27.** $-7;2$ **28.** 1

29. 4 **30.** $\varnothing$ **31.** $\frac{10}{7};-\frac{10}{17}$ **32.** 5,5 **33.** $\varnothing$ **34.** 10 **35.** -1 **36.** $-4;4$ **37.** 1

38. $3;-\frac{}{9}$ **39.** $(-\infty;-8]\cup[0;\infty)$ **40.** $\left[0;\frac{5}{4}\right]$ **41.** $[4;8]$ **42.** $[-1;0)\cup[1;\infty)$

43. $x\in\varnothing$ **44.** $[9;18]$ **45.** $[32;\infty)$ **46.** $x\in\varnothing$

СИСТЕМЫ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. $(25;9),(9;25)$ **2.** $(16;9),(9;16)$ **3.** $(16;4)$ **4.** $\left(-\frac{5}{7};\frac{3}{7}\right)$ **5.** $(4;9),(9;4)$

6. $(25;49)$ **7.** $(25;1)$ **8.** $(16;4),(-4;-16)$ **9.** $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ **10.** $(1;9),(9;1)$

11. $(625;1),(1;625)$ **12.** $(-1;-8),(-8;-1)$ **13.** $\left(64;\frac{1}{64}\right)$ **14.** $(81;16)$

15. a) $(1;1)$ **b)** $(3;3)$ **16. a)** $(4;9),(9;4)$ **b)** $(1;9),(9;1)$

17. a) $\left(9;\frac{1}{4}\right)$ Исправление: $\begin{cases}x\sqrt{x}+12y\sqrt{x}=36\\8y\sqrt{y}+6x\sqrt{y}=28\end{cases}$ **b)** $\left(9;\frac{1}{9}\right)$

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. a) 10 **b)** 1 **c)** 0 **d)** 1 **e)** 2 **f)** 2 **2.** Имеет 1 корень **3.** $\log_3 2$

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

1. a) $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup[1;\infty)$ **b)** $\left(-\frac{1}{2};\infty\right)$ **c)** $(-1;0)$ **d)** $x\in R$ **e)** $(-2;-1)$ **f)** $\left[\frac{5}{4};\infty\right)$ **g)** $(-\infty;-3)$

h) $(-\infty;2]$ **i)** $\left[\frac{1}{2};\infty\right)$

скачано с сайта www.idum.uz

2. **a)** 2 **b)** 2 **c)** бесконечно много **d)** 1 **3.** **a)** -1 **b)** 0 **c)**-1 **d)**1

ПОНЯТИЕ ЛОГАРИФМА. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

1. **1)** Принадлежит **2)** Не принадлежит **3)** Принадлежит **4)** Принадлежит

2. **a)** $(-2;3)$ **b)** $(0;\infty)$ **3.** $x=2$ **4.** Отражая график функции $y=\log_3 x$ симметрично относительно оси Ox.

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

1. **a)** $\frac{2}{5}$ **b)** 3 **c)** $\frac{1}{9}$ **d)**2 **e)** 0 **f)** 738 **g)** $\frac{1}{2}$ **h)** 3

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

1. **a)** 25 **b)** $\frac{1}{625}$ **c)** 3 **d)** $\sqrt[3]{7}$ **2.** **a)** $x\in\varnothing$ **b)** 3 **c)** 3 **d)** 2

3. **a)** 1 **b)** $-2;\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2};1$ **c)** 100 **d)** 32 **4.** **a)** $\frac{1}{16};\frac{1}{2}$ **b)** 0 **c)** $x\in\varnothing$ **d)** 10

СИСТЕМЫ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. **a)** Не имеет корней **b)** $(2;2)$ **c)** $\left(1-\log_3 2;\frac{1}{6}\right)$ **d)** $\left(1-\log_3 2;\frac{1}{6}\right)$ **e)** $\left(-1;\frac{23}{2}\right)$ **и** $(2;1)$

2. **a)** $(2;3),(3;2)$ **b)** $(2;18),(18;2)$

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

1. **a)** $(-5;-4)$ **b)** $(-0,2;0,4)$ **c)** $(-5;2)$ **d)** $(3;28]$ **e)** $x\in\varnothing$ **f)** $(-\infty;-1]\cup[0;\infty)$

g) $(-\infty;1)$ **h)** $\left(0;\frac{1}{3}\right)\cup(1;9)$ **i)** $[3;\infty)$ **2.** Не существует **3.** 65

4. Не существует

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. **a)** $x\neq\pi n,\text{n}\in Z$ **b)** $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\text{n}\in Z$ **c)** $x\neq\pi n;x\neq(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\text{n}\in Z$

d) $x\neq\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\text{n}\in Z$ **e)** $x\in R$ **f)** $x\neq\pi n,\text{n}\in Z$

2. **a)** $E(y)=[-4;2]$ **b)** $E(y)=[1;3]$ **c)** $E(y)=[-1;1]$ **d)** $E(y)=[-1;1]$

3. **a)** Чётная **b)** Нечётная **c)** Ни чётная, ни нечётная **d)** Чётная

скачано с сайта www.idum.uz

4. **a)** $T=4\pi$ **b)** $T=\frac{2\pi}{3}$ **c)** $T=\frac{\pi}{2}$ **d)** $T=6\pi$

5. **a)** **1** и **-1** **b)** $\frac{1}{2}$ **и** $-\frac{1}{2}$ **c)** **1** **и** **-1**

6. **a)** не имеет нулей **b)** $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$ **c)** $x=0; x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ **d)** $x=\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. **a)** $x\in[-3,5;0,5]$ **b)** $x\in\left[-1;-\frac{1}{3}\right]$ **c)** $x\in\varnothing$ **d)** $x\in[1;7]$

2. **a)** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}>\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ **b)** $arctg(-1)<\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

c) $\arccos\sqrt{3}$ не имеет смысла, несопоставимо. **d)** $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)>\arcsin\frac{1}{2}$

3. **a)** $-\frac{2\pi}{3}$ **b)** $\frac{17\pi}{6}$ **c)** $\frac{\pi}{2}$ **d)** $\frac{19\pi}{6}-\frac{1}{2}$

4. **a)** $\frac{\pi}{6}$ **b)** $\frac{5\pi}{3}$ **c)** 0 **d)** $\frac{\pi}{2}$

5. **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $\sqrt{3}$ **c)** 1 **d)** 0 **e)** 0 **f)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

1. **a)** $\arcsin 0,3+\pi$; $-\arcsin 0,3+2\pi$ **b)** $\arcsin 0,15$; $-\arcsin 0,15+\pi$

c) $arccos\,0,6$; $-arccos\,0,6+2\pi$ **d)** $\pi-\arccos 0,43$; $\pi+\arccos 0,43$

2. **a)** $\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}$ **b)** $\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}$ **c)** $\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$ **d)** $\frac{3\pi}{8},\frac{5\pi}{8},\frac{11\pi}{8},\frac{13\pi}{8}$

3. **a)** $\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\arcsin\frac{1}{3},-\arcsin\frac{1}{3}+\pi$ **b)** $\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\arccos\frac{1}{4},-\arccos\frac{1}{4}+2\pi$ **c)** $arctg1,5; arctg1,5+\pi$

4. **a)** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{30}+\frac{\pi n}{10}, n\in Z$ **b)** $\pm\frac{\pi}{60}+\frac{\pi n}{5}, n\in Z$ **c)** $\frac{\pi}{30}+\frac{\pi n}{10}, n\in Z$ **d)** $\frac{\pi}{30}+\frac{\pi n}{10}, n\in Z$

5. **a)** $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3};\frac{\pi n}{8}, n\in Z$ **b)** $\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{9}, n\in Z$ **c)** $\frac{3\pi n}{16}, n\in Z$

6. **a)** $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ **b)** $\pm\arccos\frac{1-\sqrt{17}}{4}+2\pi n, n\in Z$ **c)** $\frac{\pi n}{2}, n\in Z$

7. a) $\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$ b) $\pm\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arccos 0,4\right)+\pi n, n\in Z$ c) $\frac{1}{2}arcctg7+\frac{\pi n}{2};\frac{1}{2}arcctg3+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$

d) $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{7}{9}+\pi n, n\in Z$

8. a) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\pi n, n\in Z$ b) $\frac{\pi}{2}+2\pi n;\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+\pi n, n\in Z$ c) $2\pi n, n\in Z$ d) $x\in\varnothing$

9. a) $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3}, n\in Z$ b) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n; 2\pi n, n\in Z$

c) $\frac{\pi}{4}+\pi n; arctg3+\pi n, n\in Z$ d) $\frac{\pi}{4}+\pi n; arctg2+\pi n, n\in Z$

10. a) $-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$ b) $\frac{\pi}{2}+2\pi n; 2\pi n, n\in Z$ **11.** a) $x\in\varnothing$ b) $\frac{\pi n}{3}, \frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$

12. a) $2arctg5+2\pi n, n\in Z$ b) $\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$ **13.** a) $\left[\frac{\pi}{8}+\pi n;\frac{7\pi}{8}+\pi n\right], n\in Z$

b) $\left(-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3};\frac{7\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}\right), n\in Z$ c) $\left[-\frac{3\pi}{2}+2\pi n; 2\pi n\right], n\in Z$

d) $\left[2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi n\right], n\in Z$ e) $(12-5\pi+8\pi n; 12+\pi+8\pi n), n\in Z$

f) $(\pi-6+6\pi n; 5\pi-6+6\pi n), n\in Z$

14. a) $(2\pi n;\pi+2\pi n), n\in Z$ b) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n; 2\pi n\right)\cup\left(2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right), n\in Z$

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. $\frac{C_{400}^1\cdot C_{600}^1}{C_{2000}^2}=\frac{240}{1999}$ **2.** $\frac{1}{18}$ **3.** a) $\frac{8}{15}$; b) $\frac{7}{15}$ **4.** $\frac{8}{25}$ **5.** $\frac{7}{1000}$

6. $\frac{\pi}{4}$ **7.** $\frac{5}{18}$ **8.** $\frac{C_{11}^2\cdot C_9^2}{C_{20}^4}=\frac{132}{323}$ **9.** $\frac{C_7^1\cdot C_{13}^1}{C_{20}^2}=\frac{91}{190}$ **10.** $\frac{C_7^1\cdot C_3^1}{C_{10}^2}=\frac{7}{15}$

11. $\frac{1}{1000}$ **12.** $\frac{C_{10}^2\cdot C_{90}^2}{C_{100}^4}$ **13.** $\frac{C_3^1\cdot C_4^1\cdot C_5^1}{C_{12}^3}=\frac{3}{11}$ **14.** $250\cdot 0,8=200$ **15.** $\frac{C_5^1\cdot C_7^1}{C_{12}^2}=\frac{35}{66}$

16. $\frac{C_5^1\cdot C_7^1\cdot C_8^1}{C_{20}^3}=\frac{14}{57}$ **17.** $\frac{1}{6!}=\frac{1}{120}$ **18.** $\frac{C_{12}^1\cdot C_8^3}{C_{30}^4}=\frac{32}{1305}$

Учебное издание

АЛГЕБРА
И НАЧАЛО АНАЛИЗА

Учебник для 10 класса
школ общего среднего образования

Перевод с узбекского Адилбек Заитова
Редактор Заре Сардарян
Художественный редактор Сарвар Фармонов
Технический редактор Акмал Сулайманов
Художник Бехзод Зуфаров
Дизайнер Рустам Худайберганов
Редактор страниц Илхом Болтаев
Корректор Людмила Ким

Разрешено к печати 00.00.2022.
Формат 60x84 1/8. Гарнитура «Cambria». Кегль 12. Печать офсетная.
Условный печатный лист 20.46. Издательский печатный лист 21.59.
Тираж ….. экз. Заказ №