ГЕОМЕТРИЯ

10

Учебник для 10 класса школ общего среднего образования

Рекомендован
Министерством народного образования
Республики Узбекистан

Новое издание

Ташкент – 2022

скачано с сайта www.idum.uz

УДК 514(075.3)
ББК 22.151я72
Г 35

Составители:
Боходир Хайдаров
Наргиза Таштемирова
Исак Асроров

Рецензенты:

З. Р. Бабаева – учитель математики общеобразовательной школы №11 г. Гулистан Сырдарьинской области;

М. Х. Усманов – учитель математики ГСОШ №3 Наманганской области при Министерстве народного образования;

А. К. Алибекова – учитель математики ГСОШ №180 Шайхантахурского района г. Ташкента.

Геометрия: учебник для 10 класса / Б. Хайдаров, Н. Таштемирова, И. Асроров – Ташкент: Республиканский центр образования, 2022 – 192 с.

Усовершенствован на основе заключения Института математики им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан.

Оригинальный макет и концепция дизайна разработаны Республиканским центром образования.

Издано за счёт средств Республиканского целевого книжного фонда.

Подготовлено при содействии UNICEF в Узбекистане.

ISBN 978-9943-8454-5-9

© Республиканский центр образования, 2022

скачано с сайта www.idum.uz

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дорогие ученики! Вы начинаете изучать новый раздел геометрии, который называется стереометрия. Стереометрия изучает свойства геометрических фигур в пространстве. В 10 классе вы познакомитесь с аксиомами стереометрии и их следствиями, с параллельностью и перпендикулярностью прямых и плоскостей в пространстве.

Представленный теоретический материал изложен максимально простым и доступным языком. Все объяснения даются на простых жизненных примерах. Вопросы после каждой темы, примеры и задачи на доказательство, вычисление и построение направлены на пробуждение у вас творческого мышления, они способствуют углублению и закреплению полученных знаний. Учебник отличается оригинальным дизайном и наглядным изложением материала урока. Представленные в нём схемы и рисунки служат для лучшего усвоения материала урока.

Изученные геометрические понятия и свойства разовьют в вас умение применять полученные знания на практике и решать с их помощью жизненные задачи. Вы сами сможете убедиться, что полученные знания и навыки по стереометрии необходимы в быту, а также в профессиональной деятельности многих специалистов – архитекторов, строителей, дизайнеров, токарей и других.

Все материалы даны по главам, которые разделены на темы. При изучении теории обратите особое внимание на текст, выделенный жирным шрифтом – это самые важные определения и свойства. Их нужно понимать, запоминать и применять при решении задач. В учебнике вы также найдёте примеры решения задач.

Вопросы в конце каждой темы направлены на то, чтобы помочь вам проверить, насколько хорошо усвоен материал, и повторить его. В конце каждого раздела даются контрольные вопросы и тестовые задания, с помощью которых можно проверить, насколько хорошо вы поняли тему. Вопросы и задания в учебнике имеют три уровня сложности. Вопросы в конце темы и некоторые из помеченных кружком (°) задач имеют начальный уровень сложности и являются подготовительными упражнениями для тех, кто не уверен в достаточном усвоении теоретического материала. Задания средней сложности не отмечены какими-либо знаками. Научившись их решать, убедитесь в том, что усвоили материал на достаточном уровне. Задания повышенной сложности помечены звёздочкой (*). Не переживайте, если не сможете сразу их решить, но будьте терпеливы и настойчивы. Радость от решения сложной задачи станет для вас наградой.

Важным результатом обучения точным наукам, особенно геометрии, является приобретение соответствующих компетенций – образования, основанного на знаниях и умениях, позволяющих успешно действовать в жизни. Задачи и упражнения, представленные в учебнике, направлены на достижение этой цели.

Авторы

скачано с сайта www.idum.uz

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РАБОТЕ С УЧЕБНИКОМ

Чтобы успешно изучать стереометрию по учебнику, мы рекомендуем придерживаться следующих правил:

- *начните изучение каждого пространственного объекта с создания его модели и изучения на её основе его свойств;*
- *уделите особое внимание изображению пространственных объектов в тетради;*
- *сосредоточьтесь на решении жизненных примеров, взятых из повседневной жизни, обратите особое внимание на формирование жизненных навыков;*
- *постепенно переходите от задач с картинками к задачам с текстом;*
- *старайтесь на уроке рассматривать различные предметы быта как модели пространственного тела, решайте больше задач, связанных с изучением их стереометрических свойств;*
- *сосредоточьтесь больше на сущности тел и их применении, чем на доказательстве их свойств и формул.*

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В УЧЕБНИКЕ СИМВОЛЫ И ИХ ТОЛКОВАНИЕ:


– определение геометрического понятия


– формулировка теоремы


– формулировка аксиомы


– вопросы по теме


– активизирующие упражнения


– пример решения задачи


– практические упражнения


– геометрическое исследование


– исторические сведения


– геометрические головоломки


– мультимедийные приложения


– электронные ресурсы

скачано с сайта www.idum.uz

СОДЕРЖАНИЕ



ГЛАВА I
СИСТЕМАТИЧЕСКОЕ ПОВТОРЕНИЕ ПЛАНИМЕТРИИ

1. Логическая структура геометрии 8
2. Геометрические задачи и методы их решения 15
3. Практические упражнения на повторение главы 26



ГЛАВА II
ВВЕДЕНИЕ В СТЕРЕОМЕТРИЮ

4. Основные понятия стереометрии..... 32
5. Прямые и плоскости в пространстве 39
6. Пространственные геометрические фигуры. Многогранники 44
7. Описание и создание модели многогранников 58
8. Построение простейших сечений многогранников 64
9. Подготовка проектной работы 74
10. Практические упражнения на повторение главы 77



ГЛАВА III
ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

11. Взаимное расположение прямых в пространстве 88
12. Пересечение прямых 95
13. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве 98
14. Взаимное расположение плоскостей в пространстве 103
15. Параллельная проекция в пространстве 109
16. Практические упражнения на повторение главы 113

ГЛАВА IV

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ



17. Перпендикулярная прямая и плоскости в пространстве 120
18. Перпендикуляр, наклонная и длина в пространстве 127
19. Теорема о трёх перпендикулярах 135
20. Перпендикулярность плоскостей в пространстве 142
21. Ортогональная проекция в пространстве и её использование в технике 148
22. Практические упражнения на повторение главы 152

ГЛАВА V

ПОВТОРЕНИЕ



23. Повторение 162
Основные сведения о геометрии 175

РАЗВИВАЮЩИЕ ИГРЫ ДЛЯ УЧЕБНИКА «ГЕОМЕТРИЯ» 10 КЛАСС

ВИДЕОУРОКИ ДЛЯ УЧЕБНИКА «ГЕОМЕТРИЯ» 10 КЛАСС



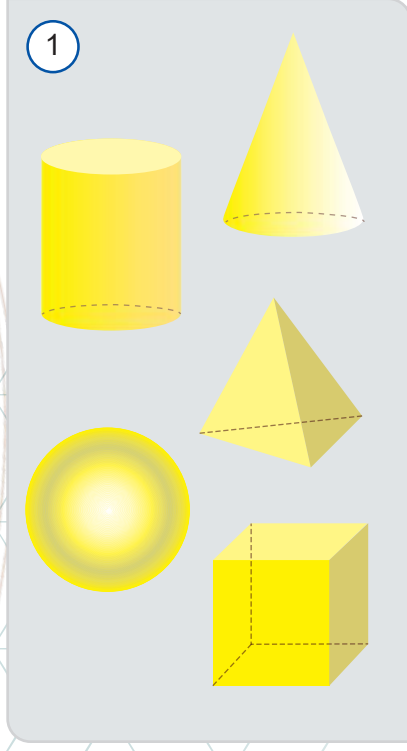
ГЛАВА I

СИСТЕМАТИЧЕСКОЕ ПОВТОРЕНИЕ ПЛАНИМЕТРИИ

В результате изучения данной главы вы закрепите те знания и умения, которые вы сформировали в 7-9 классах при изучении планиметрии, а также:

- познакомитесь с логическим (аксиоматическим) методом геометрии;
- узнаете систему аксиом, положенную в основу планиметрии;
- познакомитесь с учёными, внесшими большой вклад в становление геометрии как самостоятельной науки;
- получше изучите историю геометрии;
- познакомитесь со следующими методами решения геометрических задач: аналитическим, синтетическим, алгебраическим, векторным, координатным, а также методом доказательств от обратного, геометрического преобразования и методом вычисления площади;
- на основе вышеперечисленных методов вы сможете решать задачи по планиметрии.

1 ЛОГИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ГЕОМЕТРИИ



Геометрия – наука, изучающая пространственную форму и количественные характеристики предметов реального мира. Другие свойства вещей изучаются другими науками. Если при изучении предмета принимать во внимание только его пространственную форму и размеры, то мы получим абстрактный объект – *геометрическую фигуру*.

«Геометрия» в переводе с греческого – «землемерие». Геометрия, изучаемая в школе, носит название *евклидовой* в честь древнегреческого учёного Евклида. Геометрия состоит из двух частей: *планиметрии и стереометрии*. *Планиметрия* изучает свойства геометрических фигур на плоскости, *стереометрия* – в пространстве *(рис. 1)*.

Для того чтобы отличать геометрические фигуры друг от друга, описываются их свойства, им даётся *определение*. Но невозможно определить все геометрические фигуры. Мы вынуждены принять первые несколько из них без определения. Мы воспринимаем их как неописуемые, *элементарные (основные) геометрические фигуры*.

Логическое построение геометрии осуществляют в следующем порядке:

1. Принимаются основные (начальные) геометрические фигуры без определения.
2. Принимаются свойства данных фигур без доказательств.
3. Определяют другие геометрические фигуры через основные фигуры и их свойства. Затем доказывают свойства новых фигур и утверждений, их истинность устанавливают по отношению к уже определённым основным понятиям.

Такой метод построения в геометрии называется *аксиоматическим построением*. Свойства фигур, принятые без доказательств, называются *аксиомами*.

В планиметрии, которую мы изучали до сих пор, основными геометрическими фигурами были точка, прямая и плоскость. Эти фигуры мы приняли без определения. Но тем не менее мы дали определение отрезка, луча, треугольника и других геометрических фигур. Следующие свойства (утверждения) мы также приняли в качестве аксиом:

I. Группа аксиом принадлежности:

1.1. Любая прямая линия на плоскости имеет точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.

Основы геометрии были известны египтянам в начале 3-го тысячелетия до нашей эры. Они активно использовали эти знания во времена строительства пирамид. По мнению учёных, древнеегипетские инженеры знали, что верёвка, привязанная к трём кольям, разделенным 12 равноудалёнными узлами (с соотношением сторон 3:4:5), образует прямой угол. Они также использовали геометрические знания, чтобы определить площадь Нильской равнины для посадки сельскохозяйственных культур.

1.2. Через любые две точки проходит только одна прямая.

II. Группа аксиом порядка:

2.1. Из любых трёх различных точек прямой только одна лежит между двумя другими.

2.2. Любая прямая делит плоскость на две части, две полуплоскости.

III. Группа аксиом измерения:

3.1. Любой отрезок имеет определённую длину больше нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он может быть разделён произвольной точкой.

3.2. Любой угол имеет определённую градусную меру больше нуля. Градусная мера развёрнутого угла равна 180°. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

IV. Группа аксиом равенства:

4.1. На любом луче от его начальной точки можно отложить единственный аналогичный отрезок, равный данному.

4.2. От любого луча в определённую полуплоскость можно отложить единственный угол, равный данному, не развёрнутому углу.

4.3. Для любого треугольника существует единственный равный ему треугольник в заданном расположении относительно данного луча.

V. Аксиома параллельности:

5.1. На плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной.

Доказательство – установление правильности *утверждения* с помощью логических размышлений. Утверждение, основанное на доказательстве, называют *теоремой*. Обычно теорема состоит из *условия* и *заключения*. В первой части теоремы, в условии, объясняют, что дано. А во второй части, в заключении, излагают то, что нужно доказать.

Доказать теорему – использовать её условия и, опираясь на принятые и доказанные ранее свойства, при помощи логического рассуждения привести к правильности предложения, сформулированного в заключении. Уточнение условия и

Геометрия – важный раздел математики. Её возникновение уходит вглубь тысячелетий и связано прежде всего с развитием ремёсел, культуры, искусств, с трудовой деятельностью человека и наблюдением за окружаюим миром. Об этом свидетельствуют и названия геометрических фигур. Например, название фигуры «трапеция» происходит от греческого слова «trapezion» – «столик», от которого произошли также слово «трапеза» и другие родственные слова. От греческого «konus» – «сосновая шишка» произошло название «конус».



Евклид (356-300 гг. до н.э.)

Одним из самых известных учёных, изучавших геометрию, был Евклид. Именно в его честь названа классическая ветвь этой науки – «евклидова геометрия». Сам же он доказал 465 теорем. Пока этот рекорд никем не побит.

заключения теоремы разъясняет её, облегчает её понимание и доказательство.

Древнегреческий учёный *Платон* отметил в геометрии удивительную закономерность: из ранее изученных и доказанных свойств, логически размышляя и обдумывая, можно получить новые свойства. Используя эти возможности, остальные свойства формулируются в виде теорем, которые можно доказать с помощью логических размышлений, аксиом, а также свойств, истинность которых уже была доказана.

В процессе рассуждений запрещается использовать недоказанные свойства, даже если их правильность очевидна.

Так, если рассматривать геометрию как единое здание, основные (исходные) понятия и аксиомы составляют его фундамент. «Кирпичи», уложенные поверх этого фундамента, – это новые понятия и свойства, определённые и доказанные в виде теорем.

Древнегреческие учёные внесли большой вклад в формирование геометрии в качестве самостоятельной науки. Например, *Гиппократ* дал описание первых геометрических понятий. Наибольший вклад в этой области принадлежит великому древнегреческому учёному Евклиду (356-300 гг. до н. э.). Его основной труд «Начала» включает в себя вопросы планиметрии, стереометрии и теории вероятностей, а также элементы алгебры, основы теории отношений, способы вычисления площадей и объёмов и элементы теории пределов. Евклид в «Началах» собрал все достижения древнегреческих математиков того времени и создал основу для дальнейшего развития математики.

«Начала» состоят из 13 книг и представляют собой переработанные труды древнегреческих учёных V-IV вв. до н. э. Первая книга содержит 23 определения, 5 постулатов и 9 аксиом. В книге даны правильные определения прямоугольника, квадрата и окружности. Для точки и прямой приведены следующие определения: «Точка – это то, что не имеет частей», «Линия – это длина без ширины».

В «Началах» приведены 9 аксиом – утверждений, принятых без доказательств. Также приведены следующие 5 математических умозаключений (постулатов), позволяющих осуществлять геометрические построения:

I. Через любые две точки можно провести только одну прямую.

II. Отрезок прямой можно бесконечно продолжать.

III. Из любой точки можно построить окружность произвольного радиуса.

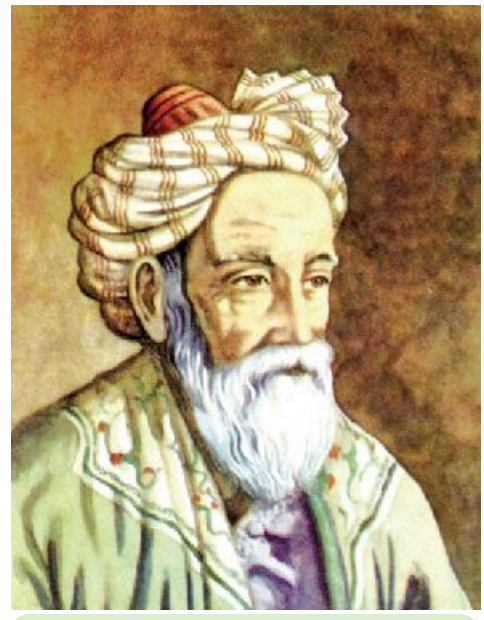
IV. Все прямые углы равны между собой.

V. Если две прямые, лежащие в одной плоскости, пересекаются третьей и образуют внутренние углы, сумма которых меньше двух прямых углов, то при продолжении вышеупомянутых прямых они пересекутся с той стороны, где сумма углов меньше двух прямых углов.

Этот труд получил огромную славу и признание. В частности, постулат V вызвал большие научные споры. Если обозначить внутренние углы в V постулате α и β (рис. 2), а прямые – a и b, то по логике этого постулата $\alpha + \beta < 180°$, и прямые a и b пересекаются.

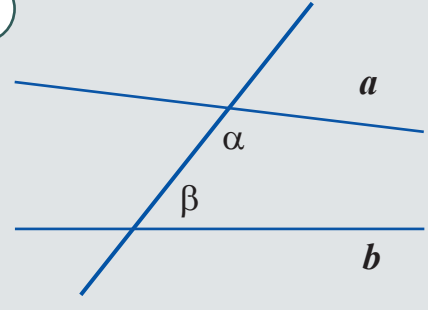
Как видите, пятый постулат не похож на четыре предыдущих, описанных кратко и ясно. Этот постулат больше похож на теорему. Именно поэтому нашлось немало желающих доказать его не как постулат, а как теорему. Для доказательства постулата появился ряд не менее сильных соображений. Например, *аксиома параллельных* английского математика *Яна Плейфера* (1748–1819) звучит так: на плоскости из точки, расположенной вне прямой, можно провести только одну прямую, параллельную этой прямой.

Занимался этим вопросом и математик, поэт, астроном и философ *Омар Хайям*. В своём сочинении «Объяснения трудного в заключениях Эвклида» он коснулся и V постулата. Пытаясь доказать постулат Евклида как теорему, Хайям рассмотрел прямоугольник с двумя прямыми углами и равными сторонами в основании. Он сделал вывод: если два угла в нижнем основании прямые, то и углы при верхнем основании должны быть прямыми (рис.3). Хайям говорит: «Две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, не могут пересечься». При этом Омар Хайям находится в одном шаге от решения вопроса постулата. Итальянский математик Дж. Саккери (1667 – 1733), не знакомый с работами Омара Хайяма, занимаясь V постулатом, также обратился к прямоугольнику. Данный

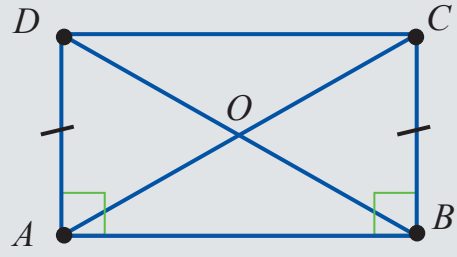


Омар Хайям (1048–1131)

2



3



прямоугольник вошёл в основу геометрии под названием «Прямоугольник Хайяма-Саккери».

Эту проблему решил великий русский математик *Николай Иванович Лобачевский*, создав неевклидовую геометрию. Лобачевский впервые доказал, что V постулат евклидовой геометрии не связан с другими аксиомами. Эта геометрия полностью отличалась от евклидовой. Однако это привело к логическим противоречиям, так как две геометрии не могли существовать одновременно. Тем не менее, Лобачевский получал всё новые результаты, которые также не имели логических противоречий. Новая геометрия и геометрия Евклида полностью совпадали по первым четырём аксиомам. Эту группу аксиом и их следствия назвали *абсолютной геометрией*.

Однако неевклидовая геометрия (геометрия Лобачевского) серьёзно отличалась от геометрии Евклида. Например, в геометрии Лобачевского сумма внутренних углов треугольника может быть меньше π, подобных, но неравных треугольников не существует, множество точек, равноудалённых от данной прямой, являются не прямой, а кривой линией и т.д.

Большой вклад в создание неевклидовой геометрии внесли венгерский математик *Янош Бойяи* (1802–1860) и немецкий математик *Карл Фридрих Гаусс* (1777–1855). Также большую работу по описанию новой геометрии проделали итальянский математик *Эудженио Бельтрами* (1835–1900) и немецкий математик *Бернхард Риман* (1826–1866).

Аксиоматика, начатая Евклидом, была в целом завершена работами немецкого математика *Давида Гильберта* (1862 – 1943) и русского математика *Вениамина Фёдоровича Кагана* (1869 – 1953).



Н. И. Лобачевский (1792–1856)

В V в. до н.э. произошёл решительный поворот в развитии геометрии. Он связан с именем Фалеса из города Милет. Купец Фалес в свободное время занимался математикой и сделал величайшее открытие в истории математики: он обнаружил, что многие геометрические закономерности можно получать не опытным путём, а с помощью рассуждения (доказательства).
Пользуясь этим, Фалес доказал ряд теорем. Благодаря его открытию геометрия к III в. до н. э. становится наукой, в которой имеется небольшое число аксиом (первоначальных предположений), а все остальные факты (теоремы) устанавливаются с помощью доказательств. За Фалесом большой вклад в развитие геометрии внесли Евдокс, Евклид, Архимед.

Вопросы и задания по теме

1. Что вы знаете о Евклиде, который описал систему аксиом геометрии?

2. Расскажите о произведении Евклида «Начала».

3. Что такое «определение»? Какие формы принимаются за основные (исходные) на плоскости без определения?

4. В чём разница между теоремой и аксиомой?

5. Перечислите и объясните аксиомы планиметрии.

6. Как устроена наука геометрия?

7. Что такое V постулат Евклида и почему его пытались доказать?

8. Расскажите об учёных, которые пытались доказать постулат V, и их работах.

9. Как Лобачевский способствовал созданию новой геометрии?

10. Расскажите об учёных, создавших неевклидову геометрию, и об их работах.

Практические упражнения

1.1. Какие из перечисленных геометрических фигур в школьном курсе геометрии принимаются без определения (являются основными), а какие являются определяемыми?

а) точка	б) угол	в) плоскость
г) сечение	д) луч	е) прямая
ж) треугольник		з) острый угол

1.2. Какие из следующих свойств геометрических фигур выдаются в школьном курсе геометрии за аксиомы (т. е. принимаются без доказательства), какие – за теоремы (т. е. их правильность должна быть доказана)?

а) через любые две точки проходит только одна прямая;

б) сумма прилежащих углов равна 180º;

в) сумма внутренних углов треугольника равна 180º;

г) диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам;

д) из любых трёх точек прямой только одна лежит между двумя другими;

е) из точки вне прямой на плоскости к этой прямой можно провести только одну параллельную прямую.

1.3. Прочитайте следующие предложения. Если предложение правильное, поставьте «+», если неверное, поставьте «–» в соседней клетке.

1	Планиметрия изучает свойства геометрических фигур на плоскости, стереометрия – в пространстве.	
2	Исходные (базовые) геометрические формы принимаются без определения.	
3	Из точки, взятой вне прямой на плоскости, можно провести прямую, параллельную этой прямой.	
4	Евклид собрал все свои достижения в своём труде «Начала» и внёс большой вклад в развитие геометрии.	

1.4. Кто способствовал развитию геометрии? Соедините имена учёных из левого столбца таблицы с их достижениями справа.

Омар Хайям	Создал неевклидову геометрию.
Н. И. Лобачевский	Провел исследования по разъяснению V постулата Евклида.
Бернхард Риманн	Описал геометрию как науку.
Евклид	Проделал большую работу в описании неевклидовой геометрии.

1.5. Какое из следующих утверждений было описано Евклидом как постулат V? Какие из них считаются равносильными?

а) если две прямые, лежащие в одной плоскости, пересекаются третьей и образуют внутренние углы, сумма которых меньше двух прямых углов, то при продолжении вышеупомянутых прямых они пересекутся с той стороны, где сумма углов меньше двух прямых углов;

б) если прямые a и b пересечены третьей, а сумма углов $\alpha + \beta < 180°$, то данные прямые пересекаются с той стороны, где лежат эти углы;

в) из точки вне прямой на плоскости к этой прямой можно провести только одну параллельную прямую;

г) через любые две точки можно провести только одну прямую.

1.6*. Дан «четырехугольник Хайяма-Саккери», т.е. четырёхугольник с двумя прямыми углами и равными сторонами в нижнем основании (рис. 3). Попробуйте доказать, что два верхних угла этого прямоугольника прямые, не используя аксиому параллелизма. Возможно ли это? Почему?

2 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Как было отмечено выше, одно из самых замечательных свойств геометрии заключается в возможности создания новых утверждений на основе ранее изученных, уже доказанных, с помощью рассуждений и логического мышления. Благодаря этой возможности, основываясь на аксиомах и ранее доказанных утверждениях, можно доказать и оставшиеся, выраженные в виде теорем или задач. Именно так и появлялись математические или геометрические задачи.

В математической задаче даются первоначальные данные (условия). Используя их, требуется что-то найти (вычислить), доказать или построить. Выполнение поставленных условий и является решением задачи.

Геометрические задачи в соответствии с поставленным требованием делятся на вычислительные, исследовательские, задачи, требующие доказательства, и задачи на построение.

Для решения математической задачи знания условий недостаточно. Предполагается также наличие навыков и опыта решения задач. Чтобы приобрести необходимые навыки, нужно начать с решения простых задач и последовательно переходить к решению более трудных. Точно так же нужно рассматривать различные методы решения и отрабатывать их много раз для успешного усвоения. Каждый метод используется для определённой группы задач. Чем больше методов вы будете применять, тем больше приобретёте навыков решения.

Ниже мы остановимся на некоторых важных методах решения геометрических задач.

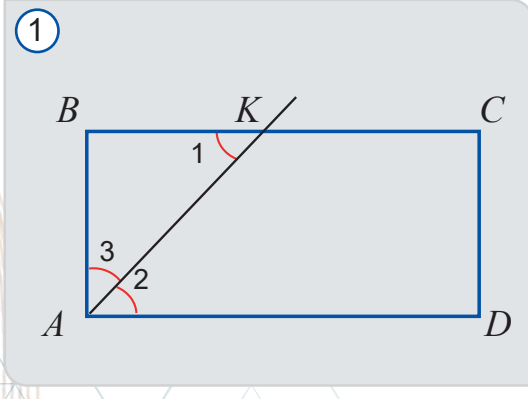
По структуре методы решения задач делятся на синтетический, аналитический, доказательства от противного и так далее. Но по применению математического аппарата методы делятся на: алгебраический, векторный, координатный, поверхностный, метод подобия и метод геометрического преобразования.

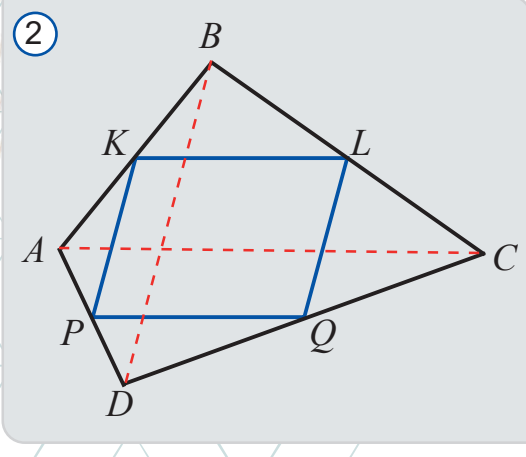
В *синтетическом методе* цепочка логических рассуждений строится на основе данных условий. Цепочку продолжают до тех пор, пока её последнее звено не совпадет с требованием задачи.

Пример 1. Биссектриса прямоугольника делит его сторону на отрезки длиной 7 *см* и 9 *см* (рис. 1). Найдите периметр прямоугольника.



С точки зрения аксиоматического построения существуют различные геометрии, и не во всех из них сумма внутренних углов треугольника равна 180°. В геометрии Лобачевского сумма внутренних углов треугольника меньше 180°, а в римановой геометрии – больше 180°.





Решение. Допустим, $ABCD$ – прямоугольник, AK – биссектриса, $K \in BC$, $BK = 7$ *см*, $KC = 9$ *см* (или $BK = 9$ *см*, $KC = 7$ *см*).

1.Так как $BC \parallel AD$ и AK секущая, то:

$$\angle 1 = \angle 2 \qquad (1)$$

как внутренне накрест лежащие углы.

2. AK – биссектриса: $\angle 2 = \angle 3$ (2)

3. Тогда из (1) и (2) следует, что $\angle 1 = \angle 3$.

4. Тогда треугольник ABK равнобедренный, а $AB = BK$.

5. Используя этот результат, производим расчёты:

В случае 1: $AB = BK = 7$ *см.*

$P = 2 \cdot (AB + BC) = 2 \cdot (7 + 16) = 46$ *см.*

В случае 2: $AB = BK = 9$ *см.*

$P = 2 \cdot (AB + BC) = 2 \cdot (9 + 16) = 50$ *см.*

Этот пример – один из базовых, многие задачи построены по аналогичному принципу. Биссектриса параллелограмма и трапеции всегда отсекает от них равнобедренный треугольник. Всегда следует помнить о таких важных фактах. Именно они помогут вам в решении других задач.

При *аналитическом методе*, исходя из требования (вывода) утверждения (теоремы или задачи) и опираясь на известное утверждение, строится цепочка логических рассуждений. Она продолжается до тех пор, пока не будет определено, что последняя часть условия задачи является результатом.

Пример 2. Докажите, что середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

Доказательство. Допустим, $ABCD$ – четырёхугольник *(рис. 2)*, $AK = KB$, $BL = LC$, $CQ = QD$, $AP = PD$.

Проведем диагонали AC и BD четырёхугольника.

1. В $\triangle ABC$ KL – средняя линия: $KL \parallel AC$ (1).

2. В $\triangle ADC$ PQ – средняя линия: $AC \parallel PQ$ (2).

3.Из (1) и (2) следует: $KL \parallel PQ$ (3).

4. Аналогично пункту (3): $KP \parallel LQ$ (4).

5. Из (3) и (4) следует: $KLQP$ – параллелограмм.

Рассмотренные выше синтетический и

аналитический методы также называются *прямыми методами*. При решении задач прямыми способами сначала анализируются условия задачи. Метод выбирается по результатам анализа. Затем строится чертёж задачи и анализируется. На этом этапе ведётся обсуждение и переход от условия задачи к её решению.

Есть и обратный метод решения задач. Мы встречались с ним много раз. Это метод доказательства *«от противного»*. Приведём алгоритм его использования.

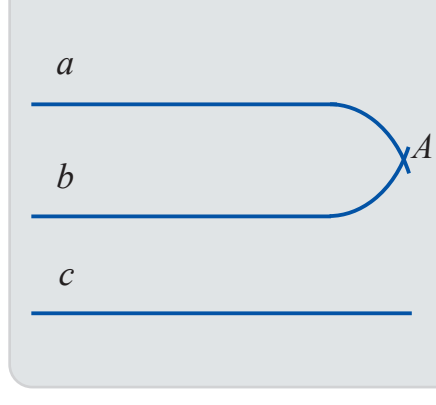
Алгоритм применения метода доказательства «от противного»

Теорема (прямое утверждение)	***Если A верно, верно и B.*** (А и В утверждения)
Доказательство	
Предположение противного:	Предположим утверждение, обратное тому, которое приведено в теореме, т. е. условия теоремы выполнены, но следствие неверно: ***Если A верно, то B не верно.***
Проведение рассуждения:	Мы логически рассуждаем на основе ранее доказанных теорем или общепринятых аксиом.
Противоречие:	Мы сталкиваемся с утверждением, которое противоречит одной из доказанных ранее теорем или принятых аксиом.
Выводы:	Итак, наша гипотеза неверна, а значит, данная теорема верна.
Теорема доказана.	

Пример 3. Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой. Пусть заданы прямые a и b, и пусть каждая из них параллельна третьей прямой c. Докажем теорему методом доказательства «от противного».

Доказательство. Предположим обратное: пусть каждая из прямых a и b параллельна третьей прямой c, но сами прямые не параллельны друг другу, то есть они пересекаются в некоторой точке A (рис. 3). Тогда через точку A проходят две прямые a и b, параллельные прямой c. Это противоречит аксиоме параллельности. Следовательно, предположение было неверным. Значит, если каждая из двух прямых a и b параллельна третьей прямой c, то эти прямые параллельны между собой.

3



Теорема доказана.

Этот метод основан на следующем законе логики: из двух противоречащих утверждений верно лишь одно, а второе ложно, а третий случай невозможен.

Теперь обратимся к другим методам решения геометрических задач.

В евклидовой геометрии через любую точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую. Но в геометрии Лобачевского можно провести минимум две.

Алгебраический метод

При решении геометрических задач алгебраическим методом целесообразно пользоваться следующим алгоритмом:

1) проанализировать содержание задачи и построить чертёж;

2) обозначить неизвестные величины буквами;

3) по условию задачи составить уравнение или систему уравнений;

4) решить составленные уравнения или системы уравнений;

5) проанализировать полученное решение;

6) написать ответ.

Пример 4. Периметр прямоугольного треугольника равен 36 *см*. Отношение гипотенузы к катету равно 5:3. Найдите стороны треугольника. Предположим, что дан $\triangle ABC$, в котором $\angle C = 90°$, $P = 36\ см, AB : AC = 5 : 3$.

Решение. Обозначим коэффициент пропорциональности через k.

Тогда: $AB = 5k, AC = 3k$.

По теореме Пифагора: $AB^2 = AC^2 + BC^2$ или $25k^2 = 9k^2 + BC^2$.

Откуда $BC = \sqrt{25k^2 - 9k^2} = 4k$.

По условию задачи:

$P = 36\ см; AB + AC + BC = P;\ 5k + 3k + 4k = 36;\ k = 3;$
$AB = 5k = 15\ (см), AC = 3k = 9\ (см), BC = 4k = 12\ (см)$.

Ответ: 15 *см*, 9 *см*, 12 *см*.

Метод площадей

При решении некоторых геометрических задач применение формул вычисления площадей даёт быстрый результат. В этом случае неизвестное находится из уравнения, образованного в результате уравнивания площадей вспомогательных фигур. Продемонстрируем это на следующем примере.

Пример 5. Стороны треугольника равны 13 *см*, 14 *см* и 15 *см*. Найдите высоту, опущенную на сторону, равную 14 *см*.

Решение. Пусть задан $\triangle ABC$, где $a < b$ и $b < c$, то есть $a = 13\ см, b = 14\ см, c = 15\ см$. Пусть h_b – искомая высота.

По формуле Герона: $S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 3 \cdot 7 \cdot 4 = 84\ (см^2)$

По другой формуле имеем: $S_\Delta = \frac{1}{2} b h_b$.

Тогда $\frac{1}{2}bh_b = 84$ или $h_b = \frac{84}{2b} = \frac{84}{2 \cdot 14} = 12$,

$h_b = 12\ (cm)$.

Ответ: 12 cm.

Векторный метод

При решении геометрических задач векторным методом лучше пользоваться следующим алгоритмом:

1) перевести задачу на язык векторов, то есть рассмотреть некоторые величины (отрезки), заданные в задаче как векторы, и составить векторное равенство;

2) используя свойства действий над векторами, преобразовать векторные равенства и найти неизвестное;

3) вернуть с векторного языка на геометрический;

4) написать ответ.

Векторный метод используется при решении задач, в которых требуется:

а) определить (доказать) параллельность прямых (отрезков);

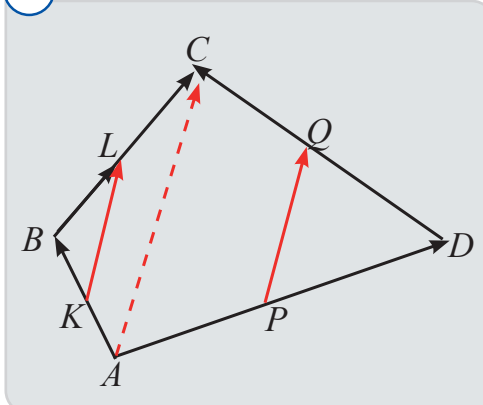
б) поделить отрезки в заданном отношении;

в) показать, что три точки лежат на одной прямой;

г) показать, что четырёхугольник является параллелограммом (ромбом, трапецией, квадратом, прямоугольником).

Пример 6. Докажите, что середины сторон выпуклого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

4



Решение. Пусть $ABCD$ – заданный четырёхугольник, где $AK = KB$, $BL = LC$, $CQ = QD$, $AP = PD$ *(рис. 4)*.

Доказательство. 1. Заменив отрезки соответствующими векторами AB, AC, BC, DC, AD, KL, PQ, BL, KB, запишем задачу векторным языком.

2. Для сложения векторов используем правило треугольника. Учитывая, что:

$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$, $\overline{KB} + \overline{BL} = \overline{KL}$, $\overline{KB} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ и $\overline{BL} = \frac{1}{2}\overline{BC}$,

$\overline{KL} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC}) = \frac{1}{2}\overline{AC}$. Аналогично для $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{AC}$.

3. $KL = PQ$, то есть эти векторы имеют одинаковое направление и одинаковую длину, значит, $KLQP$ – прямоугольный параллелограмм.

Метод координат

При решении геометрических задач методом координат целесообразно пользоваться следующим алгоритмом:

1) проанализировать содержание геометрической задачи и записать её на языке координат;

2) преобразовать выражение и вычислить его значение;

3) перевести результат на геометрический язык и записать ответ.

Методом координат чаще всего решают следующие задачи:

а) нахождение геометрического положения точек;

б) доказательство зависимости между линейными элементами геометрических фигур.

При решении задач методом координат важно рационально выбрать систему координат. Заданную фигуру следует разместить относительно осей координат таким образом, чтобы координаты нужных точек равнялись нулю или одному и тому числу.

Пример 7. Докажите, что параллелограмм, диагонали которого равны, является прямоугольником.

Доказательство. Выберем систему координат так, чтобы вершины параллелограмма имели следующие координаты *(рис. 5)*:

$A(0;0)$, $B(b;c)$, $C(a+b;c)$, $D(a;0)$,

где $a > 0$, $b \geq 0$, $c > 0$.

Расстояния между точками A, B, C, D можно выразить через их координаты:

$$AC = \sqrt{(a+b-0)^2 + (c-0)^2}$$

$$BD = \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2}$$

$$\sqrt{(a+b-0)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2}$$

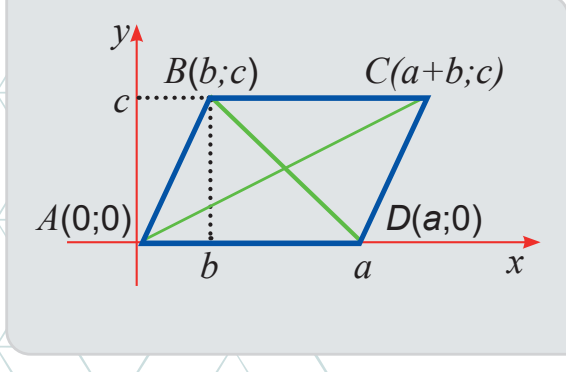
$$(a+b-0)^2 + (c-0)^2 = (a-b)^2 + (0-c)^2$$

Отсюда $4ab = 0$.

Но $a > 0$, тогда $b = 0$. Это, в свою очередь, означает, что точка $B(b; c)$ лежит на оси Oy. Поэтому угол BAD – прямой.

Отсюда следует, что параллелограмм $ABCD$ является прямоугольником.

5



Метод геометрических преобразований

Метод геометрических преобразований включает метод поворота, метод симметрии, метод параллельного переноса и метод гомотетии. При решении задач методом геометрических преобразований наряду с данными геометрическими фигурами рассматриваются и фигуры, полученные в результате определённого преобразования. Определяются свойства новых фигур и переносятся на данную фигуру. Затем выбирается способ решения задачи. Все методы, где используются перечисленные выше свойства геометрических фигур, называются *геометрическими методами*.



Знаменитый изобретатель Архимед считал геометрию самой важной наукой в мире. Он был уверен, что геометрия может объяснить все законы мира, и изобрёл множество механизмов, опередивших своё время благодаря геометрическим знаниям.

Важная информация!

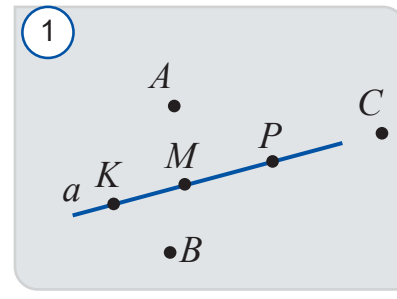
Материалы в этом разделе предназначены, чтобы вспомнить основы планиметрии. Вопросов для повторения дано больше, чем нужно. Вы можете не успеть разобрать их все на уроке, поэтому советуем сделать это самостоятельно. Это подготовит почву для успешного продолжения изучения геометрии в 10-м классе.

Вопросы по теме

1. *Что вы понимаете под математической задачей?*
2. *Какие типы геометрических задач вы знаете?*
3. *Какие способы решения задачи вы знаете?*
4. *Расскажите о синтетических, аналитических методах решения геометрических задач.*
5. *Что вы знаете о прямых и обратных методах решения задач?*
6. *В чём суть метода обратного предположения?*
7. *Объясните алгоритм решения геометрической задачи алгебраическим методом.*
8. *Объясните алгоритм решения геометрической задачи векторным методом.*
9. *Какие задачи обычно решают векторным методом?*
10. *Объясните алгоритм решения геометрической задачи методом координат.*
11. *Как обычно решаются задачи с системой координат?*
12. *Объясните метод геометрических подстановок.*

Практические упражнения

2.1. Найдите правильное математическое утверждение, используя рисунок 1.



A) $A \in a$ B) $K \notin a$ C) $C \in a$ D) $M \notin a$

2.2. На одной прямой выбраны точки A, B, C таким образом, что $AB = 2{,}7\ dm$, $BC = 1{,}3\ dm$, $AC = 1{,}3\ dm$. Определите правильное утверждение о точке, которая лежит между двумя другими.

A) $A \in BC$ B) $B \in AC$ C) $C \in AB$ D) $C \notin AB$.

2.3. Отрезок AC в три раза длиннее отрезка BC. Найдите два утверждения, которые соответствуют данному условию.

A) $AC = 3BC$ B) $3AC = BC$ C) $AC + BC = 4AC$ D) $BC = \frac{1}{3}AC$

2.4. Отрезок AC короче отрезка BC на 2 cm. Найдите два утверждения, которые соответствуют данному условию.

A) $AC - BC = 3\ cm;$ B) $BC - AC = 2\ cm$

C) $AC - 2\ cm = BC;$ D) $AC + 2\ cm = BC$

2.5. Какая из точек A, B, C находится между двумя другими?

A) $AC = 3,\ AB = 8,\ BC = 5$ D) $AC = 9\ mm,\ BC = 21\ mm,\ AB = 12\ mm$

B) $AC=7,\ BC = 12,\ AB= 19$ E) $AC = 21\ m,\ BC = 37\ m,\ AB = 16\ m$

C) $AC=27\ m,\ BC=5\ m,\ AB=22\ m$ F) $BC=18\ dm,\ AC=33\ dm,\ AB =15\ dm$

2.6. Отрезок AB разделен точкой O на отрезки длиной 18 cm и 14 cm. Если точки K и M являются серединами отрезков AO и BO, найдите длину отрезка KM.

2.7. На поперечном сечении длиной 48 dm отмечена точка O. Если $AO : BO = 3 : 5$, найдите длины отрезков AO и BO.

2.8. Точки A, B, C, M лежат на прямой. $AC = 12\ m$, $CB = 5\ m$, а M – середина AC. Найдите длину отрезка MB.

2.9. $\angle KOC = 153^\circ$. Луч OM проходит между сторонами угла. Если $\angle KOM = 2MOC$, найдите углы KOM и MOC.

2.10*. На отрезке AB длиной 75 cm отмечены точки M и K. При этом $N \in AK$, $K \in NB$. Также отрезок AN на 5 cm длиннее отрезка NK, а KB в 2 раза длиннее AN. Найдите длины 5 получившихся отрезков.

2.11*. Луч, проходящий между сторонами угла, делит его на два угла. Докажите, что угол между биссектрисами этих углов в 2 раза меньше заданного угла.

2.12*. a, b, c и d – прямые линии. Все три из них пересекаются в одной точке. Докажите, что все прямые проходят через одну точку.

2.13. При пересечении двух прямых образовались четыре угла *(рис. 2)*. В приведённой ниже таблице сопоставьте каждое утверждение (A-E) с выводом (1–5).

A) $\angle 1 = \angle 3$ 1) $\angle 3 = \angle 4 = 90^\circ$

B) $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ 2) $\angle 1 = \angle 2 = \angle 4 = 90^\circ$

C) $\angle 1 = \angle 2 + 90^\circ$ 3) $\angle 1$ и $\angle 4$ – соседи

D) $\angle 2 + \angle 4 = 260^\circ$ 4) $\angle 1$ и $\angle 3$ – острые

E) $\angle 3 = 90^\circ$. 5) $\angle 2$ и $\angle 4$ – вертикалные

A	
B	
C	
D	
E	

2.14. Ниже приведены градусные измерения некоторых углов (1–7). Какие из них могут быть смежными?

1) 18^o 2) 72^o 3) 128^o 4) 62^o 5) 28^o 6) 108^o 7) 38^o

A) 1 и 2 B) 2 и 6 C) 3 и 4 D) 1 и 7 E) 2 и 5

2.15. Если $\angle 1 = \angle 3$, согласно рисунку 2, найдите правильное утверждение.

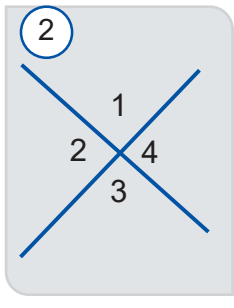
A) $a \parallel b$; *B)* $a \perp b$; *C)* a и b не пересекаются;

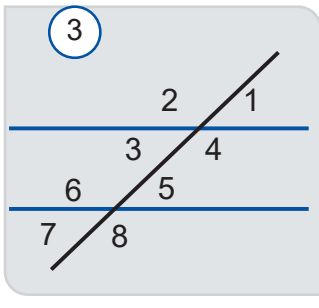
2.16. Если на рисунке 3 $CD \parallel AB$, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 2 = 72°$, то $\angle 3 = ?$

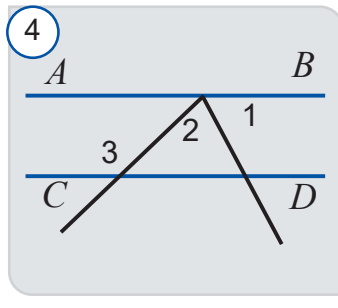
A) 72^o B) 144^o C) 108^o D) 36^o E) 124^o

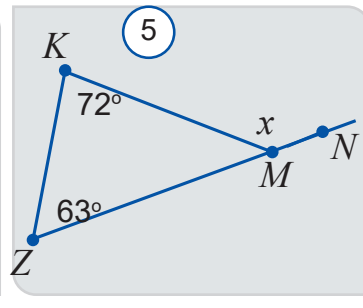
2.17. Найдите угол между биссектрисой вершины и боковой стороной, если углы равностороннего треугольника относятся как 3:4:3.

A) 18^o B) 36^o C) 72^o D) 60^o E) 30^o









2.18. Найдите градусную меру угла KMZ, лежащего вне треугольника KMN (*рис. 5*).

A) 135^o B) 108^o C) 45^o D) 125^o E) 117^o

2.19. Найдите неправильные уравнения *(рис. 6)*.

A) $\triangle ABO = \triangle OCD$ B) $BA = CD$ C) $\triangle ABO = \triangle COD$

D) $\angle AOB = \angle DOC$ E) $\angle BAO = \angle DCO$ F) $\angle BAO = \angle CDO$

2.20. Найдите углы треугольника BOC (*рис. 7*).

A) 48^o, 48^o, 84^o B) 24^o, 132^o, 24^o

C) 132^o, 48^o, 48^o D) 42^o, 90^o, 48^o E) 48^o, 32^o, 20^o

2.21. Сопоставьте периметр (A–E) каждого шестиугольника с радиусом (1–5) описанной окружности и заполните таблицу.

A) $P = 42\ cm$ 1) $R = 2\ cm$

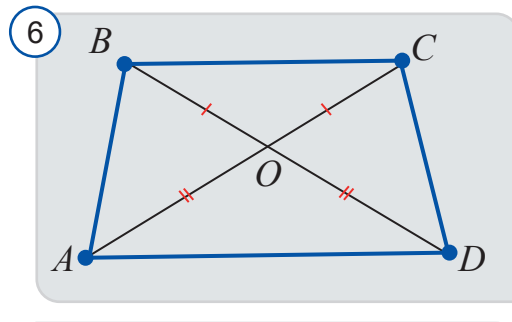
B) $P = 12\ cm$ 2) $R = 8\ cm$

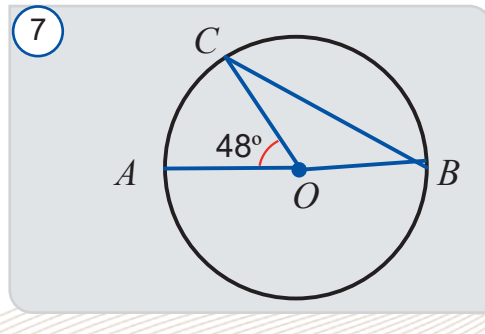
C) $P = 84\ cm$ 3) $R = 6\ cm$

D) $P = 48\ cm$ 4) $R = 14\ cm$

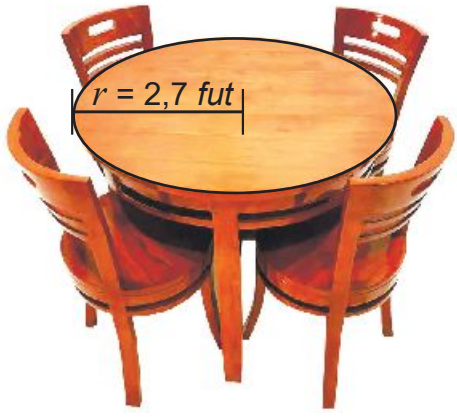
E) $P = 36\ cm$ 5) $R = 7\ cm$

A	
B	
C	
D	
E	

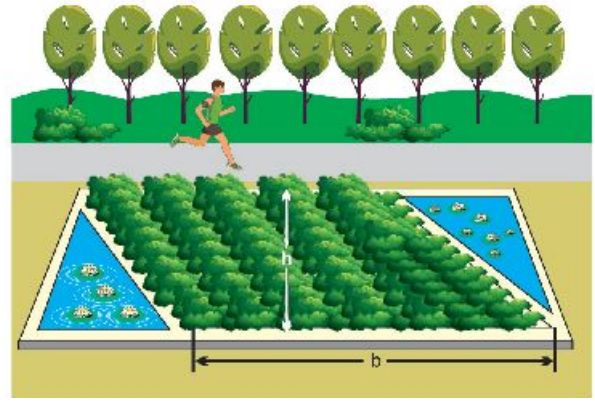




2.22. Найдите площадь поверхности круглого стола (1 *fut* = 30,48 *cm*).

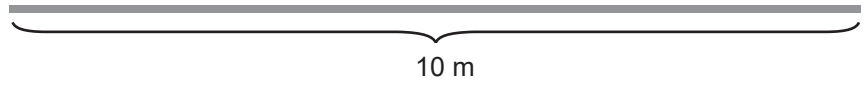


2.23. Найдите площадь клумбы на рисунке, если $h = 3$ *m* и $b = 6$ *m*.

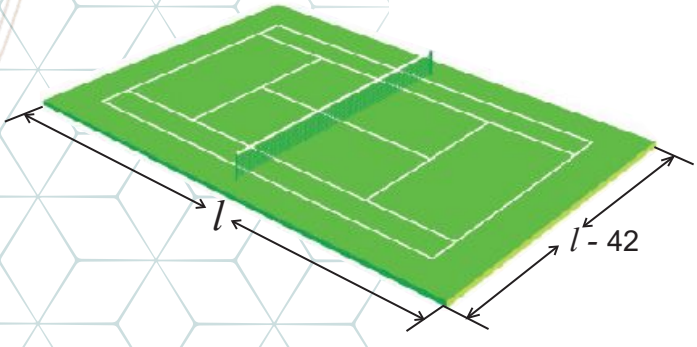


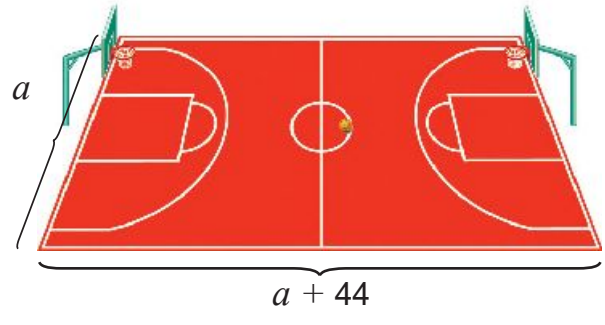
2.24. Найдите размеры каждой рамки, если используется 10 квадратных рамок.





2.25. Периметр баскетбольной площадки составляет 288 футов, а её длина на 44 фута больше ширины. Найдите размеры площадки в метрах (1 *fut* = 30,48 *cm*).









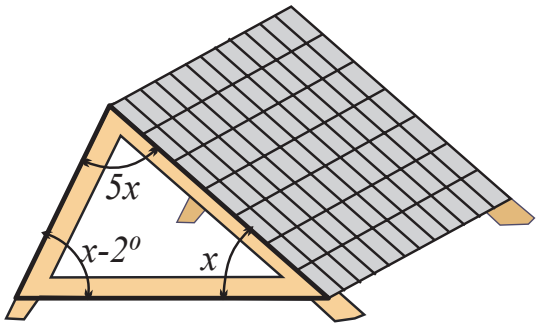
2.26. Периметр теннисного корта – 288 футов, его длина на 42 фута больше ширины. Найдите размеры корта в метрах (1 *fut* = 30,48 *cm*).

2.27. Найдите высоту равнобедренного треугольника на стоянке площадью 288 кв. футов и основанием 16 футов (1 *fut* = 30,48 *cm*).

2.28. Соотношение сторон экрана HD TV на картинке 16:9. Найдите размеры 70-дюймового HD-телевизора в *cm* (1 *dyuym* = 2,54 *cm*).

2.29. Найдите x на углах крыши на рисунках.

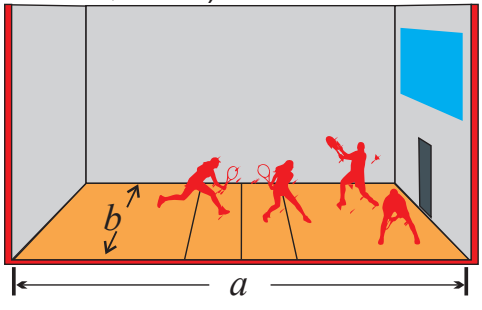
a)

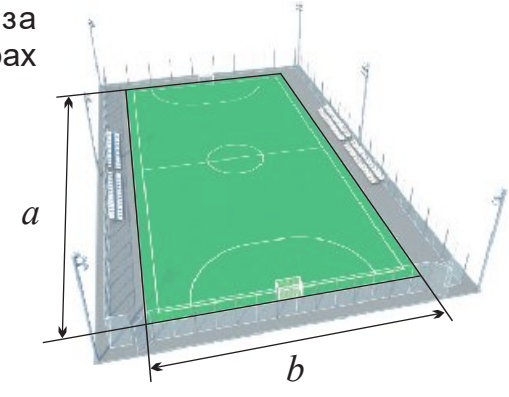


b)



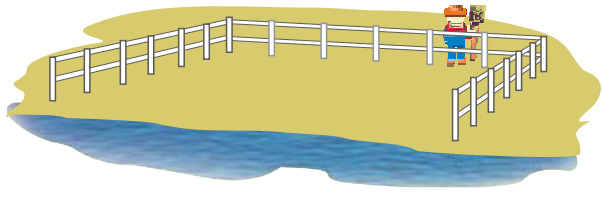
2.30. Если периметр крытой спортивной площадки составляет 120 футов, а длина в два раза больше ширины, найдите размеры поля в метрах (1 *fut* = 30,48 *cm*).





2.31. Найдите размеры футбольного поля, если его периметр равен 340 *m*, а длина на 50 *m* больше ширины.

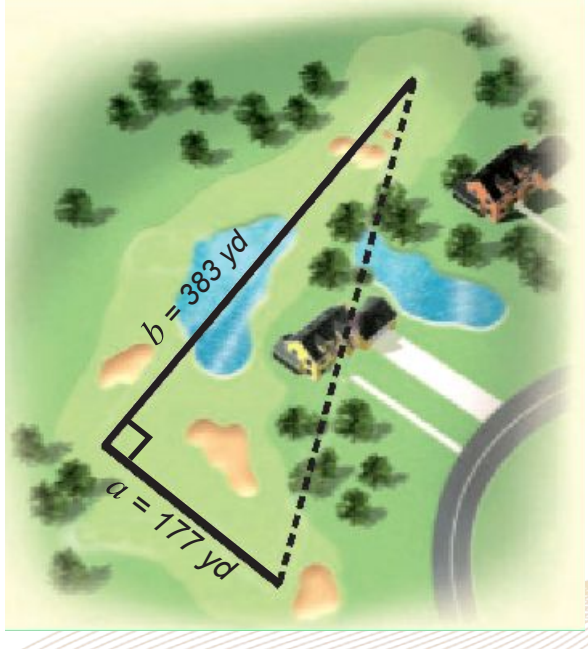
2.32. Фермер хочет огородить прямоугольный участок у реки. Какую наибольшую площадь можно огородить забором длиной 100 *m*?



2.33. Сумма граней двух круглых клумб – $90\pi m^2$, разность – $72\pi m^2$. Найдите радиусы каждой клумбы.

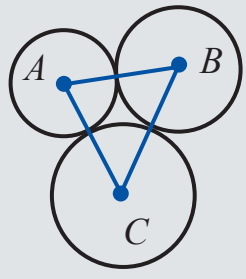


2.34. На рисунке изображена планировка поля для гольфа. При первом ударе игрока мяч откатился на расстояние a, при втором ударе – перпендикулярно направлению первого удара на расстояние b. На каком расстоянии находится мяч от начальной позиции? (1 yd = 0,91 *m*)



3 ПРАКТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ НА ПОВТОРЕНИЕ ГЛАВЫ

1



3.1. Вершины треугольника лежат в центрах трёх пар окружностей радиусами 6 cm, 7 cm и 8 cm (рис. 1). Найдите периметр этого треугольника.

A) 28 cm B) 29 cm C) 27 cm D) 42 cm E) 21 cm

3.2. Сторона квадрата равна *20*. Найдите радиус окружности, вписанной в этот квадрат.

A) 20 B) $10\sqrt{2}$ C) 10 D) $5\sqrt{2}$ E) 5

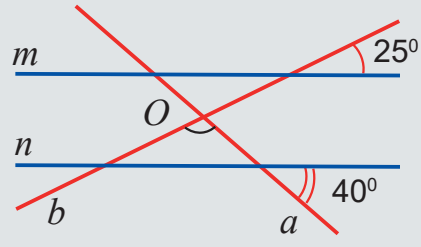
3.3. Одно основание трапеции на 8 cm длиннее другого, а её медиана равна 10 cm. Найдите малое основание трапеции.

A) 2 cm B) 4 cm C) 6 cm D) 8 cm E) 10 cm

3.4. Найдите сторону ромба, диагонали которого равны 10 m и 36 m.

A) 90 m^2 B) 92 m^2 C) 180 m^2 D) *184* m^2 E) *36* m^2

2



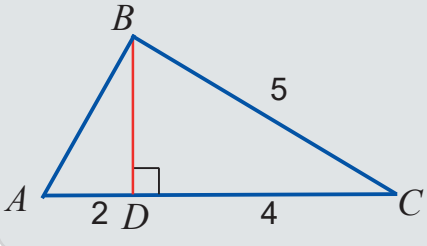
3.5. Если прямые m и n на рисунке 2 параллельны друг другу, найдите угол между прямыми a и b.

A) 50° B) 80° C) 100° D) 65° E) 115°

3.6. Найдите сторону треугольника на рисунке 3.

A) 6 B) 9 C) 12 D) 24 E) 30

3



3.7. Найдите сторону BC треугольника ABC, вписанного в окружность с радиусом R на рисунке 4.

A) R B) $R\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $R\sqrt{2}$ D) $R\sqrt{3}$ E) $R\frac{\sqrt{3}}{2}$

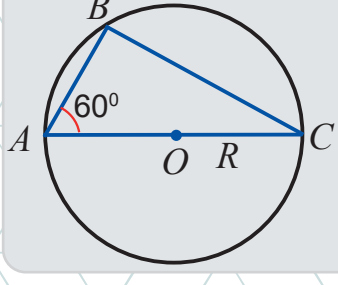
3.8. Найдите длину окружности, площадь которой равна 9π cm^2.

A) 3π cm B) 9π cm C) 12π cm D) 18π cm E) 6π cm

3.9. Найдите сторону круга, вписанного в квадрат со стороной 6 cm.

A) 9π cm^2 B) 144π cm^2 C) 36π cm^2 D) 72π cm^2 E) 18π cm^2

4



3.10. Радиус окружности, вписанной в квадрат, равен 5. Найдите диагональ квадрата.

A) $5\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $5\sqrt{2}$ C) $5\frac{\sqrt{2}}{4}$ D) 10 E) $20\sqrt{3}$

3.11. Найдите количество сторон правильного многоугольника, сумма внутренних углов которого равна 1800°.

A) *12* B) *14* C) *16* D) 18 E) *20*

3.12. Найдите периметр ромба, если его диагонали равны 24 cm и 18 cm.

A) *120* cm B) *60* cm C) *84* cm D) 108 cm E) *144* cm

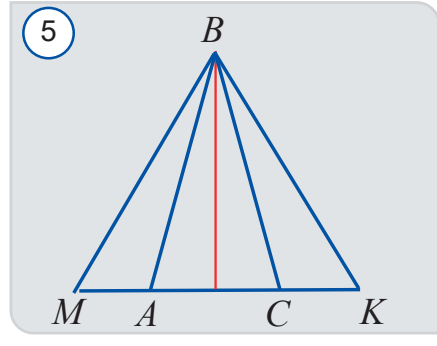
3.13. Периметр параллелограмма равен 48 dm, а одна сторона на 8 dm длиннее другой. Найдите меньшую сторону параллелограмма.

A) *8 dm* B) *16 dm* C) *6 dm* D) *12 dm* E) *10 dm*

3.14. Вне равностороннего треугольника ABC на рис. 5 построены два равных угла ABM и CBK. Стороны этих углов пересекают AC в точках M и K соответственно. Докажите, что треугольники MBC и KBA равны.

3.15. Определите взаимное расположение прямых AB и CD, изображённых на рисунке 6. Обоснуйте ответ.

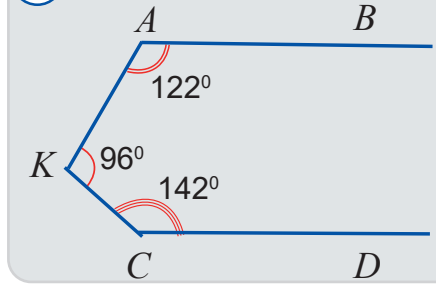
5



3.16. В треугольник ABC на рисунке 7 вписана окружность. Точки N и Z окружности делят стороны AB и AC треугольника на отрезки с разницей в 3 cm и 4 cm соответственно ($AN > NB, AZ > ZC$). Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 28 cm.

3.17. Вокруг равностороннего треугольника описана окружность, радиус которой равен $3\sqrt{3}$. Найдите радиус вписанной окружности.

6



3.18. В окружность вписана равносторонняя трапеция с углом основания 30°. Найдите среднюю линию трапеции, если её высота 7 cm.

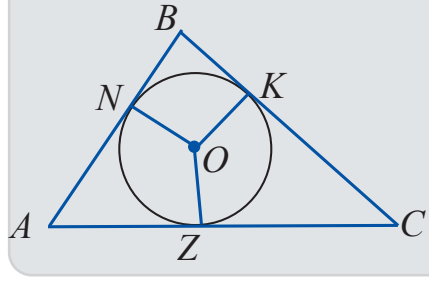
3.19. Вокруг окружности описана равнобокая трапеция, угол при основании равен 150°. Средняя линия трапеции равна $16\sqrt{3}$. Найдите длину высоты трапеции.

3.20. Высота равнобедренного треугольника равна 15 cm, а основание – 16 cm. Найдите боковую сторону треугольника.

3.21. Высота AO треугольника ABC делит его сторону BC на отрезки BO и OC. Если $AB = 10\sqrt{2}$ cm, $AC = 26$ cm и $B = 45^{\circ}$, найдите длину отрезка OC.

3.22. Сторона ромба 10 cm, одна из его диагоналей 12 cm. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб.

7



3.23. Найдите длину хорды, проведённой в окружности радиусом 15 cm на расстоянии 12 cm от центра окружности.

3.24. В окружности проведены две пересекающиеся хорды. Одна из них делится пополам в точке пересечения, другая – на отрезки 5 cm и 20 cm. Найдите длину каждой хорды.

3.25. Из точки вне круга проведены секущая и касательная. Найдите длину касательной, если она на 5 cm длиннее своей внешней части и на 5 cm короче внутренней части секущей.

3.26. Из точки вне круга проведены секущая и касательная. Найдите длину касательной и секущей, если сумма их длин равна 15 cm, а наружная часть секущей на 2 cm короче касательной.

3.27. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу на отрезки 6 cm и 9 cm. Найдите сторону этого треугольника.

3.28. Меньшее основание прямоугольной трапеции равно 8 cm, а меньшая сторона равна $6\sqrt{3}$ cm. Найдите стороны трапеции, если один из её углов равен 120°.

3.29. В окружность вписана трапеция, основания которой равны 40 cm и 14 cm, а высота 39 cm. Найдите радиус окружности.

3.30. Диагонали трапеции равны 20 cm и 15 cm, а высота 12 cm. Найдите стороны трапеции.

3.31. Большая диагональ ромба равна 24 cm, а радиус вписанной окружности равен 6 cm. Найдите сторону ромба.

3.32. Стороны треугольника равны 17 cm, 25 cm, 28 cm. Окружность с центром на большей стороне касается двух других сторон. Найдите площадь круга.

3.33. Найдите площадь параллелограмма, стороны которого равны 6 cm и 4 cm, а угол между диагоналями равен 60°.

3.34. Сумма трёх углов, образованных пересечением двух параллельных прямых третьей прямой, равна 240°. Выразите отношение наибольшего из полученных смежных углов к наименьшему в процентах.

3.35. Один из углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой, в 3 раза больше другого. Найдите сумму двух острых углов.

3.36. Из одной точки окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды, длины которых равны 8 cm и 15 cm. Найдите радиус окружности.

3.37. Из точки окружности проведены две хорды, образующие угол 30°. Найдите длину отрезка, соединяющего их концы, если радиус окружности равен 5 cm.

3.38. Хорда круга длиною 6 cm находится на расстоянии 4 cm от его центра. Найдите длину окружности.

3.39. Боковые стороны трапеции, описанной вокруг окружности, относятся как 7:9, а средняя линия равна 32 cm. Найдите боковые стороны трапеции.

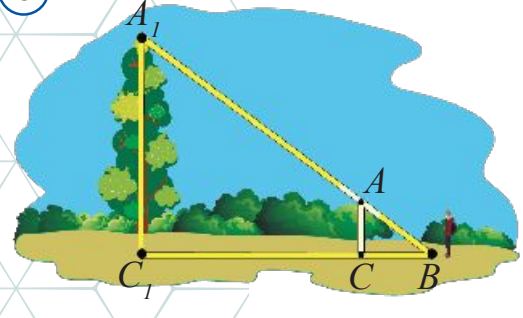
3.40. В окружность радиусом 4 cm вписана трапеция, диагональ которой является биссектрисой острого угла и образует с меньшим основанием угол 30°. Найдите высоту трапеции.

3.41. В треугольнике ABC $\angle A = 45^{\circ}$, $\angle B = 60^{\circ}$, $BC = 3\sqrt{6}$. Найдите сторону AC.

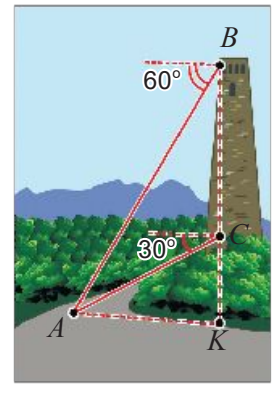
3.42. На рисунке 8 показано определение высоты дерева с помощью палки. Объясните это.

3.43. На горе находится башня высотой 70 m (рис. 9). Некоторый предмет A у подножия горы наблюдают сначала с вершины B башни под углом 60° к горизонту, а потом с её основания C под углом 30°. Найдите высоту горы.

8



9



Сокровищница математических задач

Известно, что в последнее время информационно-коммуникационные технологии очень быстро развиваются и стремительно входят в систему образования. Сейчас в Интернете так много источников информации, что пользоваться этим сокровищем полезно каждому. В Интернете можно найти последние новости мира математики на узбекском, русском, английском и других языках, множество электронных учебников и цифровых ресурсов, хранящихся в электронных библиотеках. Вы также можете ознакомиться с различными теоретическими материалами, методическими рекомендациями, бесчисленными вопросами, примерами и их решениями, информацией о математических экзаменах, конкурсах и олимпиадах, проводимых в разных государствах, а также с интересными математическими задачами и их решениями.



Ниже приведены адреса ряда источников. Рекомендуем вам найти различную интересующую вас информацию о геометрии и воспользоваться возможностями для самостоятельного изучения математики:

1. http://www.uzedu.uz – официальный сайт Министерства народного образования, информационно-образовательный портал.
2. http://www.ziyonet.uz – образовательный портал «Zionet».
3. http://dr.rtm.uz – новые учебники, электронные формы методических пособий для учителей, презентации, мультимедийные приложения, видеоуроки и платформа цифровых ресурсов.
4. http://www.maktab.uz – онлайн-школа для 1–11 классов, площадка для видеоуроков и других материалов по школьной программе.
5. http://www.testing.uz – электронная площадка «Подготовка к международным оценочным исследованиям» для студентов (на узбекском языке).
6. http://www.masofa.uz – портал дистанционного обучения Национального исследовательского института имени А. Авлони.



Электронные формы



Видеоуроки



Презентации



Тесты



Задачи



Дополнительные материалы

7. http://www.onlinedu.uz – электронная площадка «Непрерывное профессиональное образование» Национального исследовательского института им. А. Авлони.
8. http://www.skillgrover.com.uz – финская платформа для изучения математики и оценки знаний учащихся (на узбекском языке).
9. http://www.khanakademy.org – сайт дистанционного образования «Khan Academy» (на английском языке).
10. http://www.khanakademiyasi.uz – платформа для видеоуроков (на узбекском языке) по таким предметам, как математика, информатика, химия, физика, экономика, биология и астрономия.
11. http://www.school.edu.ru – общеобразовательный портал (на русском языке).
12. http://www.problems.ru/ – система поиска задач по математике (на русском языке).
13. http://geometry.net/ – учебные материалы по алгебре и геометрии (на английском языке).
14. http://mathproblem.narod.ru/ – математические кружки и олимпиады (на русском языке).
15. http://www.ixl.com – портал дистанционного обучения математике (на английском языке).
16. http://www.mathkang.ru – сайт международной математической олимпиады «Кангуру».
17. http://www.olimpia.uz – сайт международной математической олимпиады «Кенгуру» (на узбекском языке).
18. http://www.brilliant.org – сайт дистанционного обучения математике (на английском языке).
19. http://www.geogebra.org – бесплатная программа, позволяющая создавать динамические («живые») рисунки по геометрии и алгебре.
20. http://www.yaklass.ru – образовательная онлайн-платформа для школьников и учителей.
21. www.schulen-ans-netz.de – немецкий сайт «Интернет-школа» (на немецком языке).
22. www.studienkreis.de – веб-сайт немецких учебных кружков (на немецком языке).
23. www.educasource.education.fr – французский образовательный сайт (на французском языке).
24. www.educmath.inrp.fr – цифровые ресурсы французского образования по математике (на французском языке).
25. http://mat-game.narod.ru/ – математическая гимнастика. Математические задачи и ребусы (на русском языке).



ГЛАВА II

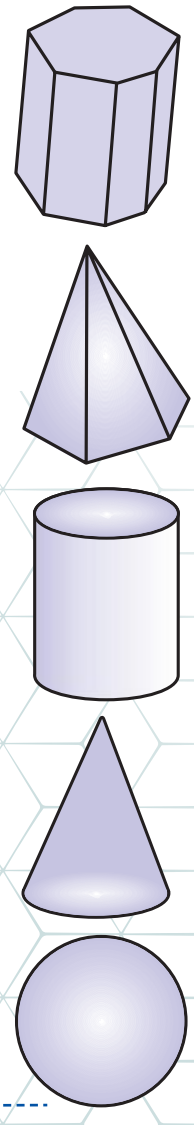
ВВЕДЕНИЕ В СТЕРЕОМЕТРИЮ

В результате изучения данной главы вы:

- узнаете аксиомы стереометрии и научитесь их использовать;
- узнаете выводы из аксиом стереометрии и научитесь их применять;
- узнаете определение параллельных, пересекающихся и скрещивающихся прямых в пространстве и научитесь изображать их на чертеже;
- научитесь описывать прямую линию, параллельную плоскости;
- сможете разбираться в скрещивающихся и параллельных плоскостях;
- будете иметь основные понятия о пространственных телах, многогранниках – призме, параллелепипеде, кубе, пирамиде; научитесь описывать их на плоскости, изображать на чертеже и решать задачи, связанные с нахождением поверхности;
- строить простые сечения с помощью метода «следов» и параллельного сдвига;
- применять изученные понятия, факты и методы в незнакомых или реальных жизненных ситуациях.

4 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТЕРЕОМЕТРИИ

1



Известно, что геометрические фигуры подразделяются на *плоские* и *пространственные* в зависимости от того, лежат они полностью на плоскости или нет. До сих пор на уроках геометрии мы изучали, в основном, свойства плоских геометрических фигур. В конце 9 класса мы рассмотрели свойства некоторых пространственных фигур: призмы, пирамиды, цилиндра, конуса и сферы *(рис. 1)*.

Планиметрия изучает плоские геометрические фигуры, а *стереометрия* – свойства трёхмерных геометрических фигур (или тел). *«Стереометрия»* происходит от греч. *«stereos»* – «объемный, пространственный», и *«metreo»* – «измерять».

Предметы, изображённые на рисунке 2, как символы пространственных тел, дают представление о них. Все предметы окружающего нас мира трёхмерны и объёмны, их форма похожа на какую-нибудь геометрическую фигуру.

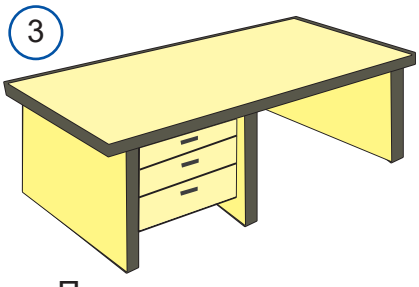
К основным геометрическим фигурам в пространстве относятся *точка, прямая* и *плоскость*. Они являются базовыми понятиями стереометрии и не имеют определения.

Точка может рассматриваться как обозначение мелких предметов, так как размер точки не учитывается; прямая линия может рассматриваться как натянутая струна или край школьной доски.Точки принято обозначать прописными латинскими буквами A, B, C .., прямые – строчными латинскими буквами a, b, c...

2



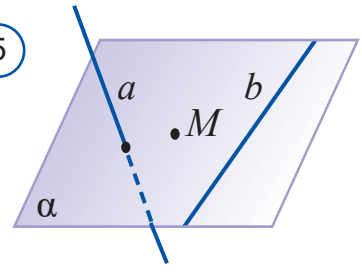
3



4



5



Плоскость можно представить как поверхность наподобие столешницы *(рис. 3)*. Как и прямая линия, плоскость бесконечна. На рисунке мы изображаем только часть плоскости. Хоть мы и представляем её бесконечно вытянутой во все стороны, однако обычно изображаем её на чертеже в виде параллелограмма *(рис. 4)*.

Некоторые обозначения, применяемые в стереометрии

Плоскости обозначаются греческими буквами α, β, γ... .

В пространстве плоскость, прямую и точки изображают, как на рис. 5.

Точка в пространстве может как не принадлежать плоскости *(рис. 6а)*, так и принадлежать ей *(рис. 6б)*.

Если точка M принадлежит плоскости α, то так же можно сказать, что плоскость α проходит через точку M и определить как $M \in \alpha$.

Если точка M не принадлежит плоскости α, она обозначается $M \notin \alpha$.

Точно так же прямая линия может принадлежать или не принадлежать плоскости.

Если все точки прямой a касаются плоскости α *(рис. 7а)*, то говорят, что прямая a лежит в плоскости α или что плоскость α проходит через прямую a и обозначается как $a \subset \alpha$.

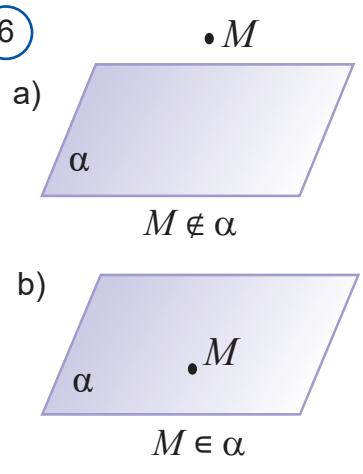
Если прямая a не принадлежит плоскости α, то она определяется как $a \not\subset \alpha$.

Если только одна точка прямой a соответствует плоскости α *(рис. 7б)*, то говорят, что прямая, a пересекает плоскость α и записывают как $\alpha \cap a = M$.

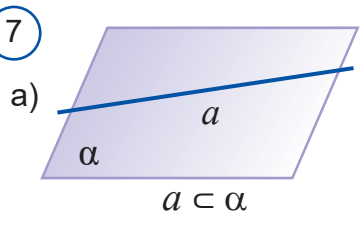
Если точки пересечения плоскостей α и β образуют прямую a *(рис. 8)*, то говорят, что эти две плоскости пересекаются по прямой a, и это обозначается как $\alpha \cap \beta = a$.

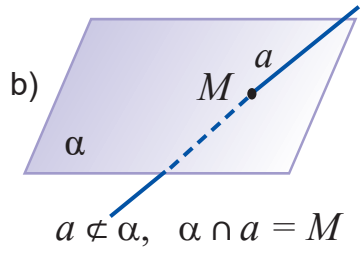
Если плоскости α и β не имеют общих точек *(рис. 9)*, то говорят, что эти две плоскости не пересекаются, и записывают в виде $\alpha \cap \beta = \varnothing$.

6

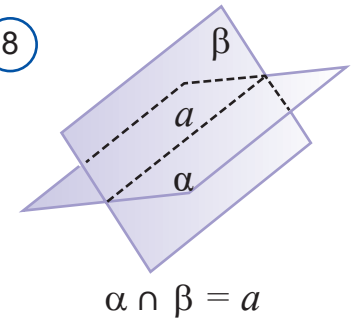


7

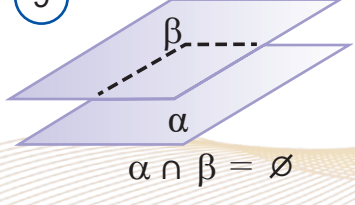




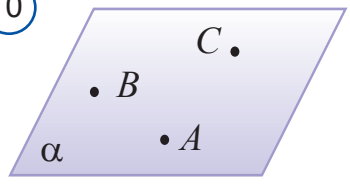
8



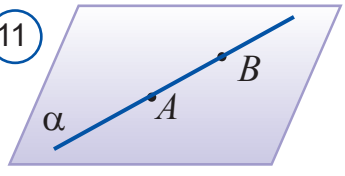
9



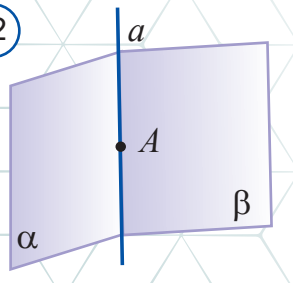
10



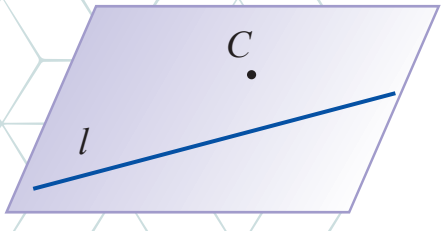
11



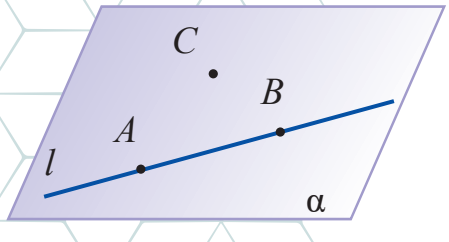
12



13 a)



b)



Аксиомы стереометрии

В стереометрии, как и в планиметрии, свойства некоторых геометрических фигур принимаются без доказательства. Примем без доказательства следующие свойства плоскостей в пространстве как аксиомы группы S:

S_1 *Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит только одна плоскость. (рис. 10).*

S_2 *Если две точки прямой лежат в одной плоскости, то все её точки лежат в этой плоскости (рис. 11).*

S_3 *Если две плоскости имеют общую точку, то у этих плоскостей есть и общая прямая, проходящая через эту точку (рис. 12).*

Эти три аксиомы вместе с аксиомами планиметрии составляют основу стереометрии. В планиметрии у нас была единая плоскость, на которой располагались все рассматриваемые нами фигуры. В стереометрии таких плоскостей бесконечно много, и считается, что аксиомы планиметрии и все свойства, доказанные в планиметрии, применимы ко всем из них. Также в курсе стереометрии необходимо рассматривать аксиомы планиметрии с точки зрения стереометрии.

Следствия из аксиом стереометрии

Теорема 1. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит единственная плоскость.

Доказательство. Пусть l – заданная прямая, а C – не лежащая на ней точка *(рис. 13а)*.

Во-первых, нужно доказать существование плоскости, упомянутой в заключении теоремы. Обозначаем на прямой точки A и B. Точки A, B и C не лежат на одной прямой. Тогда, согласно аксиоме S_1, плоскость можно провести через точки A, B и C *(рис. 13б)*. По аксиоме S_2, плоскость α проходит через прямую l.

Итак, a – искомая плоскость.

Теперь докажем, что эта плоскость – единственная.

Предположим обратное: пусть через прямую l и точку C, не лежащую на ней, можно провести ещё одну плоскость β. Тогда плоскость β также проходит и через точки A, B и C. Но по аксиоме S_1 через три точки может пройти только одна плоскость. Выходит конфликт. Значит, наша гипотеза неверна. Через прямую и точку, не лежащую на ней, может проходить одна и только одна плоскость.

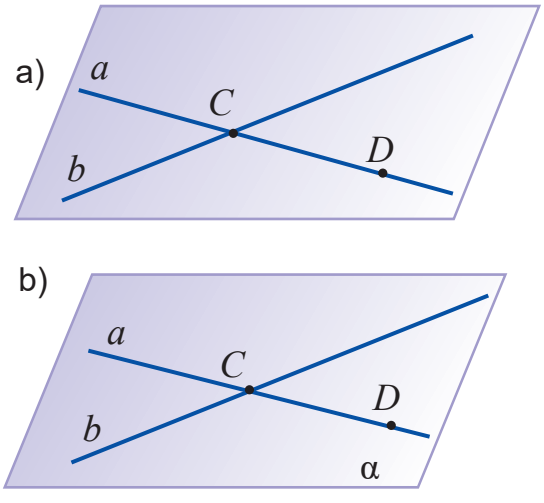
Теорема 2. Через две пересекающиеся прямые проходит только одна плоскость.

Доказательство. Пускай прямые a и b пересекаются в точке C *(рис. 14а)*.

На прямой a помимо точки C возьмём дополнительно точку D. Тогда, согласно Теореме 1, через прямую b и точку D, не лежащую на ней, проходит единственная плоскость α *(рис. 14б)*. Эта плоскость проходит через точки C и D на прямой a. Согласно аксиоме S_2, плоскость α также проходит через прямую a.

Таким образом, плоскость α проходит через две пересекающиеся прямые. Докажите самостоятельно, что эта плоскость единственная.

14

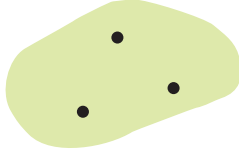
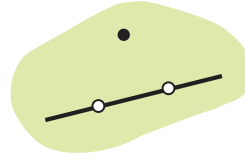
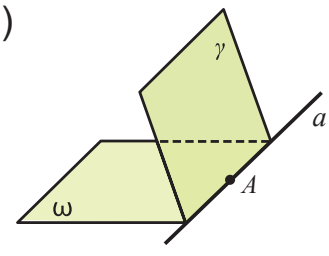
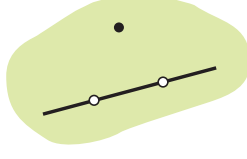
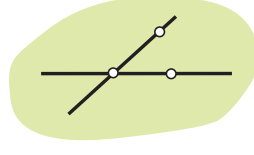
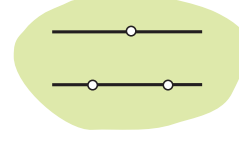


Вопросы по теме

1. *Назовите основные геометрические фигуры в пространстве. Что они могут обозначать?*
2. *Сформулируйте и объясните аксиомы группы S стереометрии.*
3. *Работают ли аксиомы планиметрии и в стереометрии? Что вы понимаете под тем, чтобы посмотреть на аксиомы планиметрии с точки зрения стереометрии?*
4. *В аксиоме S_1 акцентируется внимание на том, что три точки не лежат на одной прямой. Так ли важно это требование? Если его убрать, будет ли верна аксиома? Почему?*
5. *Объясните следствия аксиом стереометрии.*

Практические упражнения

4.1. В таблице содержится основная информация 4-й темы. Внимательно изучите её и интерпретируйте. Докажите Теорему 3.

Аксиомы стереометрии и их следствия (теоремы)		
a)  **Аксиома S_1.** Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.	b)  **Аксиома S_2.** Если две точки прямой лежат в одной плоскости, то все её точки лежат в этой плоскости.	c)  **Аксиома S_3.** Если две плоскости имеют общую точку, то у этих плоскостей есть и общая прямая, проходящая через эту точку.
 **Теорема 1.** Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость и притом только одна.	 **Теорема 2.** Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость и притом только одна.	 **Теорема 3.** Через две параллельные прямые проходит плоскость и притом только одна.

4.2. Соедините определения с их условным обозначением.

Утверждение		Обозначение
1. Точка M принадлежит плоскости α.		$\alpha \cap \beta = \varnothing$
2. Точка M не принадлежит плоскости α.		$M \in \alpha$
3. Прямая a лежит в плоскости α.		$M \notin \alpha$
4. Прямая a не лежит в плоскости α.		$a \subset \alpha$
5. Плоскости α и β пересекаются по прямой a.		$\alpha \cap \beta = a$
6. Плоскости α и β не пересекаются.		$a \not\subset \alpha$

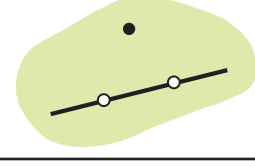
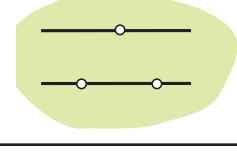
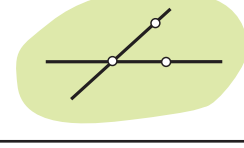
4.3. Представьте стены вашего кабинета как фрагменты плоскостей, укажите на следующее:

а) две пересекающиеся прямые;
б) две пересекающиеся плоскости;
в) три прямые, пересекающиеся в одной точке;
г) две непересекающиеся плоскости;
д) две непересекающиеся прямые;
е) три пересекающиеся плоскости.

4.4. Прочитайте следующие предложения. Если предложение верное, поставьте рядом с ним «+», если неверное, поставьте «–».

1	У двух плоскостей может быть только одна общая точка.	
2	У двух плоскостей могут быть только две общие точки.	
3	У двух плоскостей могут быть две общие прямые.	
4	Через две заданные пересекающиеся прямые можно провести только одну плоскость.	
5	Через прямую и точку, не лежащую на ней, может проходить одна и только одна плоскость.	
6	Если три точки не лежат на одной прямой, то через них можно провести одну плоскость.	
7	Если две точки прямой лежат в одной плоскости, то все её точки лежат в этой плоскости.	
8	Если две плоскости имеют общую точку, то эти плоскости также имеют общую прямую, проходящую через эту точку.	

4.5. Найдите картинку, которая соответствует свойствам пространственных фигур ниже.

Свойства		Чертежи
Через прямую и точку, не лежащую на ней, может проходить одна и только одна плоскость.		
Через две пересекающиеся прямые может проходить одна и только одна плоскость.		
Через две параллельные прямые может проходить одна и только одна плоскость.		

4.6. Сколько прямых могут пройти через две точки в пространстве?

4.7. Сколько плоскостей можно провести через три точки в пространстве?

4.8. Сколько плоскостей можно провести через одну прямую в пространстве?

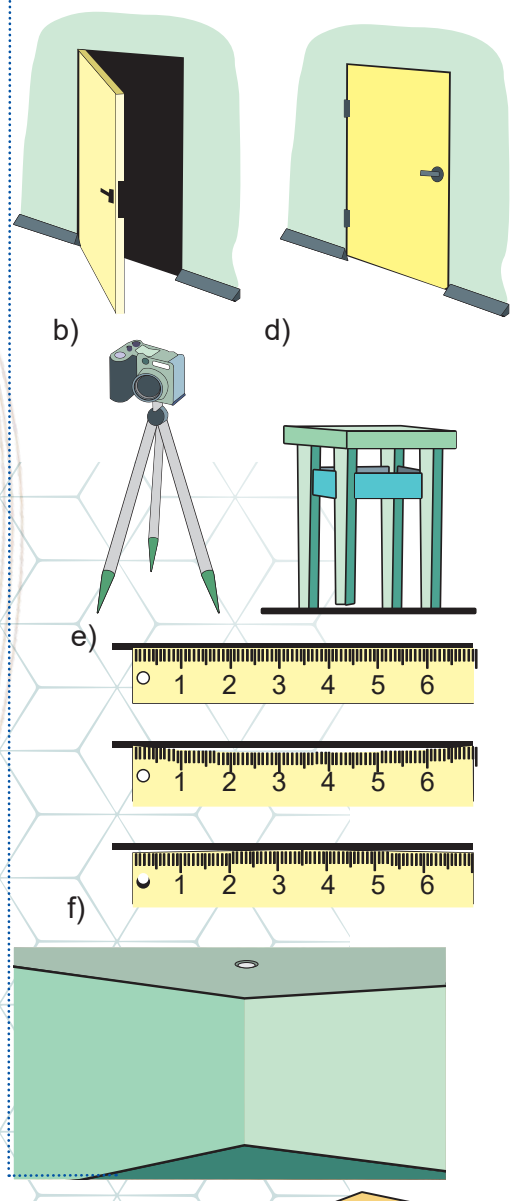
4.9. Когда в пространстве расположены три точки, как через них можно провести бесконечное число плоскостей?

4.10. В пространстве: а) две прямые; б) прямая и плоскость; в) две плоскости. Сколько общих точек может быть у двух плоскостей?

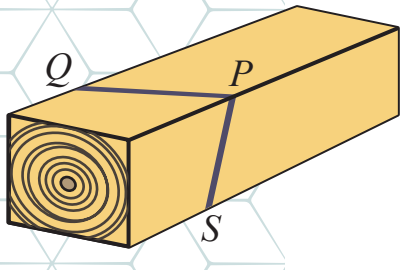
4.11. В пространстве: а) две прямые; б) прямая и плоскость; в) две плоскости; г) три плоскости. Могут ли они иметь общую точку?

4.12. Докажите, что через три точки, лежащие на прямой, можно провести плоскость. Сколько будет таких плоскостей?

15



16



17



4.13. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямые AB и CD не пересекаются.

4.14. Можно ли через точку пересечения двух данных прямых провести третью прямую, не лежащую с ними в одной плоскости? Обоснуйте свой ответ.

4.15. Точки A, B, C лежат в каждой из двух различных плоскостей. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой.

4.16. Докажите, что две различные плоскости проходят через одну прямую.

4.17. Сколько прямых можно провести из них через а) три; б) четыре; в) пять; г) n-пар точек?

4.18. Сколько плоскостей можно провести через а) три; б) четыре; в) пять; г) n-троек точек?

Практические задачи

4.19. На какие аксиомы можно опираться для объяснения случаев на рис. 15?

А) Почему открытая дверь то открывается, то закрывается во время грозы? Почему нет такого действия при закрытом замке?

Б) Почему у камеры три ножки?

В) Как проверить ножки стула, чтобы он прочно стоял на полу?

Г) Как проверяется ровность линейки?

Д) Какую из двух теорем стереометрических аксиом вы можете объяснить?

4.20. На рис. 16 показаны линии, начерченные плотником перед распилом доски. Каким следствием аксиом стереометрии можно объяснить его работу?

4.21. На рис. 17 показан кузнечный процесс выпрямления изогнутого железа. Железный прут сначала кладут на ровное место и выравнивают, ударяя молотком. Затем его переворачивают и снова расплющивают. Какое следствие аксиом стереометрии может объяснить этот процесс?

5 ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Прямые в пространстве

Две прямые в пространстве могут лежать, а могут и не лежать в одной плоскости *(рис. 1)*. Две прямые, не лежащие в одной плоскости в пространстве, называются *скрещивающимися (рис. 1а)*.

Прямые, лежащие в одной плоскости и имеющие только одну общую точку, называются *пересекающимися прямыми (рис. 1б)*.

Прямые, лежащие в одной плоскости и не пересекающиеся друг с другом, называются *параллельными прямыми (рис. 1в)*.

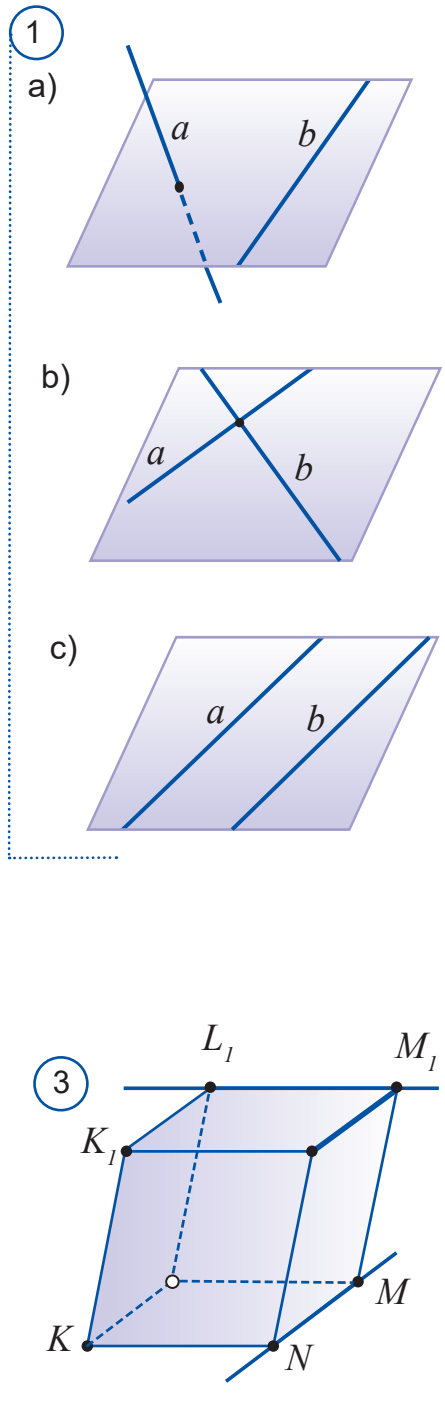
Примером пересекающихся прямых являются дороги, одна из которых проходит через мост, а другая – под мостом *(рис. 2)*. Также можно выделить прямые, лежащие на рёбрах MN и L_1M_1 параллелепипеда *(рис. 3)*.

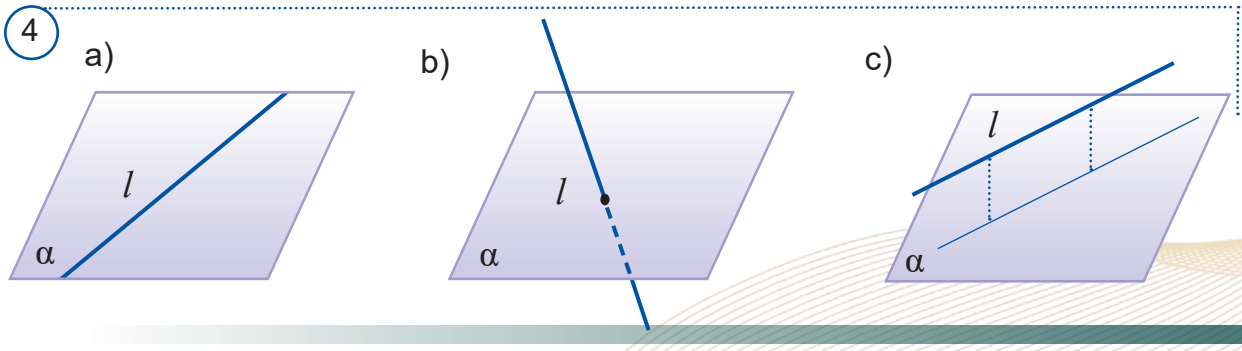
Отрезки и лучи, лежащие на прямых, также называют пересекающимися (параллельными).

Прямая и плоскость в пространстве



Прямая может лежать в плоскости *(рис. 4а)*, пересекать её *(рис. 4б)* или не пересекать её, т. е. не иметь общей точки *(рис. 4в)*. В последнем случае прямую называют *параллельной плоскости*.



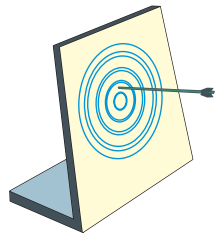


5

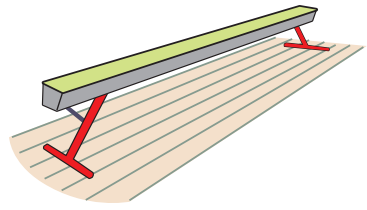
a)



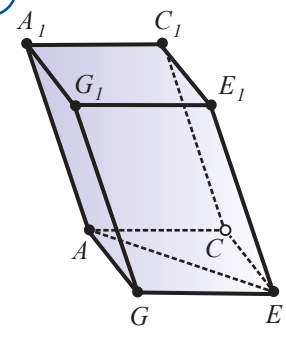
b)



c)

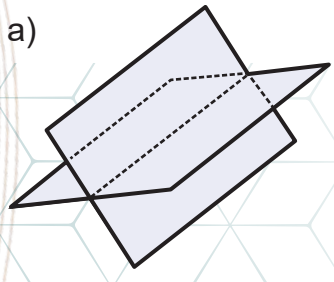


6

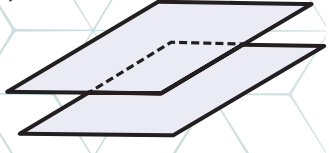


7

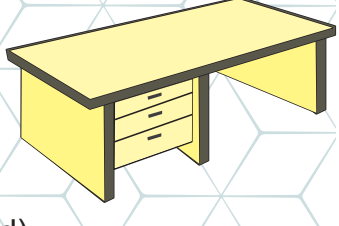
a)



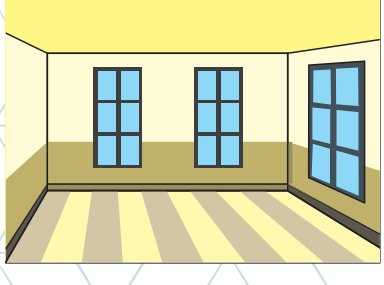
b)



c)



d)



Карандаш, лежащий на столе, даёт представление о прямой, лежащей на плоскости *(рис. 5а)*; стрела, воткнутая в мишень *(рис. 5б)*, даёт представление о прямой, пересекающей плоскость; а гимнастическое бревно, стоящее на полу, – о прямой, параллельной плоскости *(рис. 5в)*.

Прямая AE (диагональ основания параллелепипеда $AGEC$ на рис. 6) лежит в плоскости основания, пересекает плоскость, лежащую на стороне AGA_1G_1 и параллельна верхней плоскости основания $A_1G_1E_1C_1$.

Плоскости в пространстве

Теперь давайте проясним взаимное расположение плоскостей в пространстве.

В пространстве плоскости могут пересекаться по прямой *(рис. 7а)* или не иметь общей точки *(рис. 7б)*. Следовательно, эти плоскости называются соответственно *пересекающимися* или *параллельными плоскостями*.

Верхняя поверхность и боковая сторона стола, *(рис. 7в)* представляют собой пересекающиеся плоскости, а пол и потолок комнаты *(рис. 7г)* – параллельные плоскости.

Так, не противоположные стороны параллелепипеда, изображённого на рисунке 6, представляют собой пересекающиеся плоскости, а верхнее и нижнее основания и противоположные стороны – параллельные плоскости.

Знак параллельности «//» используется не только для параллельных прямых, но и для обозначения прямой, параллельной плоскости, и параллельных плоскостей:

$$a \parallel b,\ a \parallel \alpha \text{ и } \alpha \parallel \beta.$$

Иногда плоскость, проходящую через точки A, B, C, обозначают ABC по определению трёх точек на ней.

Вопросы по теме

1. *Какие прямые на плоскости называются: а) пересекающимися; б) параллельными?*
2. *Какие прямые называются скрещивающимися? Приведите примеры.*
3. *Как могут быть расположены в пространстве две прямые?*
4. *Как называются прямые: а) лежащие на плоскости; б) параллельные плоскости?*
5. *Как могут быть расположены в пространстве прямая и плоскость?*
6. *Какие плоскости в пространстве называются: а) пересекающимися; б) параллельными?*
7. *Как в пространстве могут быть расположены две плоскости?*

Практические задания

5.1. В таблице представлена основная информация темы 5. Внимательно изучите и разъясните её.

Формы	Расположение прямых в пространстве		
Прямые a и b	Лежат в одной плоскости	Имеют общую точку	Пересекающиеся: $a \otimes b$
		Не имеют общую точку	Параллельные: $a \,//\, b$
	Не лежат в одной плоскости		Скрещивающиеся: $a \div b$

Формы	Расположение прямых и плоскостей в пространстве		
a прямая, α плоскость	Прямая a не лежит в плоскости α	Прямая a имеет общую точку с плоскостью α	Пересекающиеся: $a \otimes \alpha$
		Прямая a не имеет общую точку с плоскостью α	Параллельные: $a \,//\, \alpha$
	Прямая a лежит в плоскости α		$a \subset \alpha$

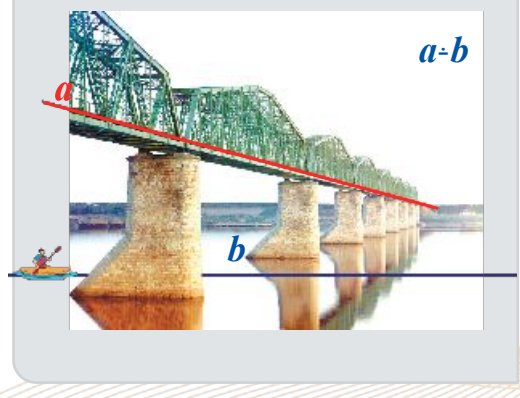
Формы	Расположение плоскостей в пространстве	
Плоскости α и β	Имеют общую точку	Пересекающиеся: $\alpha \cap \beta = a$
	Не имеют общих точек	Параллельные: $\alpha \,//\, \beta$

5.2. Определите, что представляют собой прямые линии в пространстве на рисунке 8.

5.3. В модели куба отобразите следующие пары его элементов:

а) два ребра с одной общей точкой;
б) два ребра, не имеющие общей точки;
в) два ребра, не лежащие в одной плоскости;
г) ребро и сторона с общей точкой;
д) ребро и сторона, не имеющие общих точек;
е) сторона и лежащая на ней ребро;
ж) две непересекающиеся стороны;
з) две пересекающиеся стороны.

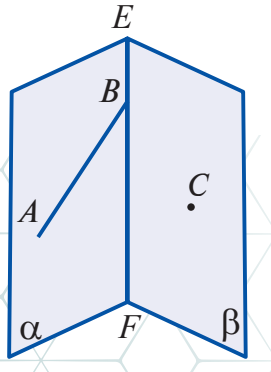
8



5.4. Соедините названия прямых с их свойствами.

Свойства прямых линий	*Взаимное расположение*
Лежат в плоскости и не имеют общей точки.	Скрещивающиеся
Лежат в одной плоскости и имеют общую точку.	Пересекающиеся
Не лежат в одной плоскости.	Параллельные

9



5.5. Плоскости α и β на рис. 9 пересекаются по прямой EF. Прямая AB лежит в плоскости α. Проведите прямую через точку C, лежащую на плоскости β, так, чтобы она:

а) пересекала прямую AB;

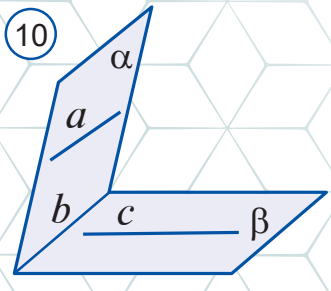
б) с прямой AB были скрещивающимися;

в) прямая AB была параллельна прямой.

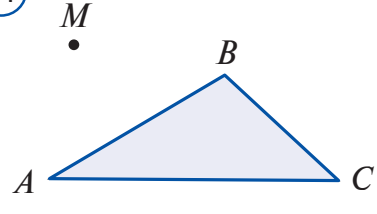
5.6. Известно, что $a \parallel b$ и $a \parallel \alpha$. Как могут быть взаимно расположены прямая b и плоскость α?

5.7. Известно, что $\alpha \parallel \beta$, $a \subset \alpha$ и $b \subset \beta$. Как могут быть взаимно расположены прямые a и b?

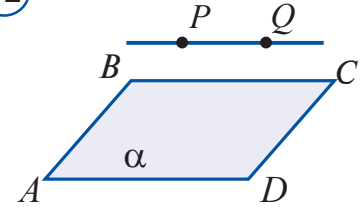
10



11



12



5.8. На рис. 10 плоскости α и β пересекаются по прямой b. Если $a \parallel b$, c и b не параллельны, то как могут быть расположены прямые a и c?

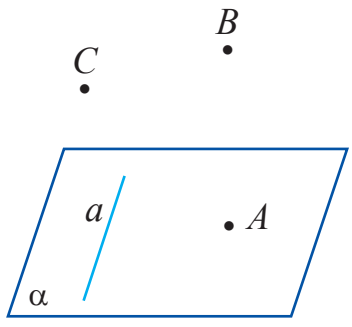
5.9. На рисунке 11 точка M лежит во внешней области треугольника ABC. Найдите скрещивающиеся прямые с прямыми MA, MC, MB.

5.10. На рис. 12 прямая PQ лежит вне прямоугольника $ABCD$, но параллельно BC. Какими являются прямые: a) PQ и AB; b) PQ и CD; c) PQ и AD?

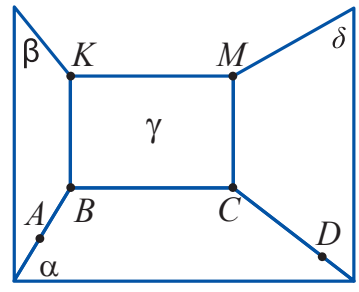
5.11. Дана треугольная пирамида (тетраэдр) $ABCP$. Как прямые линии в таблице ниже относятся друг к другу? Поставьте соответствующий символ ($\otimes$ – пересекает, $\div$ – скрещенные, $\parallel$ – параллель) в соответствующую ячейку.

	AB	BC	AC	PA	PB	PC
AB						
BC						
AC						
PA						
PB						
PC						

13



14



5.12. На рис. 13 прямая a и точка A принадлежат плоскости α. Точки C и B данной плоскости не принадлежат. Будет ли плоскость, проходящая через следующие точки и прямые, отличаться от данной плоскости α?

A) через прямую a и точку B; B) через прямую a и точку C;

C) через прямые AB и AC; D) через прямые AB и BC.

5.13. Используя данные рисунка 14, заполните таблицу по образцу:

Плоскости	α и β	α и γ	α и δ	β и γ	γ и δ
Общие точки	A и B				
Общие прямые	AB				

5.14. Прочитайте следующие предложения. Укажите, верны ли они всегда, иногда или никогда, поставив «+» в соответствующем поле таблицы. Приведите примеры, подтверждающие ваш ответ.

	Предложение	Всегда	Иногда	Никогда
1	Прямая в пространстве не лежит в плоскости.			
2	Две плоскости имеют только одну общую точку.			
3	Плоскости пересекаются прямой.			
4	Две плоскости имеют только две общие точки.			
5	Две плоскости имеют две общие прямые.			
6	Одна плоскость проходит через две пересекающиеся прямые.			
7	Прямая и точка проходят через одну плоскость.			
8	Одна плоскость проходит через три точки.			
9	Если одна точка прямой лежит в плоскости, то все её точки также лежат в этой плоскости.			
10	Если две плоскости имеют общую точку, они пересекаются.			

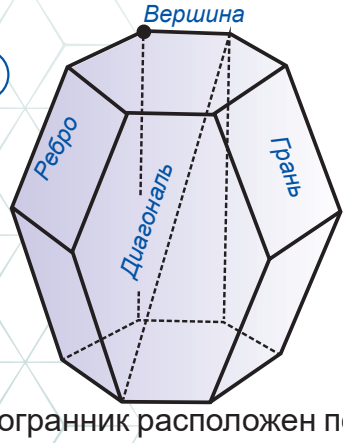
6 ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ. МНОГОГРАННИКИ

В младших классах мы познакомились с рядом пространственных геометрических фигур. Некоторые из них мы назвали *пространственными телами*. Пространственные тела можно представить как часть окружающего мира, занятую материальным телом. Пространственное тело ограничивается своей поверхностью.

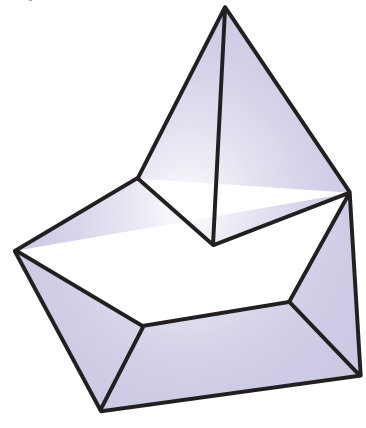
Многогранник – это пространственное тело, ограниченное плоскими многоугольниками. Плоские многоугольники называют *гранями многогранника*, их вершины – *вершинами многогранника*, а стороны – *рёбрами многогранника*. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называют *диагональю многогранника* (рис. 1).

Границу многогранника называют его *поверхностью*. Многогранник делит пространство на две части. Одну из них, бесконечную, называют *внешней областью*, а ограниченную часть – *внутренней областью многогранника*.

1



2



Если многогранник расположен по одну сторону от плоскости, проходящей через любую его грань, то многогранник называют *выпуклым многогранником*.

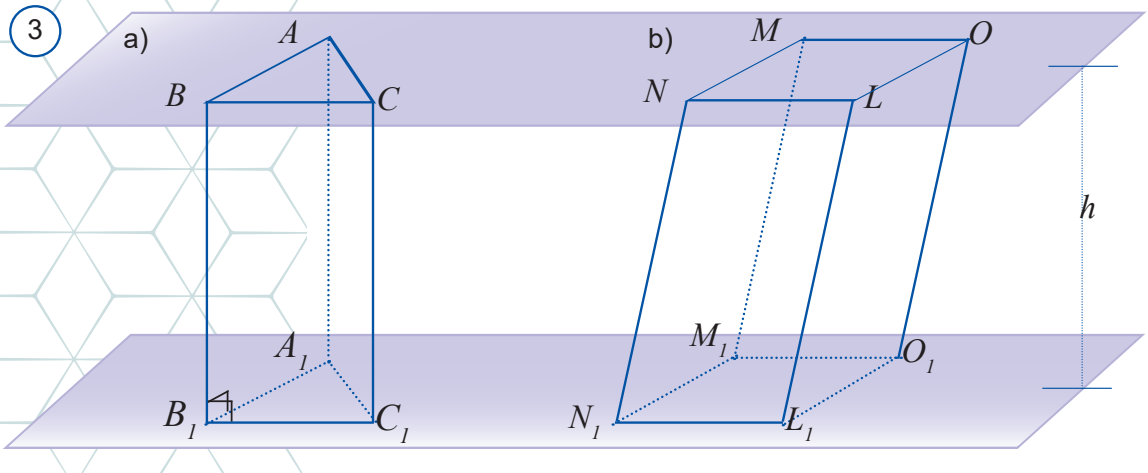
Например, куб – выпуклый многогранник. На рис. 2 изображён не выпуклый многогранник. Позже мы будем изучать простейшие многогранники: призмы и пирамиды.

Многогранник, две грани которого являются равными многоугольниками, а остальные – параллелограммами, называют *призмой* (рис. 3). Равные грани называют *основаниями*, а параллелограммы – *боковыми гранями* многогранника (рис. 4).

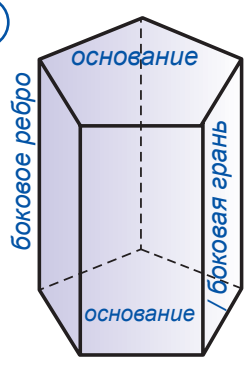
По числу сторон в основании многогранники разделяют на *треугольные, четырёхугольные*, *n-угольные призмы*.

На рисунке 3.а изображена треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, на рисунке 3.б – четырёхугольная призма $MNLOM_1N_1L_1O_1$.

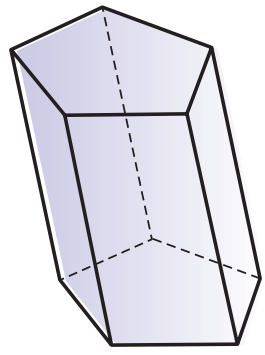
3



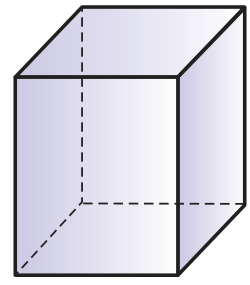
4



5



6



Если боковая грань призмы перпендикулярна основанию, то её называют *прямой призмой (рис. 4)*, если не перпендикулярна, то наклонной призмой *(рис. 5)*.

Если основания прямой призмы являются правильными многоугольниками, то её называют *правильной (рис. 6)*.

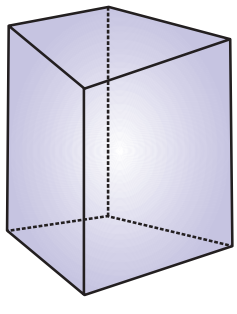
Призма, основанием которой является параллелограмм, называют *параллелепипедом (рис. 7)*. Параллелепипеды, как и призмы, могут быть прямыми *(рис. 8)* и наклонными *(рис. 9)*. Все грани прямого параллелепипеда состоят из правильных прямоугольников.

Прямой параллелепипед с прямоугольным основанием называют *прямоугольным параллелепипедом* (рис. 8). Все грани прямоугольного параллелепипеда – прямоугольники.

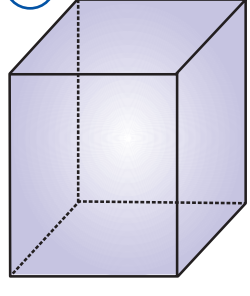
Три ребра прямоугольного параллелепипеда, исходящие из одной вершины, называют *его измерениями*.

Прямоугольный параллелепипед с равными длинами всех трёх измерений называется *кубом*. Очевидно, что гранями куба являются равные квадраты.

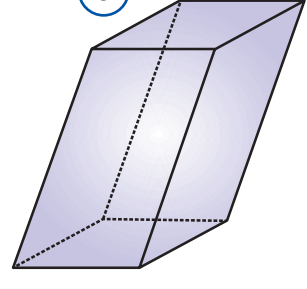
7



8



9



Пирамида – многогранник, одна из граней которого является многоугольником, а остальные – треугольниками. Многоугольник называют *основанием пирамиды,* а треугольники – *боковыми гранями.* На рисунке 10 изображена пятиугольная пирамида *TABCDE.* Пятиугольник *ABCDE* – основание пирамиды, треугольники *ATB, BTC, CTD, DTE* и *ETA* – её боковые грани, а *T* – её вершина.

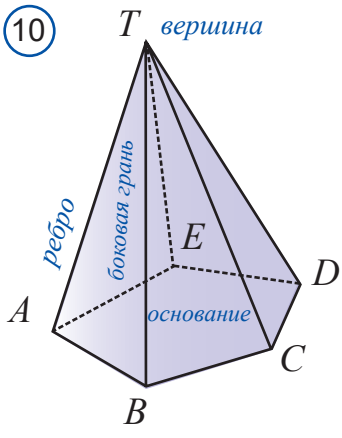
В зависимости от числа сторон основания различают *треугольные, четырёхугольные, n-угольные пирамиды.*

Треугольную пирамиду также называют *тетраэдром.*

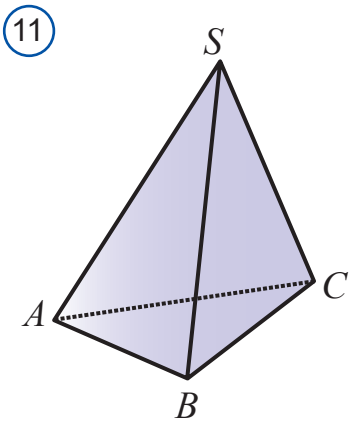
На рисунке 11 изображена треугольная пирамида, а на рисунке 12 – четырёхугольная.

Правильной называют пирамиду, если её основанием пирамиды является *правильный многоугольник,* а грани равны друг другу.

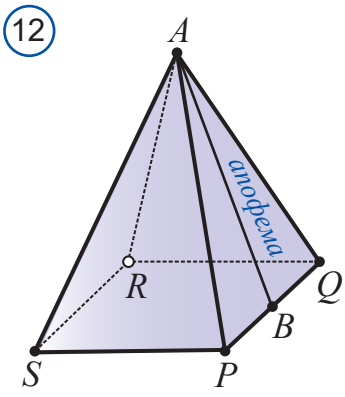
10



11



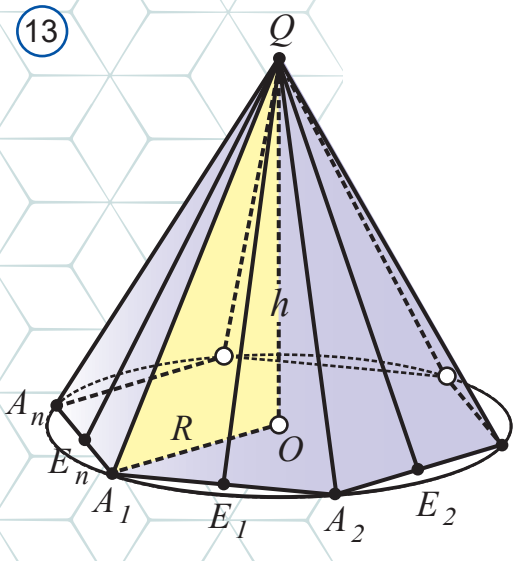
12



Высоту боковой грани, опущенную из вершины правильной пирамиды, называют *апофемой*. На рисунке 12 изображена правильная пирамида $APQRS$. Отрезок AB является апофемой этой пирамиды.

Теорема 2.1. ***В правильной пирамиде: а) боковые грани; б) боковые рёбра; в) апофемы равны между собой.***

13



Доказательство. Пусть $QA_1A_2\ldots A_n$ правильная пирамида, а O – центр её основания *(рис. 13)*.

1. Отрезки OA_1, OA_2, ... OA_n являются радиусами описанной вокруг правильного многоугольника окружности, поэтому они равны между собой. В прямоугольных треугольниках QOA_1, QOA_2, ..., QOA_n равны по два катета, и они равны между собой. Тогда их гипотенузы также будут равны: $QA_1 = QA_2 = \ldots = QA_n$.

2. Так как боковые рёбра правильной пирамиды $QA_1A_2\ldots A_n$ равны между собой, то её боковые грани являются равнобедренными треугольниками. Поскольку основания этих треугольников являются сторонами правильного многоугольника, то и они равны между собой.

Следовательно, боковые грани пирамиды равны по трём сторонам.

3. Боковые грани правильной пирамиды равны. Следовательно, апофемы, проведённые из вершины Q, также равны между собой.

Теорема 2.2. ***Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на её апофему.***

Доказательство. Пусть $QA_1A_2 \dots A_n$ – правильная пирамида *(рис. 13)*. Площадь боковой поверхности пирамиды равна сумме площадей её боковых граней. А её боковые грани – это равные между собой равнобедренные треугольники. В свою очередь, высоты этих треугольников – это также равные между собой апофемы: $QE_1 = QE_2 = \dots = QE_n$.

Отсюда: $S = S_{A_1QA_2} + S_{A_2QA_3} + \dots + S_{A_nQA_1} =$

$= \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot QE_1 + \frac{1}{2} A_2A_3 \cdot QE_2 + \dots + \frac{1}{2} A_nA_1 \cdot QE_n =$

$= \frac{1}{2} (A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_1)\, QE_1 = p \cdot a.$

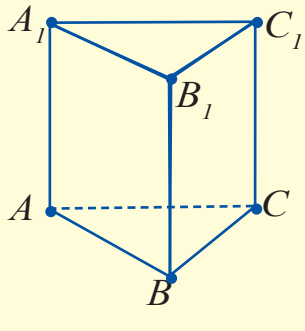
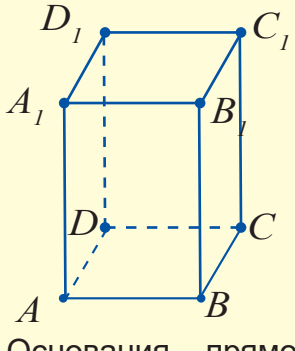
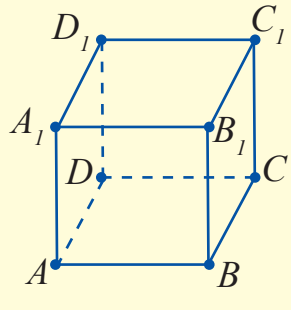
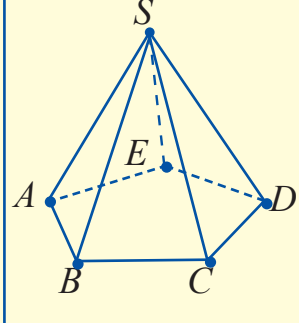
Здесь p – полупериметр основания пирамиды, a – апофема пирамиды.

Вопросы по теме

1. *Какие геометрические фигуры называют: а) плоскими; б) пространственными?*
2. *Что такое пространственное тело?*
3. *Какое тело называют многогранным? Опишите его элементы.*
4. *Какой предмет называют призмой? Опишите его элементы.*
5. *Какие виды призм вы знаете?*
6. *Дайте определение прямоугольному параллелепипеду.*
7. *Какой объект называется пирамидой? Опишите его элементы.*
8. *Какие виды пирамид вы знаете?*
9. *Укажите свойства правильной пирамиды.*

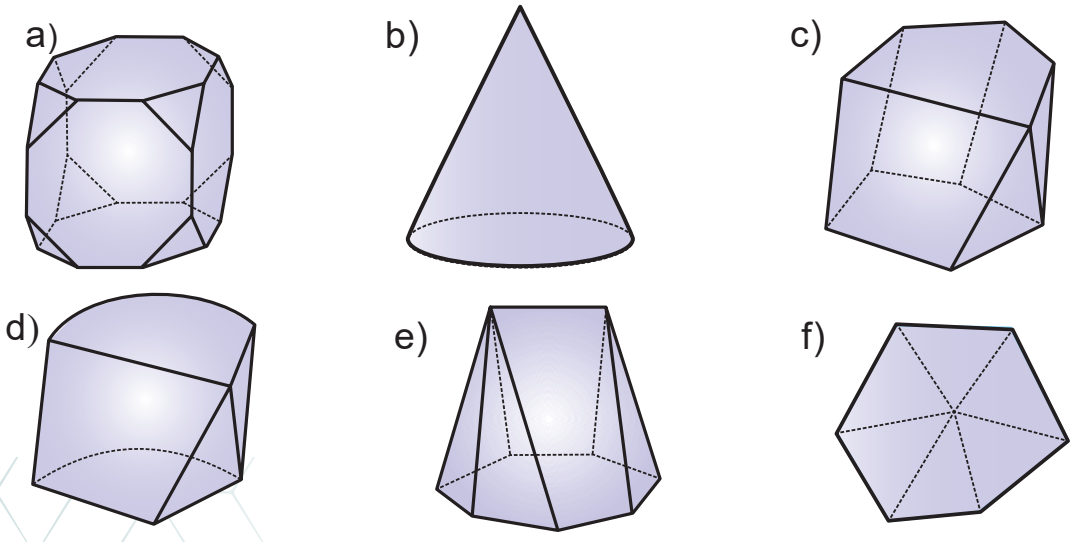
Практические упражнения

6.1. В таблице содержится основная информация 6-й темы. Внимательно изучите её и интерпретируйте.

Многогранники			
Призма	**Прямоугольный параллелепипед**	**Куб**	**Пирамида**
 Основания – многоугольники, боковые грани – параллелограммы.	 Основания – прямоугольные четырёхугольники, боковые грани – прямоугольники.	 Основания – квадраты, боковые грани – квадраты.	 Основание – многоугольник, боковые грани – треугольники.

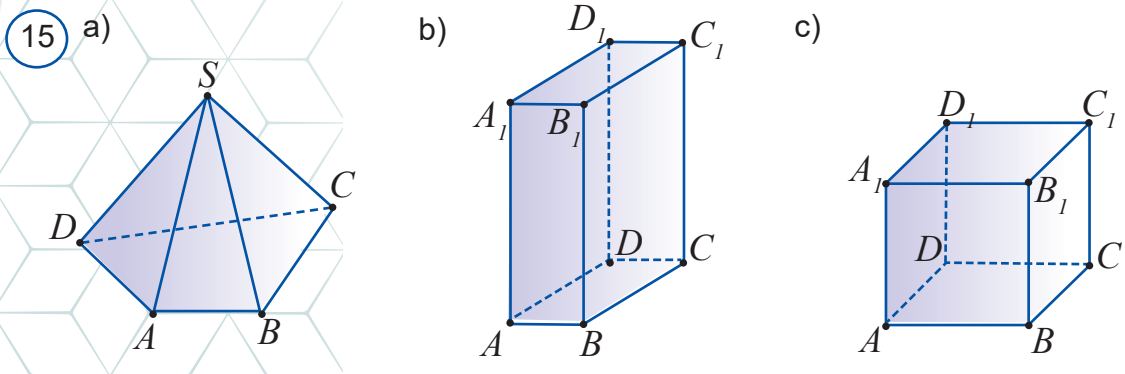
6.2. Какое из пространственных тел на рис. 14 является самым многогранным?

14



6.3. Какие из пространственных тел на рис. 15: 1) куб; 2) пирамида; 3) призма?

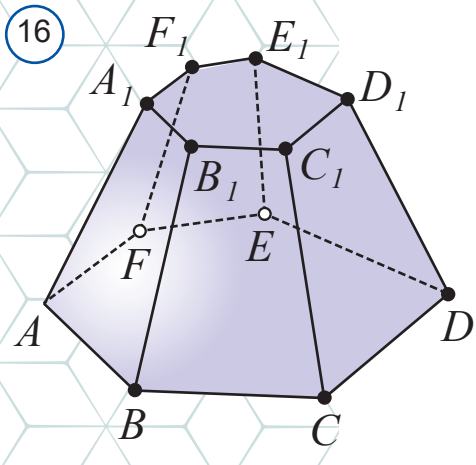
15



6.4. Сколько вершин, рёбер и граней имеет пирамида на рис. 15a? Из какого многоугольника состоит основание? А как насчёт сторон?

6.5. Сколько вершин, рёбер и граней имеет призма на рис. 15b? Из каких многоугольников состоят основания? А боковые грани?

16



6.6. На рис. 16 показан многогранник $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ Назовите в нём:

a) стороны, общие с ребром CD;

b) стороны, общие с ребром DD_1;

c) три общие грани с E;

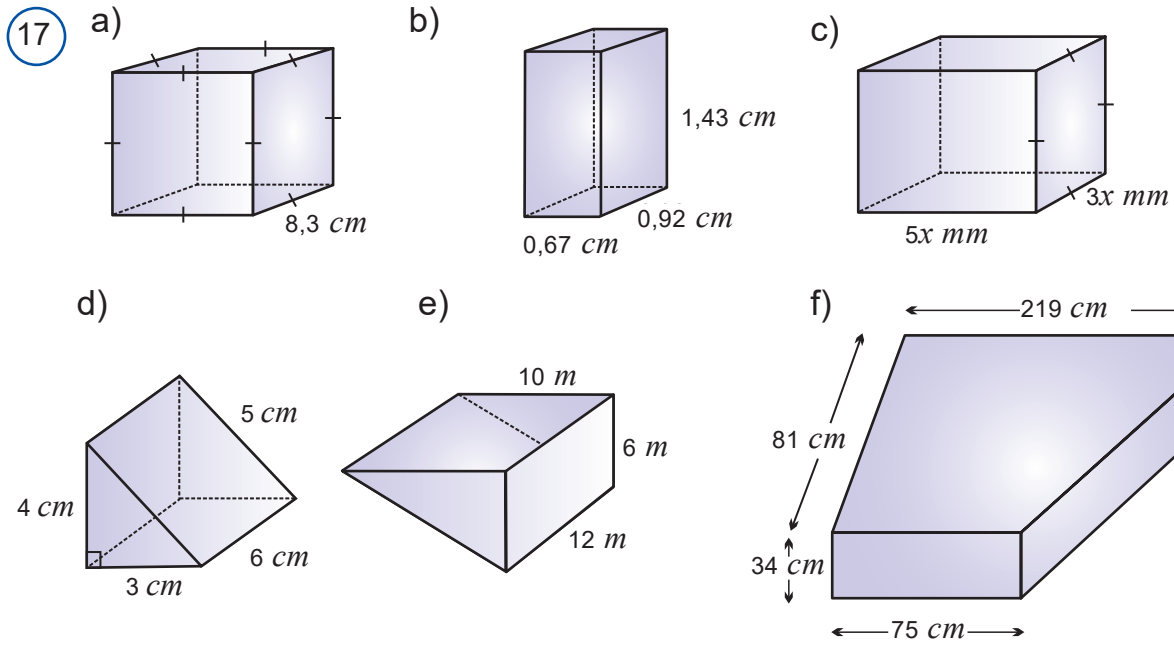
d) три общие грани с C_1;

e) три общих ребра с A;

f) три общих ребра с F_1.

6.7. Может ли у призмы быть: а) 9; б) 16 вершин?

17



6.8. Докажите, что число вершин любой призмы чётно.

6.9. Может ли у призмы быть: а) 14 рёбер; б) 15 рёбер?

6.10. Докажите, что количество рёбер любой призмы кратно трём.

6.11. Определите вид призмы, если у неё: а) 10 вершин; б) 18 рёбер; в) 18 граней.

6.12. Выведите формулу для расчёта а) вершин, б) рёбер; в) граней любой n-угольной призмы.

6.13. Может ли у пирамиды быть: а) 3 вершины; б) 7 вершин?

6.14. Может ли у пирамиды быть: а) 20 рёбер; б) 21 ребро?

6.15. Докажите, что количество рёбер любой пирамиды чётно.

6.16. Определите вид пирамиды, если у неё: а) 6 вершин; б) 22 ребра; в) 10 граней.

6.17. Может ли у призмы быть: а) 9 граней; б) 16 граней?

6.18. Какой многоугольник является основанием призмы с 15 рёбрами?

6.19. Какой многоугольник является основанием пирамиды с 32 рёбрами?

6.20. Выведите формулу для расчёта: а) вершин; б) рёбер; в) граней произвольной n-угольной пирамиды.

6.21. Используя данные рисунка 17, найдите общую площадь поверхности многогранника (на *рис. 17 а-с* все углы прямые).

6.22. Докажите, что у прямой призмы все боковые грани – прямоугольники.

6.23. Докажите, что площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на боковое ребро.

6.24. Основание прямого параллелепипеда – ромб с диагоналями 10 m и 24 m, боковое ребро параллелепипеда 8 m. Найдите полную поверхность параллелепипеда.

6.25. Докажите, что все грани прямоугольного параллелепипеда являются прямоугольниками.

6.26. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 6 cm, а боковое ребро – 11 cm. Найдите полную поверхность призмы.

6.27. Сторона основания правильной n-угольной призмы равна a, а боковое ребро равно h. Найдите боковую поверхность и полную поверхность призмы, учитывая, что: а) $n = 3$, $a = 5$, $h = 10$; б) $n = 4$, $a = 10$, $h = 30$; в) $n = 6$, $a = 18$, $h = 32$; г) $n = 5$, $a = 16$, $h = 25$.

6.28. Апофема правильной треугольной пирамиды равна 15, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, – 12. Найдите: а) боковую грань и основание пирамиды; б) боковую поверхность пирамиды; в) полную поверхность пирамиды.

6.29*. Основание пирамиды – параллелограмм со сторонами 10 и 8 и меньшей диагональю 6. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания, а её длина равна 4. Найдите площадь: а) бокового ребра; б) боковой грани; в) полной поверхности пирамиды.

6.30*. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 10 cm. Длина отрезка, соединяющего вершину пирамиды с центром основания, равна $\sqrt{69}$. Найдите: а) боковое ребро и апофему; б) боковую поверхность; в) полную поверхность пирамиды.

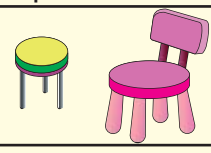
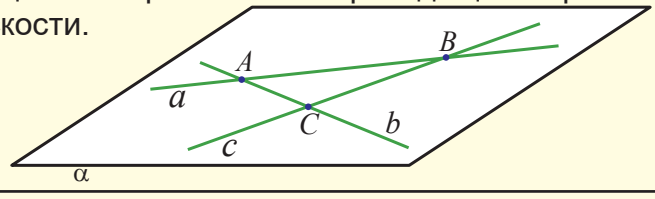
6.31. Правильная шестиугольная пирамида имеет площадь боковой поверхности 150 m^2 и боковое ребро 10 m. Найдите площадь основания пирамиды.

6.32. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с гипотенузой 5 cm и катетом 4 cm. Найдите площадь боковой поверхности, если грань, содержащая наименьший катет, – квадрат.

Французский император Наполеон Бонапарт обладал очень острым и живым умом и преуспевал в геометрии. Он считал эту науку важной как в военном деле, так и в других областях. Император даже написал несколько серьёзных научных работ по геометрии. Одна из геометрических задач позже была названа в его честь «задачей Наполеона».

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Прочитайте следующие предложения. Если предложение верное, поставьте рядом с ним «+», а если неверное, поставьте «-» в соседнем квадрате.

A	Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Две плоскости, проходящие через точки A, B, C и B, D, A, пересекаются на прямой DB.	
B	Табурет на 3 ножках устойчивее, чем стул на 4 ножках. 	
C	Только три вершины A, B, C четырёхугольника $ABCD$ лежат в одной плоскости.	
D	Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести одну и только одну плоскость.	
E	Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Тогда любые три из этих точек не лежат на одной прямой.	
F	Две различные прямые a и b пересекаются в точке A. Прямые, пересекающие эти прямые и не проходящие через точку A, лежат в одной плоскости. 	
G	Две различные плоскости – α и β – пересекаются по прямой m. Прямая a лежит в плоскости α, прямая b лежит в плоскости β. Прямые a и b пересекаются в точке A. Тогда точка A лежит на прямой m.	
H	Две разные плоскости могут иметь только одну общую точку.	

2. Сколько прямых, которые не пересекают прямую a, можно провести в пространстве через точку O, если известно, что $O \notin a$?

А) 3 *Б)* бесконечно много *В)* ни одной *Г)* 1 *Д)* 2

3. Выберите пропущенное слово и закончите предложение:
Две параллельные плоскости делят пространство на ___ части.

А) 3 *Б)* 4 *В)* 6 *Г)* 2

4. Три мухи одновременно взлетели со стола. Когда они снова окажутся на одной плоскости?

5. Определите, какое максимально возможное количество плоскостей можно провести в пространстве через четыре параллельные прямые, три из которых не лежат в одной плоскости.

6. Определите, какое максимально возможное количество разных плоскостей можно провести через 6 данных лучей в пространстве с общей начальной точкой (никакие два луча не лежат на одной прямой, никакие три луча не лежат в одной плоскости).

7. Определите, какое максимально возможное количество разных плоскостей можно провести через 6 данных точек в пространстве (никакие три точки не лежат на одной прямой, никакие четыре точки не лежат в одной плоскости).

8. Определите вид призмы, если она имеет 14 вершин.

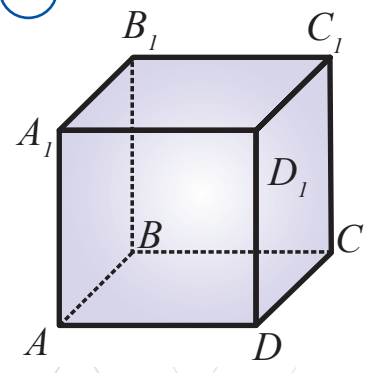
9. Какой многоугольник является основанием пирамиды с 27 рёбрами?

10. Боковая поверхность правильной шестиугольной пирамиды равна 120 m^2, а апофема 10 m. Найдите площадь основания пирамиды.

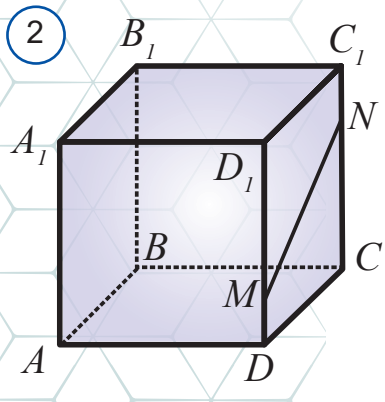
Дополнительные вопросы и задачи

1. Тесты

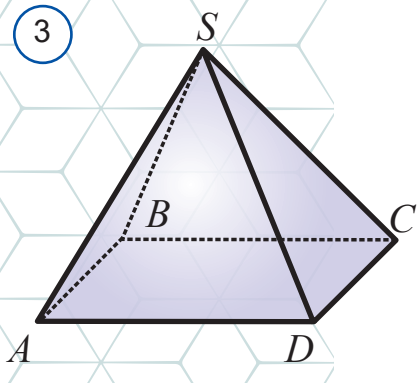
1



2



3



1. Какое утверждение неверно?

А) Через любые три точки пространства проходит одна и только одна плоскость.

Б) Одна и только одна плоскость проходит через две пересекающиеся прямые.

В) Одна и только одна плоскость проходит через две параллельные прямые.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб *(рис. 1)*. Плоскости ABC и DD_1C_1...

А) пересекаются;

Б) не пересекаются;

В) совпадают.

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб *(рис. 2)*. Какую плоскость не пересекает прямая MN?

А) ABC;

Б) AA_1B_1;

В) BB_1C_1.

4. $SABCD$ представляет собой прямоугольную пирамиду *(рис. 3)*. С какой прямой не пересекается прямая SD?

А) BC;

В) AD;

С) SC.

5. Две разные плоскости ...

А) не имеют общей точки;

Б) не имеют общей прямой;

В) не имеют трёх общих точек, не лежащих на одной прямой.

6. Через прямые m и k можно провести более одной плоскости. Тогда прямые m и k...

А) пересекаются;

Б) параллельны;

В) совпадают.

7. Точка a принадлежит прямой. Через них ...

А) можно провести как минимум одну плоскость;

Б) можно провести только одну плоскость;

В) можно провести больше одной плоскости.

8. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. А как насчёт прямых AB и CD?

А) пересекающиеся;

Б) параллельные;

В) скрещивающиеся.

9. Какое утверждение о прямых линиях верно *(рис. 2)*?

А) BC и MN пересекаются;

В) BC и MN скрещиваются;

С) MN и DC не пересекаются.

10. Что достаточно определить, чтобы доказать параллельность двух прямых?

А) что они не пересекаются;

Б) что они перпендикулярны некоторой прямой;

В) что они не пересекаются и не лежат в одной плоскости.

11. Какое утверждение неверно?

А) $a \parallel b,\ b \parallel c \rightarrow a \parallel c;$

Б) $a \parallel b,\ c \perp a \rightarrow c \perp b;$

В) $a \perp b,\ b \perp c \rightarrow a \parallel c.$

12. Точка F не лежит в плоскости параллелограмма $ABCD$. Точка K – середина отрезка DF, а точка N – середина отрезка BF. Тогда AK и CN прямые ...

А) скрещивающиеся;

Б) пересекающиеся;

В) параллельные.

13. Прямая a параллельна плоскости α. Какое из следующих утверждений неверно?

А) прямая a параллельна любой прямой, лежащей в плоскости α;

Б) прямая a не пересекает никакую прямую, лежащую в плоскости α;

В) в плоскости α лежит прямая, параллельная прямой a.

14. Какое утверждение неверно?

А) Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

Б) Если прямая параллельна двум пересекающимся плоскостям, то она параллельна их линии пересечения.

В) Прямые, параллельные плоскости, параллельны.

15. Средняя линия MN трапеции $ABCD$ лежит в плоскости α. Конец A трапеции этой плоскости не принадлежит. Тогда BC – прямая...

А) лежит в плоскости α;

Б) пересекает плоскость α;

В) параллельна плоскости α.

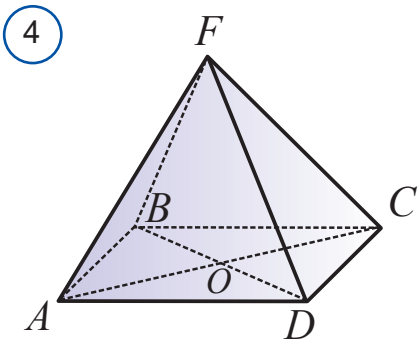
16. Точка M не лежит на прямой. Тогда какое утверждение неверно?

А) Через точку M можно провести только одну прямую, не пересекающуюся с прямой a.

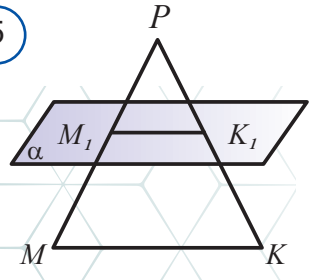
Б) Через точку M можно провести только одну прямую, параллельную прямой a.

В) Через точку M можно провести бесконечное число прямых, не пересекающих прямую a.

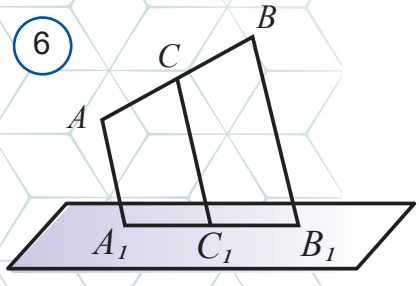
4



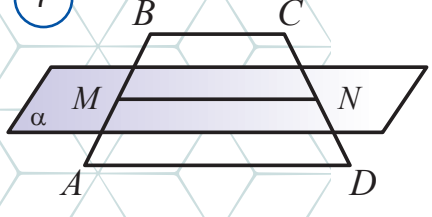
5



6



7



17. Прямая a параллельна плоскости α, а прямая b также параллельна плоскости β. А как насчёт прямых a и b?

А) параллельные;

Б) пересекающиеся;

В) скрещивающиеся.

18. Две плоскости пересекаются по прямой. Прямые a и b пересекаются, а прямые a, c параллельны. А как насчёт прямых b и c?

А) лежат на одной из этих плоскостей;

Б) лежат в разных плоскостях;

С) пересекают эти плоскости (если ответ положительный, покажите, что прямые a и b пересекаются).

2. Вопросы

1. Точки A, B и C лежат на одной прямой, а точка D – нет. Сколько плоскостей можно провести через каждые три точки?

2. Плоскости α и β пересекаются по прямой m. Точка A лежит в плоскости α, точка B – в плоскости β. В каком случае прямая AB лежит в плоскости β?

3. Проведены пять плоскостей. Каждые две из них пересекаются. Чему будет равно наибольшее число прямых попарного пересечения плоскостей?

4. $ABCD$ – параллелограмм (*рис. 4*). $F \in ABC$. На какой прямой пересекаются плоскости AFC и BFD?

5. Дан треугольник MKP *(рис. 5)*. Плоскость, параллельная прямой MK, пересекает сторону MP в точке M_1, а сторону PK в точке K_1. $MK = 18$ *см*, $MP : M_1P = 12 : 5$. Найти длину отрезка M_1K_1.

6. Отрезок AB не пересекается с плоскостью α *(рис. 6)*. Через концы отрезка и его среднюю точку C проведены параллельные прямые. Эти прямые пересекают плоскость α в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. $AA_1 = 6$ *см*, $CC_1 = 9$ *см*. Найдите длину отрезка BB_1.

7. Плоскость, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает стороны AB и CD в точках M и N соответственно *(рис. 7)*. $CN = ND$. $AD = 6$ *см*, $BC = 4$ *см*. Найдите длину отрезка MN.

8. В пирамиде $ABCD$ точки M, H и P являются

серединами сторон AD, DC и AB соответственно *(рис. 8)*. $KH \parallel ABD$. $AC = 8\ см$, $BD = 10\ см$. Найдите периметр прямоугольника $MHKP$.

9. Могут ли две различные плоскости иметь три общие точки, не лежащие на одной прямой?

10. В плоскости α лежит прямая a. Плоскость β пересекает плоскость α по прямой b. А прямая a пересекает плоскость β в точке B. Где находится точка B?

11. Прямые a, b и c, не лежащие в одной плоскости, проходят через одну точку. Сколько разных плоскостей можно провести через эту пару линий?

12. Точки A, B и прямая CD не лежат в одной плоскости. Как расположены между собой прямые CD и AB?

13. Точка пересечения двух смежных вершин и диагоналей квадрата лежит на плоскости α. Докажите, что два других конца квадрата также лежат в этой плоскости.

14. Прямые a и b пересекаются. Прямая c параллельна прямой b. Могут ли пересекаться прямые a и c?

15. Точка M лежит вне плоскости параллелограмма $ABCD$.

а) Докажите, что средние линии треугольников MAD и MBC параллельны.

б) Найдите эти средние линии, если основание параллелограмма $ABCD$ равно 5, а его высота равна 4 и делит сторону, к которой проведена, пополам.

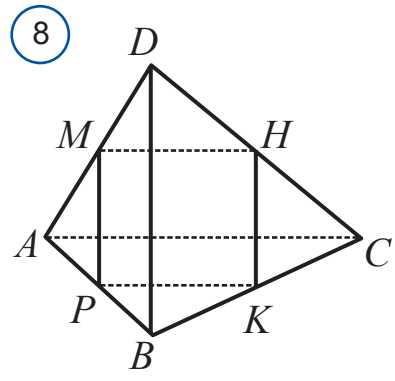
16. Плоскость α пересекает треугольник ABC на сторонах AB и BC в точках M и N соответственно.

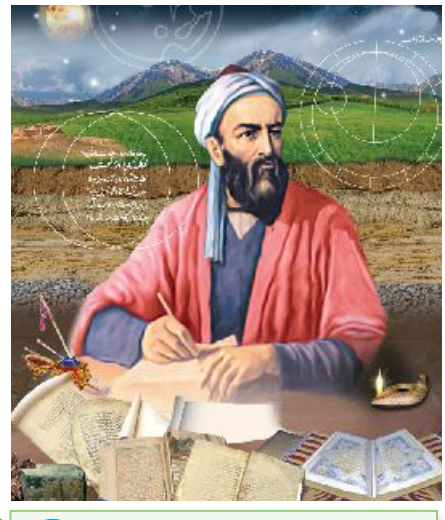
$BN : NC = 5 : 8$ и $MB : AB = 5 : 13$.

1) Докажите, что $AC \parallel \alpha$.

2) Если $AC = 26$, найдите MN.

8





Абу Райхан Беруни – один из великих учёных-энциклопедистов, оставивших яркий свет в истории мировой науки. В его работах отражены ценные сведения по всем разделам геометрии (планиметрии, стереометрии и теории пропорций). Например, в разделе геометрии «Книги наставлений по основам искусства астрологии» подробно описаны основные геометрические фигуры, их определения и свойства, способы вычисления поверхностей фигур на плоскости, правила нахождения поверхности и объёма предметов в пространстве. Этот труд Абу Райхана Беруни долгое время использовался в качестве учебника по математике в восточных странах.

Используя GeoGebra

GeoGebra – программа «живые» рисунки по математике

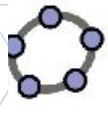
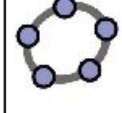
GeoGebra – это бесплатная программа, которая позволяет создавать динамические («живые») рисунки для использования на различных уровнях обучения геометрии, алгебре и другим дисциплинам. Она предоставляет широкие возможности для работы с геометрическими формами, алгебраическими выражениями, таблицами, графиками и статистикой.

Это программное обеспечение было создано в 2002 году австрийским математиком Маркусом Хоэнвартером, и в настоящее время им пользуются миллионы людей.

Преимущества программы GeoGebra:

- бесплатно;
- имеет многоязычный интерфейс;
- графический интерфейс прост и удобен в использовании;
- возможность подключения к различным операционным системам (даже планшетам и смартфонам) и наличие онлайн-версии;
- наличие открытой базы для добавления материалов пользователями.

Функции частей программы GeoGebra

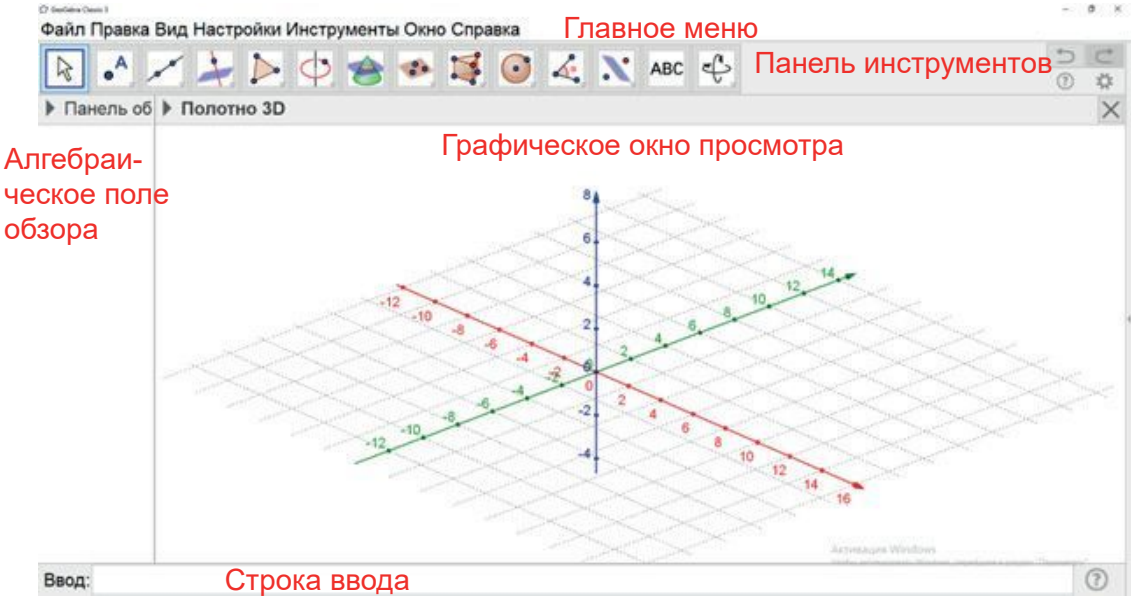
	**Набор калькуляторов** Проверяйте функции, решайте уравнения, создавайте геометрические фигуры и трёхмерные объекты			**Геометрия** Возможность рисовать различные геометрические фигуры и измененять их формы
	**3D калькулятор** Возможность рисовать различные рисунки, 3D (трёхмерные) геометрические фигуры и объекты			**Калькулятор CAS** Решение различных уравнений, изменение вида алгебраических выражений, вычисление производных и интегралов
	**Графический калькулятор** Построение графиков различных функций, исследование уравнений и визуализация данных			**Классическая геометрия** Геометрия, представление данных, вероятности и расчёт различных величин

Практическая работа

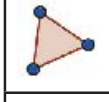
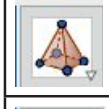
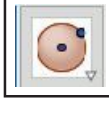
1. Узнайте больше о GeoGebra на официальном веб-сайте GeoGebra (http://www.geogebra.org/) и загрузите его на свой компьютер, планшет или смартфон.
2. Посмотрите видеоуроки и примеры использования для изучения GeoGebra на канале YouTube (https://www.youtube.com/GeoGebraChannel).
3. Попробуйте изучить простые работы, созданные на 3D-калькуляторе.

Вид интерфейса GeoGebra

После перевода программы GeoGebra в режим «3D-калькулятор» появится следующее окно:



Функции основного оборудования в панели 3D-калькулятора

	**Перемещать** – перемещение различных объектов (точка, прямая, многоугольник и т.д.). Чтобы выделить несколько объектов одновременно, нужно выделить их последовательно мышью, удерживая нажатой клавишу Ctrl.
	**Точка –** рисовать точку на плоскости. Чтобы поставить точку, нужно отметить место на плоскости.
	**Прямая** – проведение прямой линии через две заданные точки на плоскости. Вы можете выбрать существующие точки на чертеже или использовать мышь для размещения точек.
	**Перпендикулярная линия** – перенос перпендикуляра на прямую через данную точку. Для перпендикулярного переноса необходимо указать линию, которую нужно построить перпендикулярно плоскости, и точку, через которую проходит линия.
	**Многоугольник** – изображение многоугольника любого типа на плоскости.
	**Окружность по точке и оси** – задать ось и сделать круг с определённым радиусом в соответствии с точкой.
	**Плоскость через три точки** – проведение плоскости через три заданные точки. Также можно рисовать параллельные и перпендикулярные плоскости.
	**Пирамида** – построение пространственных объектов, таких как пирамиды, призмы, конусы, цилиндры и кубы, через заданные точки.
	**Сфера по центру и точке** – через заданную точку в центре и на поверхности создать шар.

7 ОПИСАНИЕ И СОЗДАНИЕ МОДЕЛИ МНОГОГРАННИКОВ

Описание многогранников на плоскости

При решении геометрических задач очень важно построить правильный чертёж. Зачастую правильно составленный чертёж приравнивается к «половине решения». В стереометрии правильное построение чертежей – сложная, ответственная, а иногда и трудная работа, так как стереометрические фигуры трёхмерны, и их нужно изобразить на плоскости, на странице тетради. Неправильный чертёж может привести к неверному решению или к тупику.

Построение призмы выполняют в следующем порядке *(рис. 1)*. Сначала строят одно из оснований в виде многоугольника. Затем из каждой вершины многоугольника проводят параллельные и равные друг другу отрезки, то есть составные части призмы. Концы этих отрезков соединяют по очереди. Так получают второе основание призмы.

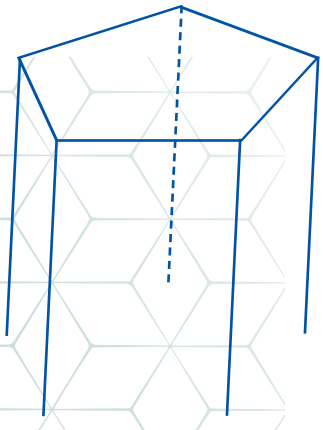
На чертеже невидимые ребра призмы чертят пунктирной линией.

Построение пирамиды выполняют в аналогичном порядке *(рис. 2)*. Сначала строят основание в виде многоугольника. Затем отмечают вершину пирамиды, соединяют эту точку с каждой вершиной основания. На чертеже невидимые рёбра пирамиды чертят пунктирной линией.

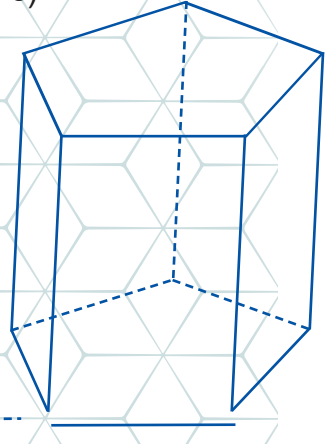
1 a)



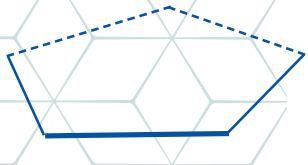
b)



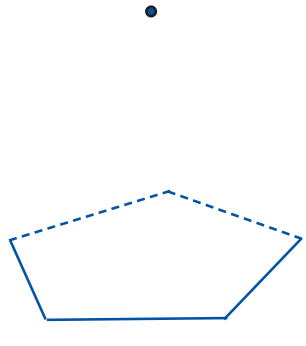
c)



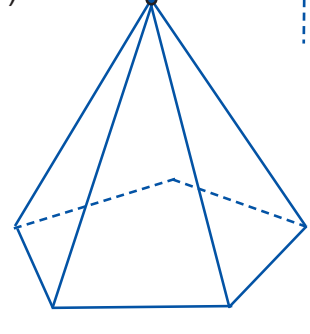
2 a)



b)



c)

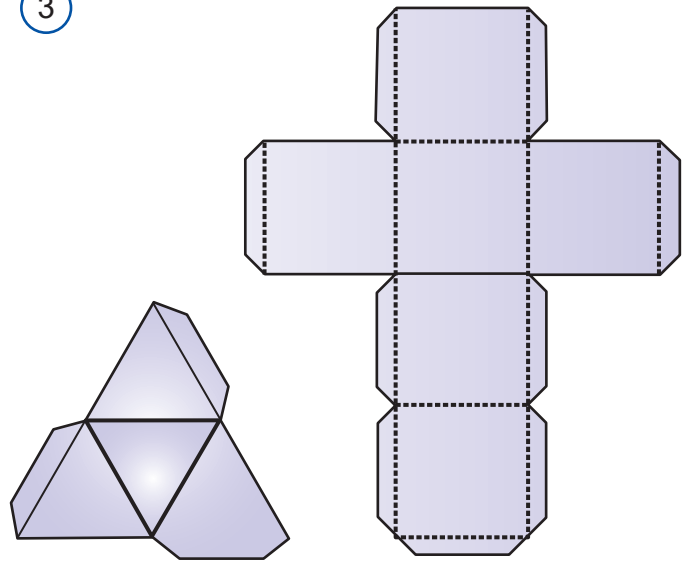


Создание моделей пространственных форм

Если многогранник разрезать вдоль некоторых рёбер и развернуть его на плоскости, получим многоугольник, который называется *развёрткой многогранника*. На рис. 3 даны развёртки куба и треугольной пирамиды.

Чтобы сделать модель многогранника, можно сначала нарисовать его разворот на плотной бумаге, вырезать его ножницами и склеить соответствующие рёбра. Чтобы склеивать было удобно, рёбра, которые нужно склеить, вырезают с небольшим запасом.

3

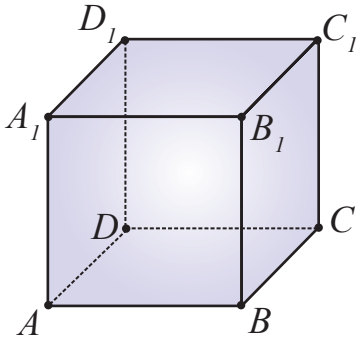


Практические упражнения

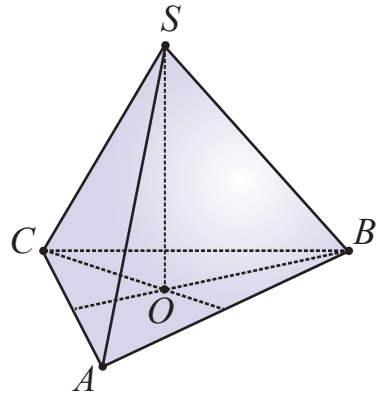
7.1. Нарисуйте пространственные фигуры, показанные на рисунке 4, используя клетки тетради, и укажите их вид. Обратите внимание на использование пунктирных линий.

4

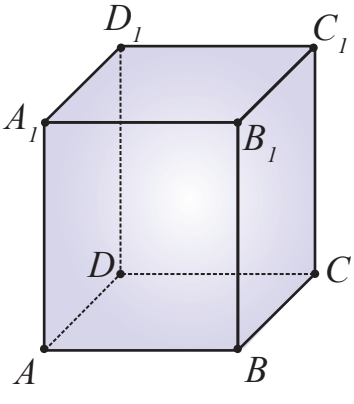
a)



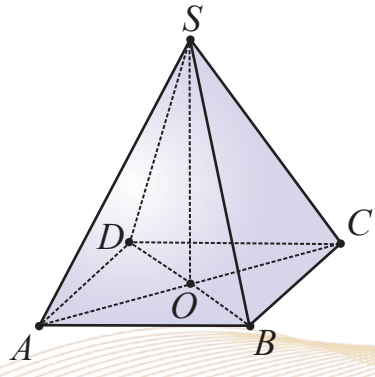
b)



c)



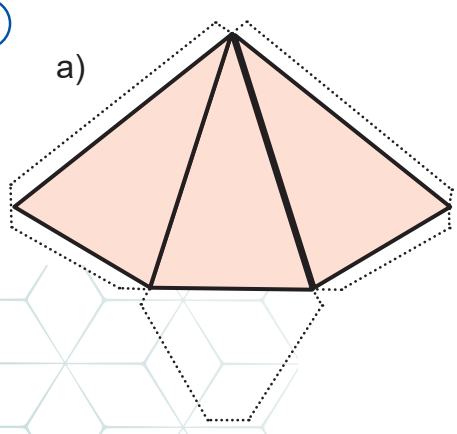
d)



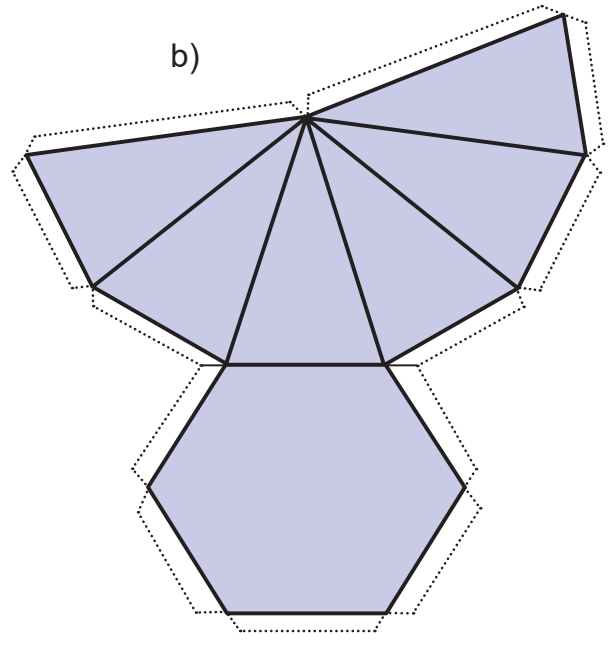
7.2. Лучше использовать модель пространственных фигур для лучшей их визуализации. Пространственные объекты можно моделировать, используя их развёртку *(рис. 5)*. Как видите, развёртка пространственных объектов состоит из плоских геометрических фигур. Создайте модель прямоугольного параллелепипеда, куба и пирамиды, используя следующие развёртки.

5

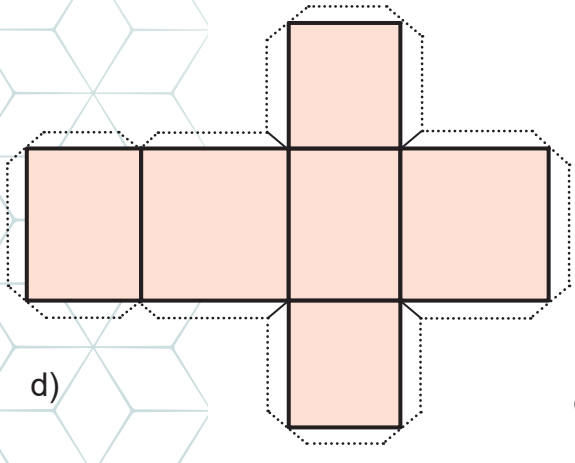
a)



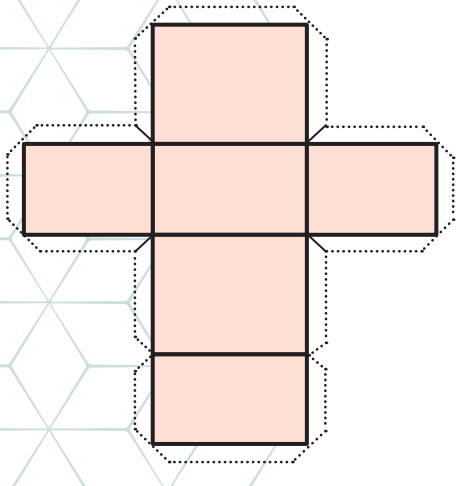
b)



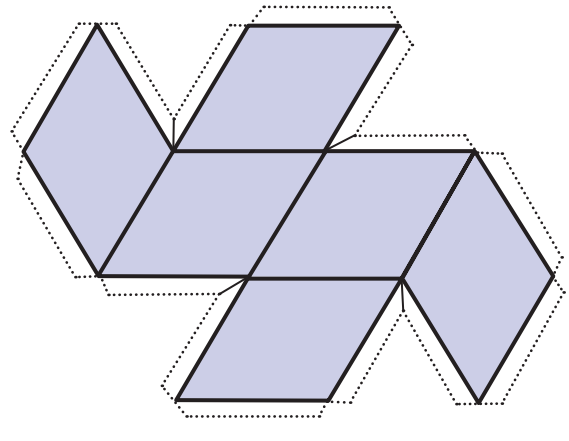
c)



d)



e)



7.3. Начертите прямоугольный параллелепипед и правильную прямоугольную пирамиду.

7.4. Какая из развёрток на рисунке 6 является развёрткой куба?

7.5. Какие из развёрток на рисунке 7 являются развёртками призм? Определите вид призмы.

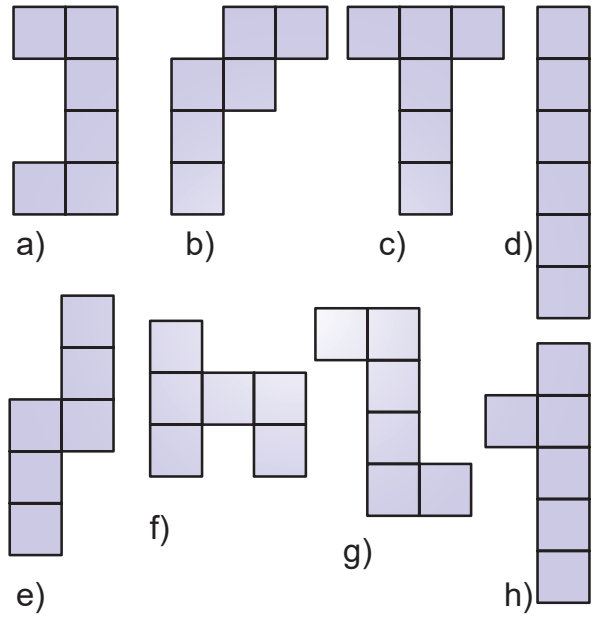
7.6. Какие из развёрток на рисунке 8 являются развёртками пирамид? Определите вид пирамид.

7.7. Можно ли раскрасить куб тремя разными цветами так, чтобы его смежные рёбра были окрашены в разные цвета? Сделайте модель куба и покрасьте её в подходящий цвет.

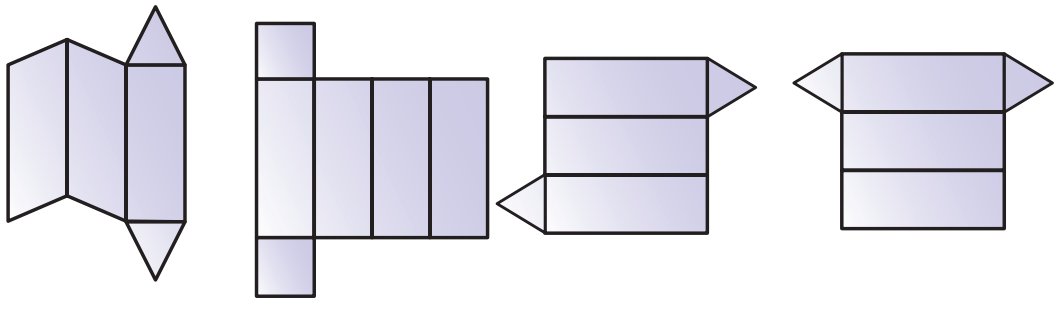
7.8. Постройте 7 равных треугольников из 9 спичек.

7.9. Найдите кратчайший путь из точки A в точку C_1 на поверхности куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

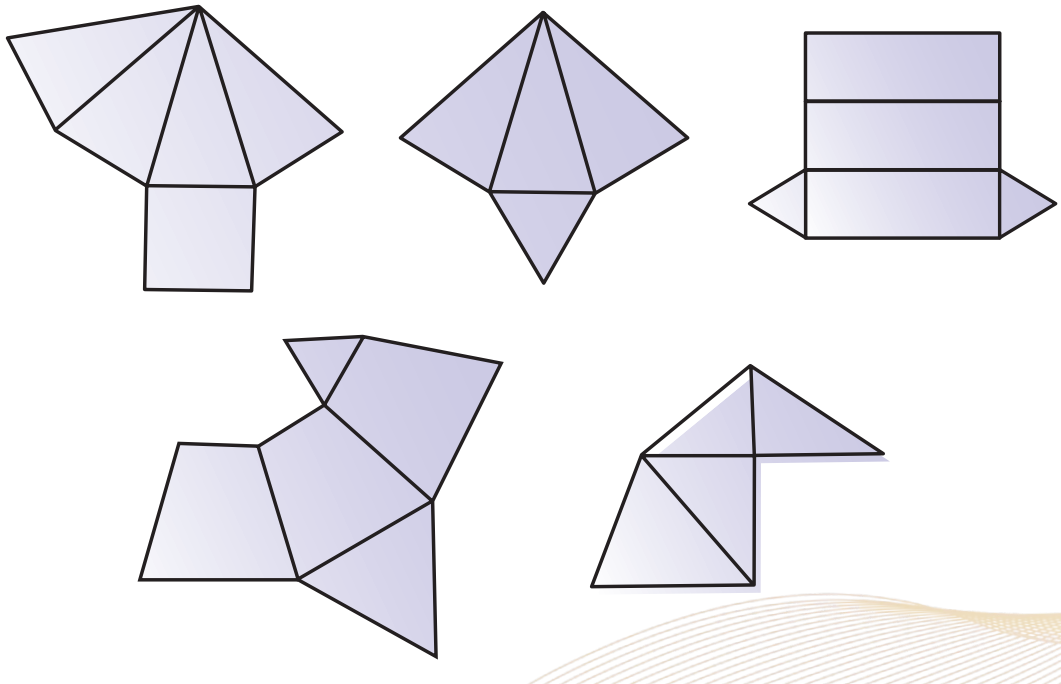
6



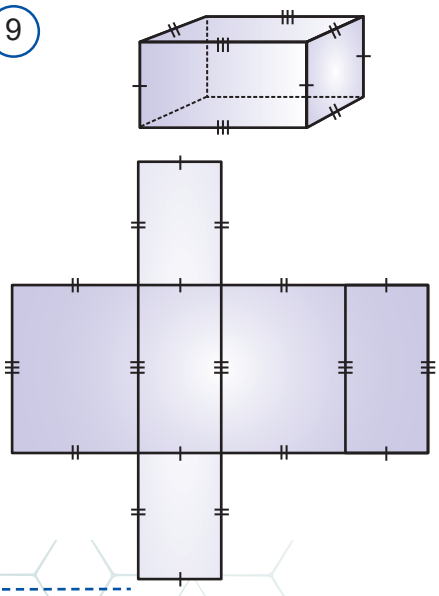
7



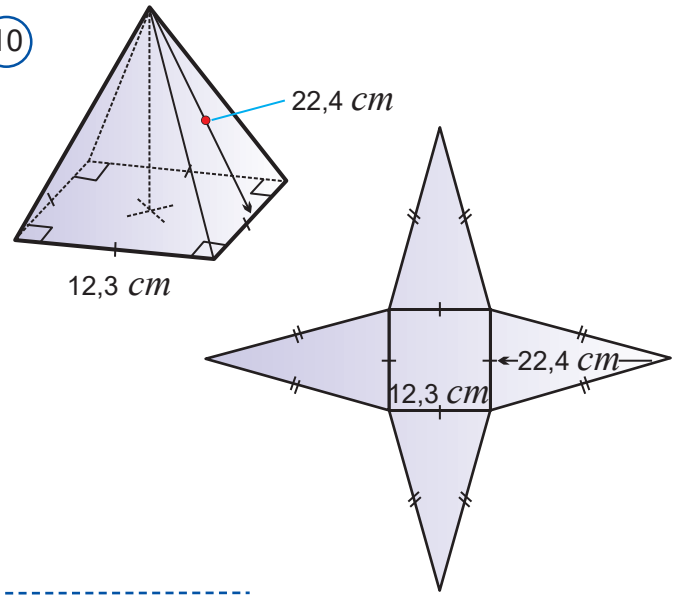
8



9



10



7.10. Найдите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, развёртка которого изображена на рис. 9.

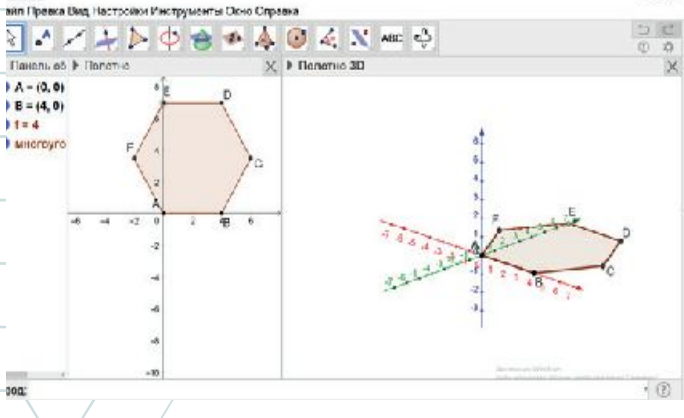
7.11. Найдите и рассчитайте поверхность прямоугольной правильной пирамиды, изображённой на рисунке 10.

Используя GeoGebra

Построение правильной шестиугольной призмы и её развёртки

1. Для построения призмы сначала нужно построить правильный шестиугольник (основание призмы). Для этого в меню **«Вид»** выберите команду **«Холст»**. В результате появятся два отдельных рабочих окна. В рабочем окне слева создайте правильный шестиугольник с помощью инструмента «Правильный многоугольник». Для этого достаточно ввести длину одной стороны многоугольника и количество сторон.

2. В результате в правой части рабочего окна формируется изображение правильного шестиугольника.



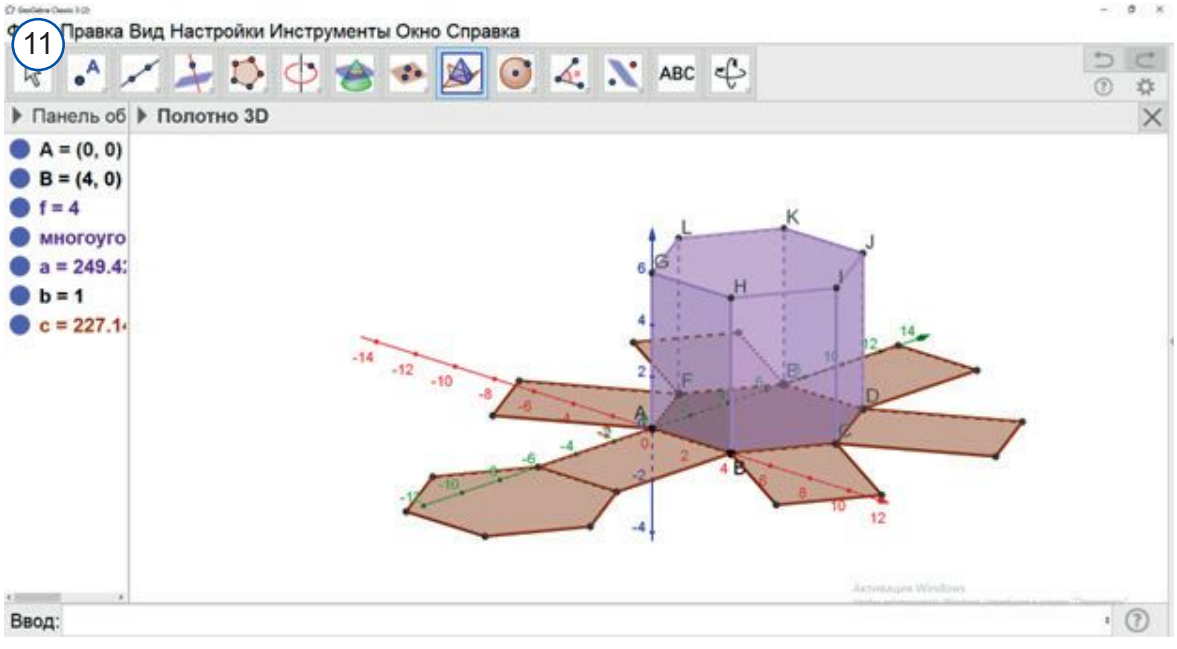
3. Закройте левое окно.

4.  – Инструментом «Призма» последовательно нажимайте левой кнопкой мыши на начерченные точки правильного шестиугольника. В итоге при нажатии в нужном месте оси координат, создастся правильная шестиугольная призма.

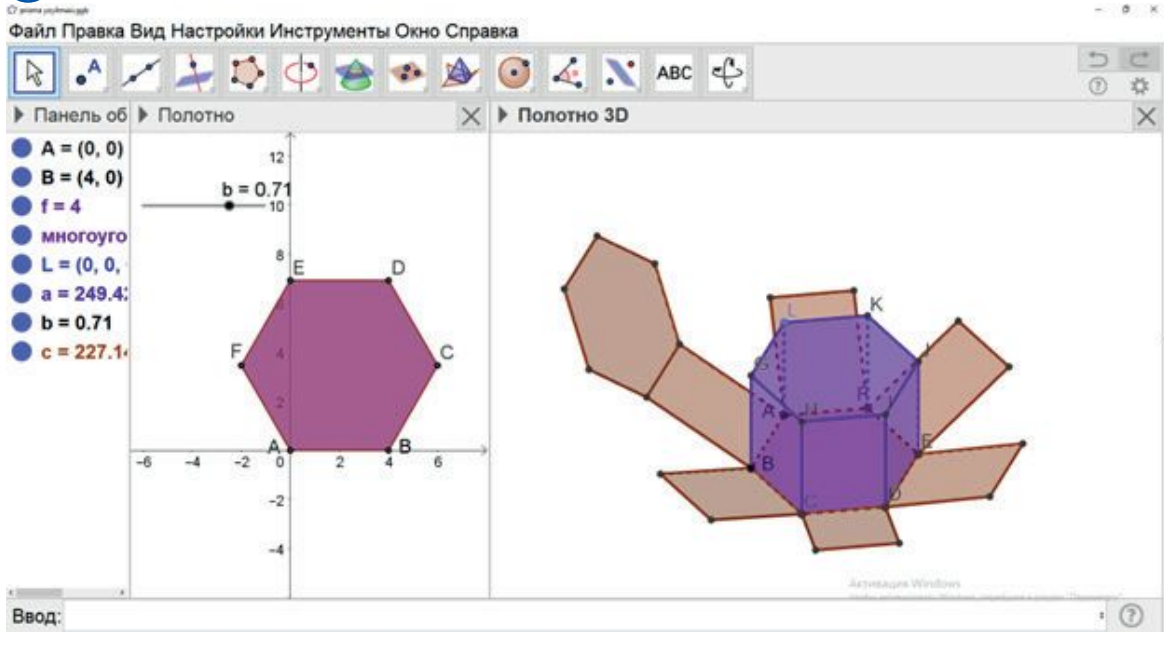
5. – Активируйте инструмент **«Проводник»** и щёлкните левой кнопкой мыши по призме. В результате образуется правильная развёртка шестиугольной призмы *(рис. 11)*.

6. Выберите команду **«Холст»** в меню **«Вид»**. С помощью кнопки **«Slider»** (ползунок) в левом окне переместите разворот чертежа *(рис. 12)*.

11



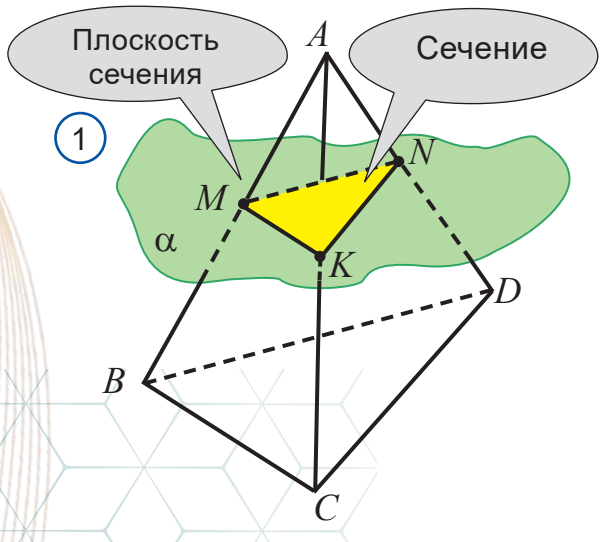
12



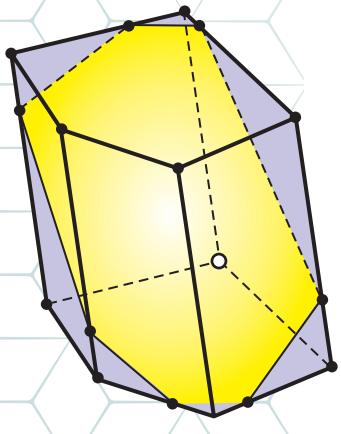
Задания для самостоятельного выполнения

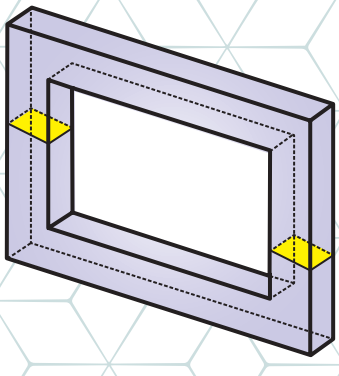
1. Составьте правильную шестигранную пирамиду и её «живую» развёртку.
2. Создайте обычную треугольную призму и её «живую» развёртку.

8 ПОСТРОЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ СЕЧЕНИЙ МНОГОГРАННИКОВ



1


2


3

Правильно начертить чертёж можно, только когда правильно представлено взаимное расположение геометрических фигур в пространстве. Когда одна из пространственных форм представляет собой многогранник, а другая плоскость, необходимо описывать разные сечения. Ниже мы представим сечение многогранников.

Предположим, что многогранник пересекается плоскостью. *Сечением многогранника* называют геометрическую фигуру, вершины которого – это точки пересечения многогранника и плоскости.

Секущая плоскость пересекает поверхность многогранника на отрезки. Сечение многогранника состоит из одного или нескольких многоугольников. На рисунке 2 изображено сечение пятиугольной призмы, являющееся семиугольником. Сечение на рисунке 3, полученное пересечением рамы плоскостью, состоит из двух четырёхугольников.

Чтобы изобразить сечение многогранника, нужно отметить общие точки его граней и секущей плоскости.

Количество сторон сечения не может быть больше количества граней.

Например, сечения пятиугольной призмы могут быть: треугольником, прямоугольником, пятиугольником, шестиугольником и семиугольником *(рис. 4)*. Но не может быть восьмиугольником. Почему?

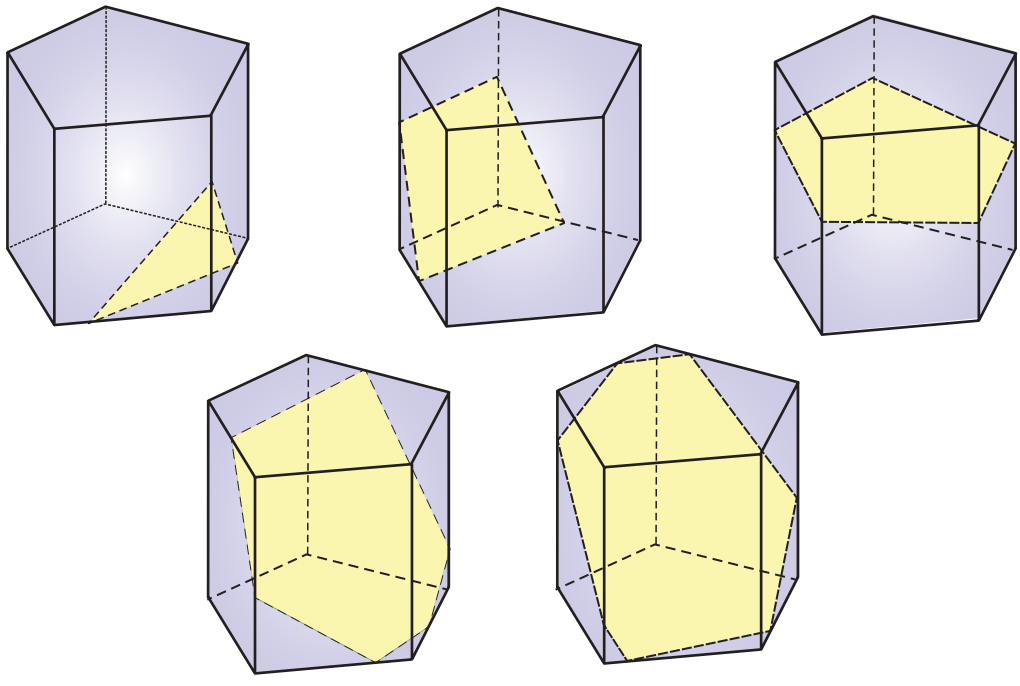
Задача 1. Сделаем сечение, образованное путём рассечения рёбер AB, AQ и CQ треугольной пирамиды $QABC$ плоскостью, α, пересекающейся в точках K, L и M соответственно *(рис. 5)*.

Построение. Секущая плоскость α имеет с гранью AQB пирамиды две общие точки: K и L. Следовательно секущая плоскость пересекает эту грань по отрезку KL.

Так как секущая плоскость α имеет с гранью AQC пирамиды две общие точки – M и L, она пересекает эту грань по отрезку ML.

Секущая плоскость α имеет с гранью ABC пирамиды одну общую точку K. Найдём точку, в которой эта плоскость пересекается с ребром BC.

4



Продолжая прямые LM и AC, принадлежащие этой плоскости, найдём точку их пересечения – X. Точка X также лежит в плоскостях AQC и ABC.

Секущая плоскость α имеет с гранью ABC пирамиды две общие точки: K и X. Тогда секущая плоскость пересекает эту грань по отрезку KX.

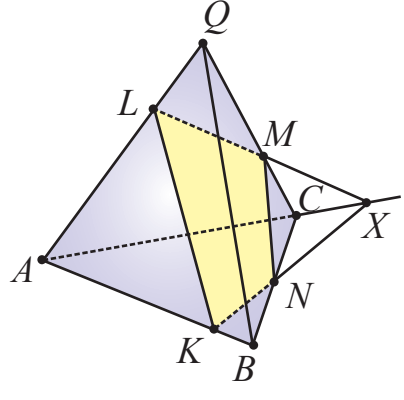
Точка N пересечения прямой KX и ребра BC также принадлежит плоскости α.

Итак, плоскость α пересекает грань ABC по отрезку KN, а грань BQC по отрезку MN.

Четырёхугольник $KLMN$ является сечением пирамиды плоскости α. Отрезки KL и KN называют *следом* плоскости α на гранях ABQ и ABC соответственно.

Поэтому такой способ выполнения разреза называется *методом следов*.

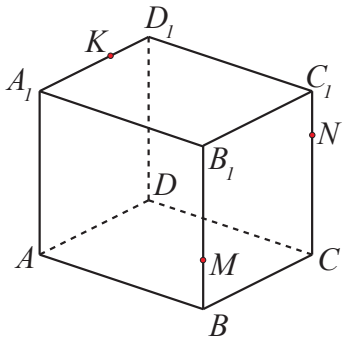
5



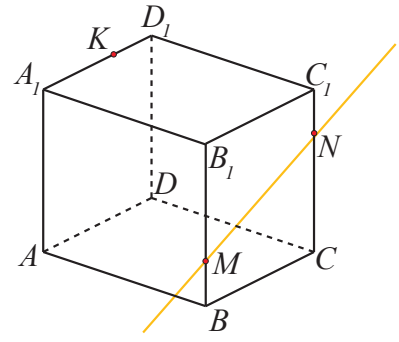
- Суть этого способа в следующем:
- Необходимо построить вспомогательную прямую, состоящую из многогранника с секущей плоскостью.
- Обычно удобно провести линию пересечения с секущей плоскостью и плоскостью, на которой лежит нижнее основание многогранника. Эта линия называется *следом секущей плоскости*.
- Точки, лежащие на многих боковых рёбрах и сторонах секущей плоскости, легко определяются при помощи следа.

6

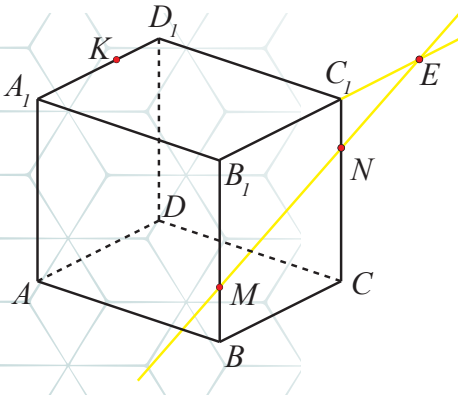
1 шаг



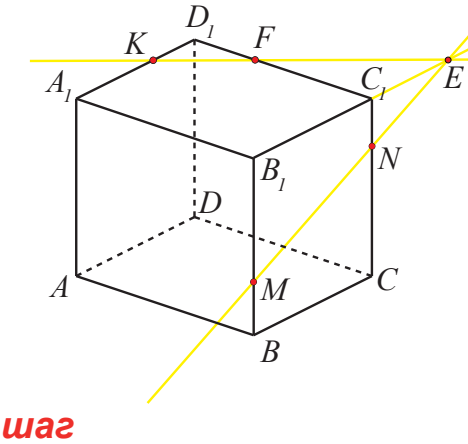
2 шаг



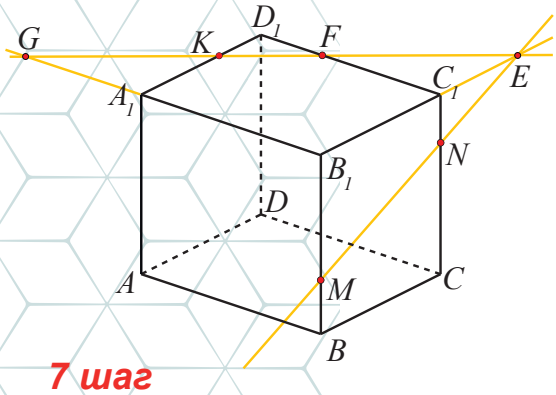
3 шаг



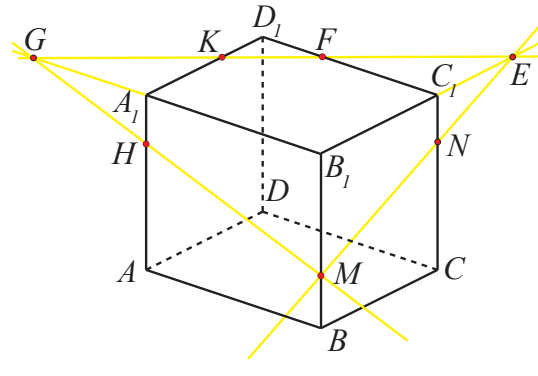
4 шаг



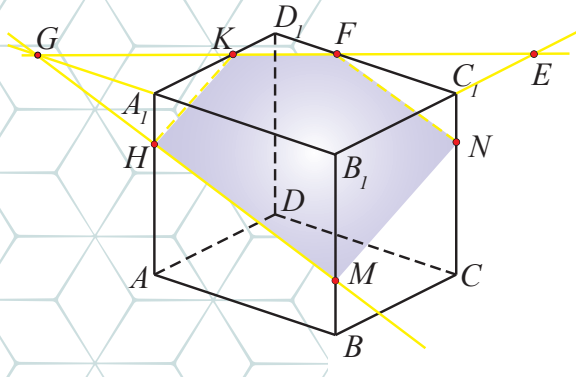
5 шаг



6 шаг



7 шаг



Задача 2. Построим сечение куба плоскостью, проходящей через точки M, P и K *(рис. 6)*.

Построение. Необходимо сделать разрез методом следа. Последовательность построения показана на рис. 6. Изучите его и объясните процесс построения.

$MNFKH$ – искомое сечение.

Задача 3. Построим сечение пирамиды $OKLMN$, образованное при пересечении точки A ребра OL, проходящей через прямую k в плоскости основания пирамиды $KLMN$ *(рис. 7)*.

Построение. Найдём точку пересечения прямой, на которой лежит отрезок LM и k. Так как эта точка лежит на прямой k, то она принадлежит и плоскости β. Более того, так как эта точка лежит на прямой LM, то она принадлежит и грани LOM. Точка A принадлежит обеим этим плоскостям. Следовательно, плоскость β пересекает плоскость LOM по прямой AX, а грань LOM по сечению AB. Точка B является точкой пересечения прямых AX и OM.

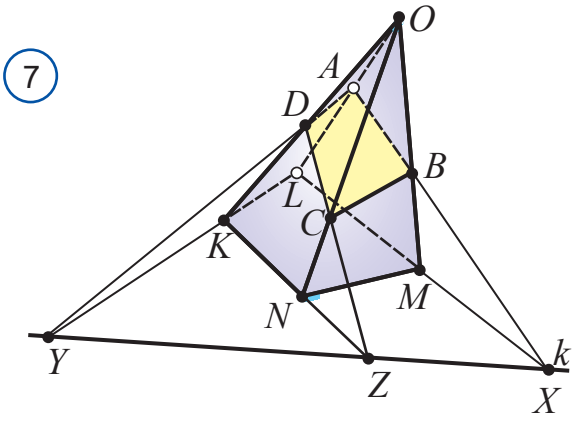
Таким же образом определяем точки Y и D пересечения плоскости β, ребра OLK и отрезка AD. Затем определяем точки Z и C и прямые DC и BC. Полученный четырёхугольник $ABCD$ – искомое сечение.

Задача 4. Точки A, B и C лежат на разных рёбрах четырёхугольной призмы. Найдём сечение призмы плоскостью ABC *(рис. 8)*.

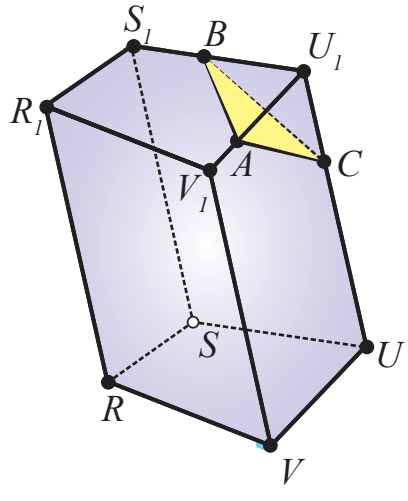
Искомое сечение зависит от того, на каких рёбрах прямоугольной призмы и как расположены точки A, B и C. На рисунке 8 изображён наиболее простой случай, когда точки A, B и C расположены на рёбрах, исходящих из одной вершины.

Построение сечения в случае, изображённом на рисунке 9, является более сложным. Остальные случаи разрезов сечений приведены на рисунках 10 и 11. Как видите, сечение может быть треугольником, четырёхугольником, пятиугольником и шестиугольником. Построение этих сечений выполните самостоятельно.

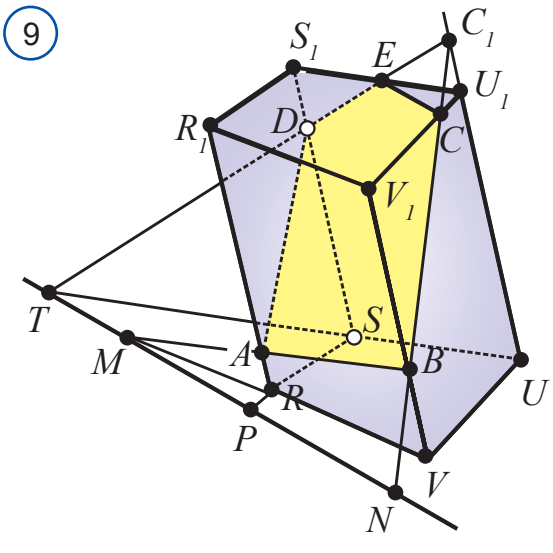
7



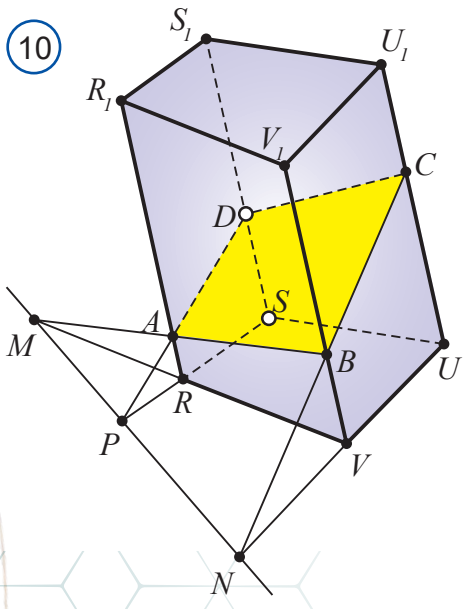
8



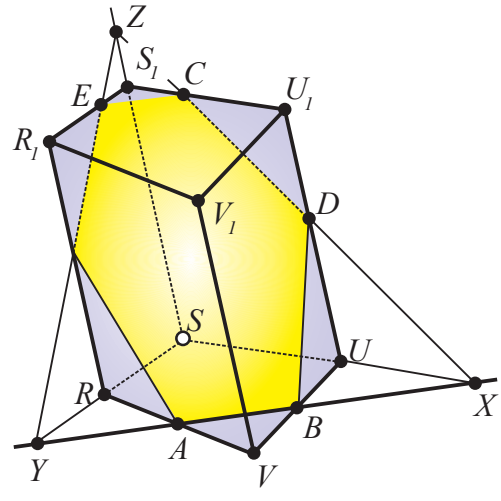
9



10



11



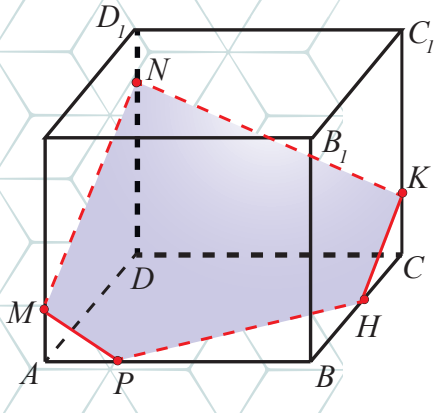
Правила использования метода следа:

- *концы сечения лежат только на рёбрах многогранника;*
- *стороны сечения лежат только на рёбрах многогранника;*
- *если секущая плоскость и плоскость многогранника пересекаются, то линия их пересечения состоит из одной прямой.*

Метод параллельного переноса

Задача 5. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки M, N и K *(рис. 12)*.

12



Построение

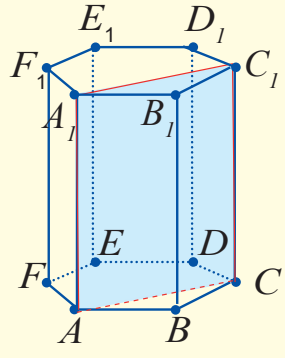
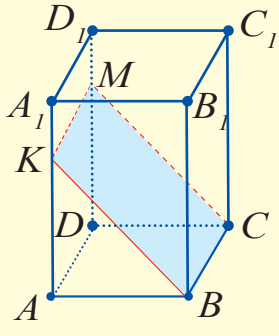
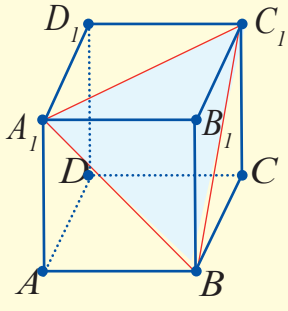
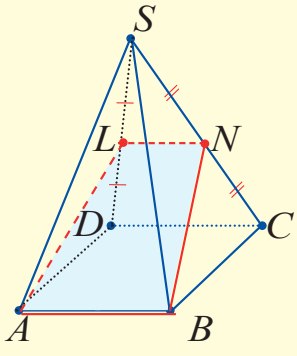
1. Соедините точки M и N поперечным сечением.
2. Соедините точки N и K поперечным сечением.
3. Из точки M проведите прямую, параллельную NK. Обозначьте точку её пересечения с ребром AB через P.
4. Из точки K проводим прямую, параллельную MN. Обозначим точку её пересечения с ребром BC через H.
5. Соединяем точки P и H поперечным сечением.
6. $MNKHP$ есть искомое сечение.

Вопросы по теме

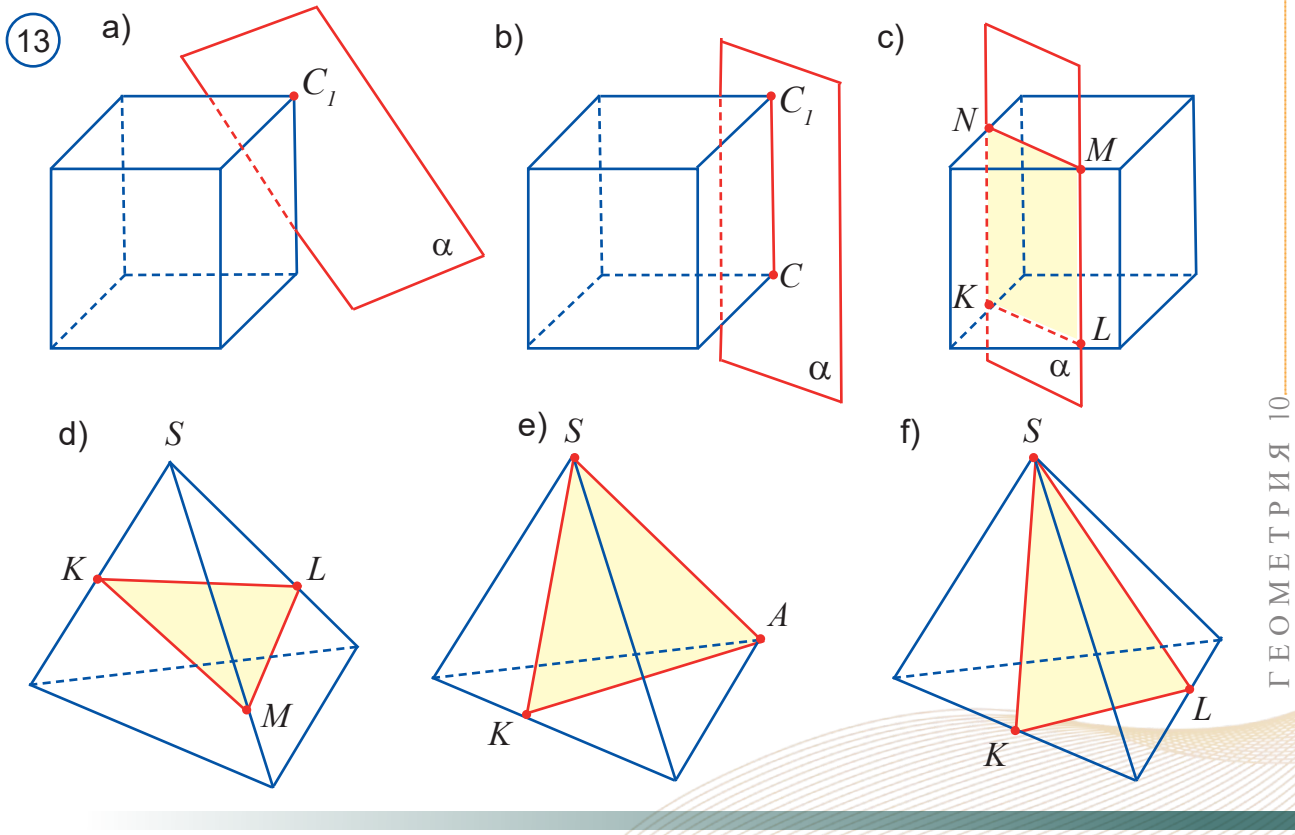
1. *Чему равно сечение многогранника?*
2. *Какой формы может быть поперечное сечение многогранника?*
3. *Объясните след одной плоскости на другой плоскости.*
4. *Каким может быть сечение прямоугольного многогранника?*
5. *Объясните метод переноса.*
6. *Объясните метод следа.*

Практические упражнения

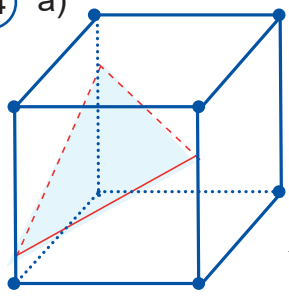
8.1. В таблице содержится основная информация 8-й темы. Внимательно изучите её и интерпретируйте.

Простейшие сечения многогранников			
Многоугольная призма	**Прямоугольный параллелепипед**	**Куб**	**Пирамида**
			
ACC_1 – пересекающая плоскость, проходящая через точки A, C, C_1. ACC_1A_1 – сечение.	CBK – пересекающаяся плоскость, проходящая через точку K и прямую CB. $CBKM$ – сечение.	A_1BC_1 – плоскость, пересекающая прямые BC_1 и BA_1. A_1C_1B – сечение.	ABN – секущая плоскость, проходящая через параллельные прямые AB и LN. $ABNL$ – сечение.

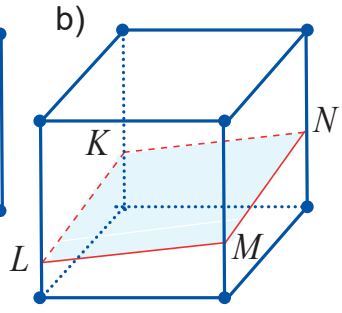
13



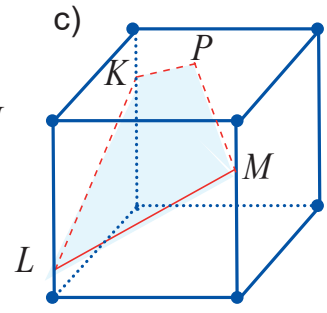
14 a)



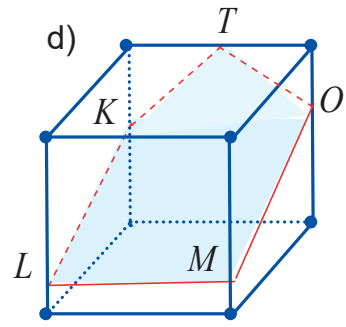
b)



c)

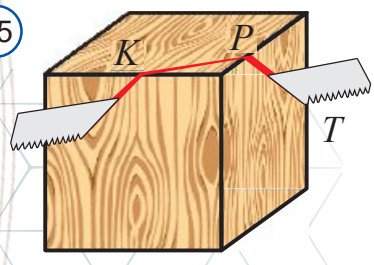


d)



8.2. Объясните, какое сечение пространственных форм изображено в случаях, представленных на рис. 13.

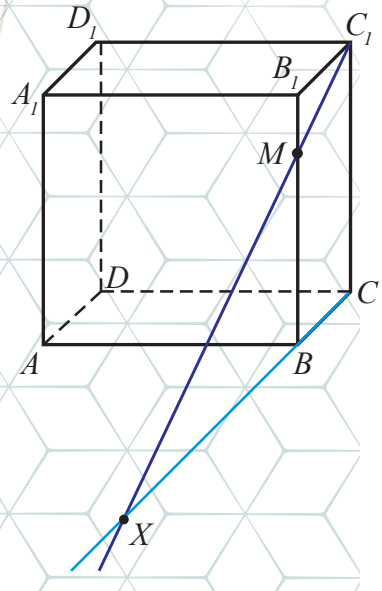
15



8.3. Когда куб пересекается плоскостью, какую из следующих ситуаций можно описать на рисунке 14? Какие из них невозможны?

8.4. При распиливании деревянного куба, показанного на рисунке 15, образуется сечение через точки K, P и T. Какова форма полного сечения?

8.5. Нарисуйте куб. На его краях отметьте три точки таким образом, чтобы плоскость, проходящая через эти точки, находилась в поперечном сечении. Пусть они образуют: а) треугольник; б) прямоугольник; в) пятиугольник.

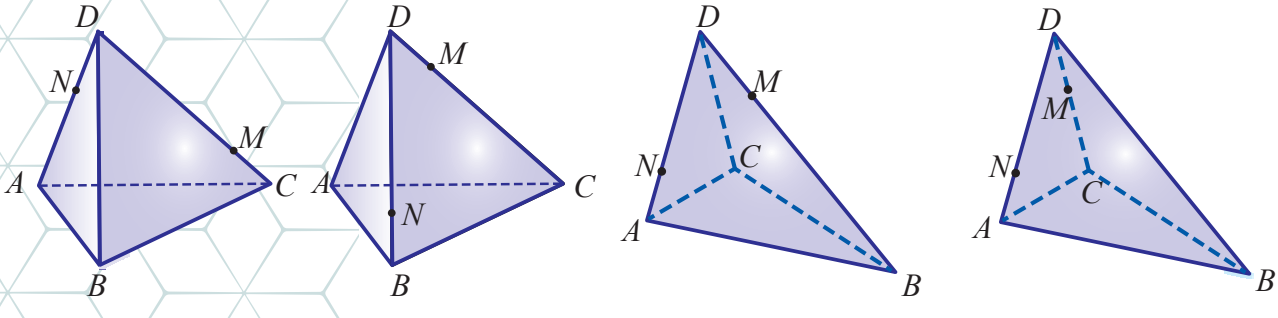


8.6. Выполните построение по следующему алгоритму и объясните процесс построения. Даны куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и $M \in BB_1$. Алгоритм нахождения точки пересечения $ABCD$ куба с прямой C_1M *(рис. 16)*: продолжая пересечения C_1M и BC, обозначим точку их пересечения X.
X – искомая точка.

8.7. Точки M и N отмечены на рёбрах тетраэдра $ABCD$, изображённого на рисунке 17. Определите, на какой прямой лежит точка пересечения прямой MN с плоскостью ABC.

8.8. На основе следующего алгоритма составьте и объясните сечение куба, проходящее через заданные точки. Алгоритм построения сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящего через точки A_1, $M \in D_1C_1$ и $N \in DD_1$ (*рис.18*):

17



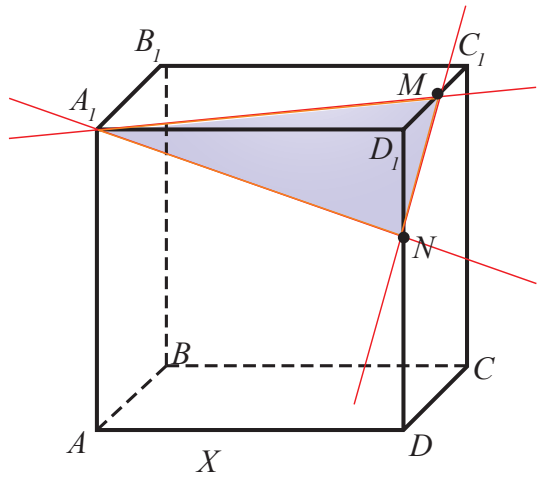
1. Соедините точку A_1 с точкой M.
2. Соедините точку A_1 с точкой N.
3. Соединяем точку M с точкой N.
4. Треугольник A_1MN будет искомым сечением.

8.9. На основе следующего алгоритма создайте сечение куба, проходящее через заданные точки, и объясните процесс создания. Алгоритм построения сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящего через точки M, Q и P*(рис.19)*:

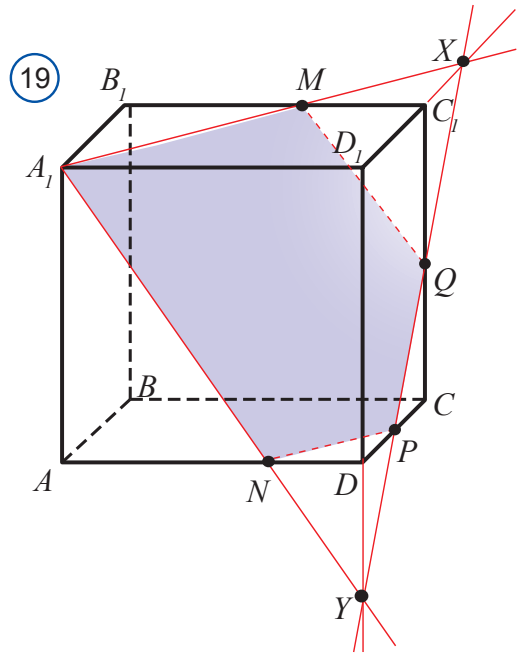
1. Проведём прямую, проходящую через точки A_1 и M. Точку пересечения прямых A_1M и D_1C_1 обозначим X.
2. Из точек A_1 и N проведём прямую. Точку пересечения прямых A_1N и DD_1 обозначим Y.
3. Точку X соединяем с точкой Y. Точку пересечения прямых XY и CC_1 обозначим Q.
4. Точку пересечения прямых XY и DC обозначим P.
5. Проведём прямую, проходящую через точки M и Q. Проведём прямую, проходящую через точки N и P.
6. Искомым сечением пятиугольника A_1MQPN будет P.

8.10. Сделайте поперечное сечение прямоугольного параллелепипеда, изображённого на рисунке 20, проходящего через три заданные точки.

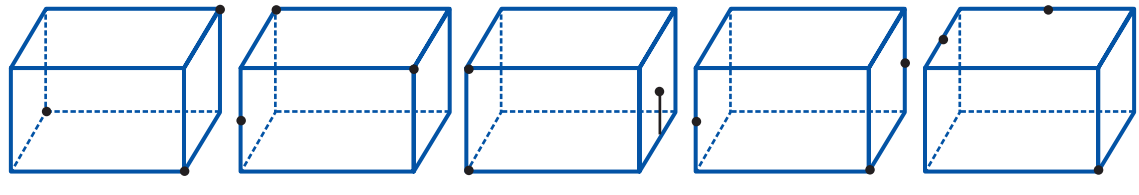
8.11. Сделайте поперечное сечение пирамиды, которое проходит через три заданные точки, изображённые на рисунке 21.



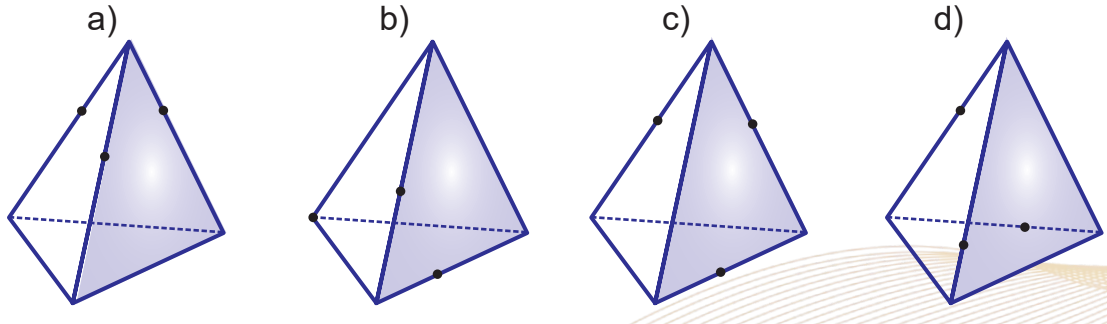
19



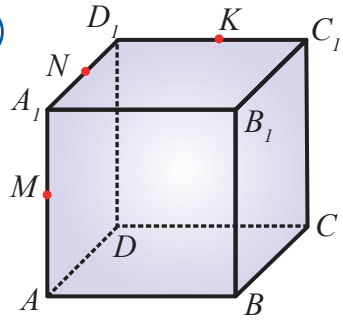
20



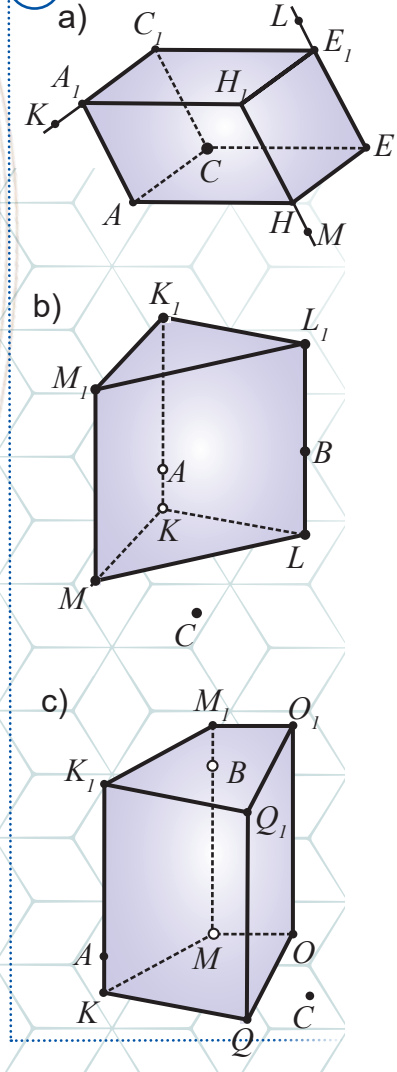
21



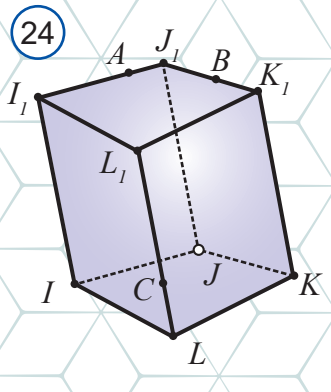
22



23



24



8.12. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки M, N и K методом параллельного переноса (рис.22).

8.13. Даны точки M и N на рёбрах AD и CD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение, которое получится, если вы разрежете куб плоскостью MNB_1.

8.14. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и отметьте точки M, N и L, являющиеся серединами рёбер AB, BC и BB_1. Затем: а) постройте сечение, образованное пересечением куба плоскостью MNL; б) докажите, что треугольник MNL правильный; в) найдите грань треугольника MNL, если сторона куба равна 1 cm.

8.15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед со сторонами AB = 6 cm, AD = 6 cm и AA_1 = 8 cm. Докажите, что пересечение параллелепипеда BC_1D с плоскостью является равносторонним треугольником, и найдите высоту этого треугольника.

8.16. Нарисуйте призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки M, N и L.

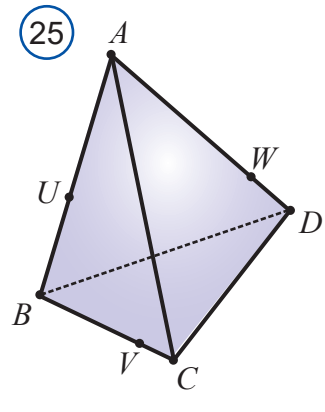
8.17. На основании данных, приведённых на рисунке 23, постройте соответствующие сечения пространственных фигур, проходящих через точки: а) M, N и L; б) A, B и C; в) A, B и C.

8.18. Возьмём точки A, B и C, лежащие на рёбрах JI_1, J_1K_1 и LL_1 призмы $IJKLI_1J_1K_1L_1$ (рис. 24). Постройте сечение призмы плоскостью ABC.

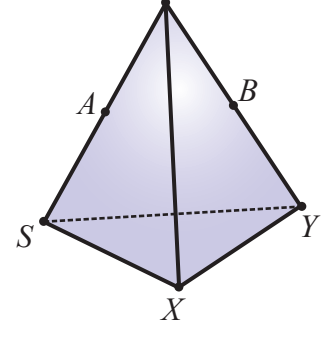
8.19. На основе данных на рис. 25 постройте сечение пространственной фигуры, полученное при пересечении её плоскостью, проходящей через точки U, V и W.

8.20. На основе данных на рис. 26 постройте сечение пространственной фигуры, полученное при пересечении её плоскостью, проходящей через точки A, B и X.

25



26



Используя GeoGebra

Создание многогранников

На рёбрах куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даны точки E, F и G на рёбрах AB, CC_1 и A_1D_1 соответственно. Постройте сечение, образовавшееся при пересечении куба плоскостью EFG.

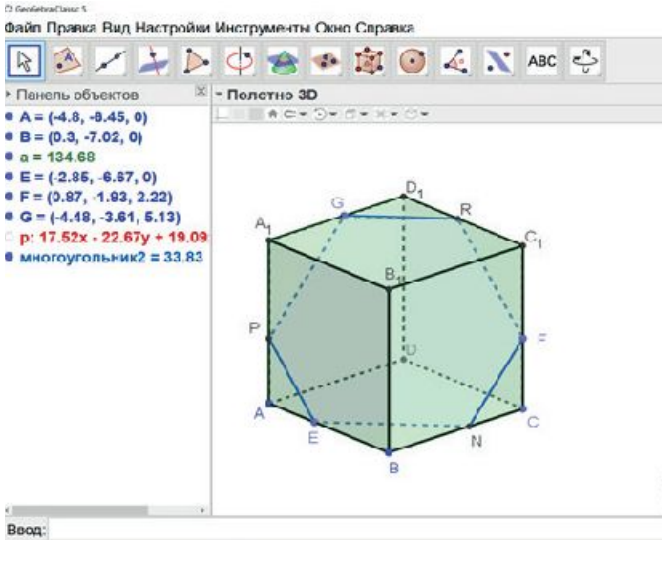
Построение:

- Откройте новое окно в GeoGebra.
- Переключите интерфейс GeoGebra в режим «Настроить» – «3D-графика».

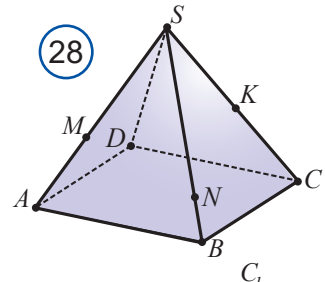
Этапы построения сечения

1		**Куб**	Создайте произвольный куб.
2		**Точка в объекте**	На рёбрах AB, CC_1 и A_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены точки E, F и G соответственно.
3		**Плоскость через 3 точки**	Образуется плоскость, проходящая через точки EFG.
4		**Кривая пересечения**	Постройте сечение плоскости, проходящей через куб и точки EFG.
5		**Показывать объект**	Скройте ненужную часть плоскости.
6		**Перемещение**	Перемещая точки E, F и G, проверьте правильность выполнения разреза куба (рис. 27).

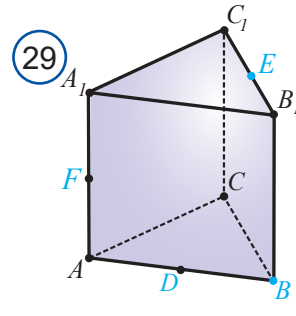
27



28



29



Задания для самостоятельного выполнения

1. Постройте сечение пирамиды при пересечении её плоскостью, проходящей через точки M, N и K *(рис. 28)*.

2. Найдите сечение, проходящее через данные точки правильной треугольной призмы *(рис. 29)*.

9 ПРОЕКТНАЯ РАБОТА

Первые геометрические знания появились в Древнем Египте более 5 тысяч лет назад. Египтяне использовали их не только для строительства пирамид, но и для обозначения возделываемых участков на берегах Нила. О зарождении геометрии в Древнем Египте во 2-м тысячелетии до нашей эры древнегреческий учёный Геродот (V век до н.э.) писал: «Налоги с каждого сословия собирали подобающим образом. Река Нил разлилась и затопила поместья. Помещики обратились к фараону с просьбой восстановить границы своих поместий или снизить налоги. Правитель прислал своих представителей – землемеров – узнать, насколько уменьшилось поместье, и соответственно уменьшить налог. Таким образом, наука об измерении земель – геометрия – появилась в Египте и оттуда перешла в Грецию».

Образовательный проект – это организация образовательного процесса, направленная на более углубленное и комплексное изучение предметов, позволяющая подойти к образовательному процессу на основе опыта и практической деятельности. При этом проектная работа может выполняться в рамках одной дисциплины.

Учащиеся проводят свои исследования по проектной работе в течение года, как правило, вне занятий, самостоятельно.

Темы проектной работы могут носить *практический, теоретический* и *исследовательский* характер.

В практической проектной работе полученные знания и умения используются для решения задач (кейсов) в жизненных ситуациях. Когда возникает потребность в развитии практических навыков и компетенций, связанных с определённым предметом, эффективно использование практикоориентированных проектов. В самом простом случае учитель может дать учащимся задания по предмету, такие как составление дополнительного учебного материала, набор тестов, презентации, раздаточный материал или глоссарий (словарь терминов), создание и изготовление наглядной модели учебного пособия. В процессе работы с практико-ориентированными проектами у учащихся развиваются предметные знания, умения и навыки, определяется компетентность в деятельности.

В работе над теоретическим проектом углубленно изучается тема предмета. В такой проектной работе информация по заданной теме собирается, обрабатывается, анализируется, классифицируется, обобщается и представляется в виде полезного и дополнительного письменного учебного ресурса.

В ходе исследовательского проекта проводится небольшое научное исследование для решения нестандартной задачи или жизненной проблемы. Если ставится цель развить навыки аналитического и критического мышления учащихся, овладеть логическими способами восприятия и обработать большой объём информации, используют учебный проект по исследованию. Целью данного образовательного проекта является обоснование гипотезы проекта. Для достижения этой цели необходимо проводить эксперименты, анализировать, обобщать, сравнивать результаты, устанавливать закономерности развития, делать вы-

воды, обосновывать свою точку зрения. Таким образом, основное внимание образовательного проекта по исследованию сосредоточено на развитии интеллектуальной компетентности.

В учебном проекте наибольшее внимание следует уделить развитию творческих способностей учащихся. Именно творческий проект позволяет учащимся проявить себя и создать собственную творческую работу в любой области. Творческие проекты развивают способности учащихся, повышая их статус в группе и самооценку. Любая творческая работа требует презентации и общения с классным коллективом. Именно поэтому творческие проекты оказывают большое влияние на развитие коммуникативной компетенции учащихся.

Студенты могут работать над темой проектной работы индивидуально или в группах по 3-4 человека. Работа над проектом завершается защитой (малой конференцией), проводимой в конце учебного года. Процесс работы над проектом может включать в себя следующие виды учебной деятельности:

- планирование проектной деятельности;
- взаимное распределение задач;
- постановка целей обучения;
- поиск необходимой информации;
- поиск решений проблемных ситуаций, связанных с темой;
- выбор наиболее подходящего решения и обоснование;
- проведение опросов и экспериментов в необходимых случаях;
- подготовка отчёта о результатах проектной работы;
- анализ и оценка своей деятельности;
- подготовка презентации к защите проекта;
- защита проектной работы.

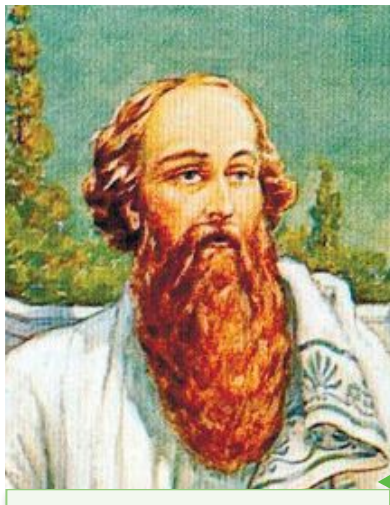
В процессе занятий учащиеся будут проинформированы о работе над проектом. Темы проекта распределяются между учащимися. Ниже показана проектная работа в качестве примера.

Примеры тем проектной работы
(помимо этих тем могут быть предложены и другие темы)

1. Евклидова геометрия.
2. Геометрия Лобачевского.
3. Геометрия многоугольников.
4. Загадки египетских пирамид.
5. Внешняя сторона многоугольника.
6. География и геометрия моего города.
7. Геометрическая мозаика.

Стереометрия, или пространственная геометрия — раздел геометрии, изучающий форму, размеры и свойства различных пространственных тел.

Оно происходит от греческих слов «stereo» — «тело» и «metrio» — «измерение» и буквально означает «измерение тел». Стереометрия, как и планиметрия, возникла и развивалась в связи с потребностями практической деятельности человека.



Одной из древнейших и наиболее известных школ является пифагорейская школа (VI-V вв. до н.э.), названная в честь ее основателя Пифагора. Пифагорейцы использовали правильные многоугольники в своих философских теориях. Их формы даны основам бытия. Древние исследователи считали, что огонь – это тетраэдр, земля (почва) – куб, воздух – октаэдр, вода – икосаэдр, а вся Вселенная – додекаэдр.

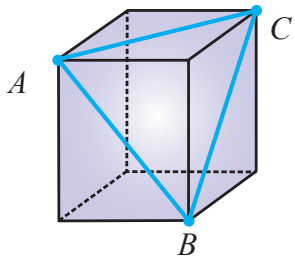
8. Геометрические парадоксы.
9. Геометрические формы в архитектуре башен.
10. Геометрические фигуры в дизайне и отделке коридоров.
11. Геометрия в древней живописи.
12. Геометрия живописи, скульптуры и архитектуры.
13. Геометрия на картинах в музее.
14. Узорчатая геометрия.
15. Геометрия и архитектурные виды зданий и сооружений.
16. Геометрия в клетках.
17. Геометрия в среднеазиатской архитектуре.
18. Математические особенности египетской пирамиды.
19. Стереометрические объекты.
20. Симметрия в природе.
21. Словарь терминов геометрии.
22. «Что такое симметрия?». Учебный фильм.
23. Дидактический материал по теме «Разрез многоугольников».
24. Набор тестов по геометрии.
25. Создание сценария игры «Геометрическая битва».
26. Рассказ о единицах измерения – анимация.
27. Разработка сценария спектакля «Геометрические приключения».
28. Тренажер для решения геометрических задач.
29. Геометрический калькулятор.
30. Мультимедийное приложение «Геометрические фигуры».
31. Электронный дисплей симметрии.
32. Учебно-тестовая программа «Геометрия».
33. Электронный справочник по стереометрии.
34. Происхождение, развитие и использование геометрии человечеством.
35. Математика в физике.
36. Математика в химии.
37. Математика в биологии и медицине.
38. Математика в экологии.
39. Математика в географии.
40. Математика в экономике.
41. Математика в искусстве.
42. Использование программы GeoGebra на занятиях по стереометрии.
43. Список полезных электронных ресурсов для изучения стереометрии.
44. Вопросы стереометрии в международных оценочных исследованиях.

10 ПРАКТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ НА ПОВТОРЕНИЕ ГЛАВЫ

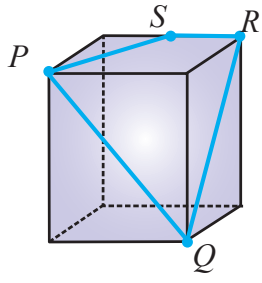
10.1. Является ли ломаная линия на рисунке 1 плоской или пространственной?

1

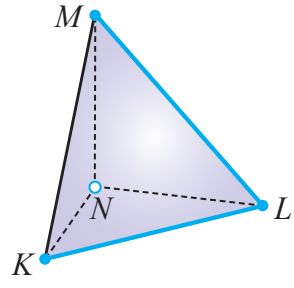
a)



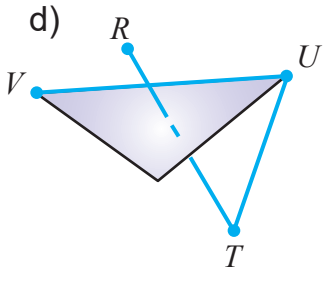
b)



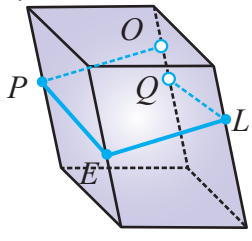
c)



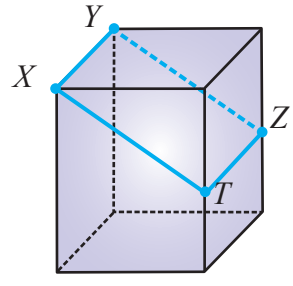
d)



e)



f)



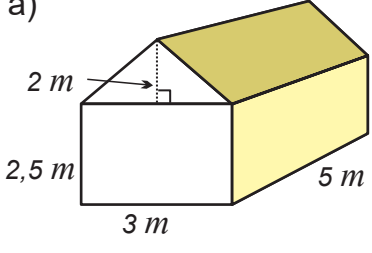
10.2. Сторона основания правильной прямоугольной пирамиды равна 12 $см$, а длина сечения, соединяющего вершину пирамиды с центром основания, – 16 $см$. Найдите: а) боковое ребро и апофему; б) площадь боковой поверхности; в) площадь полной поверхности пирамиды.

10.3*. Основание пирамиды $REFGH$ состоит из параллелограмма $EFGH$ со сторонами 10 $см$ и 18 $см$ и площадью грани 90 $см^2$. Длина участка, соединяющего вершину пирамиды R с точкой пересечения диагоналей основания O, равна 6 $см$ и перпендикулярна этим диагоналям. Найдите: а) боковые рёбра; б) площадь боковой поверхности; в) площадь полной поверхности.

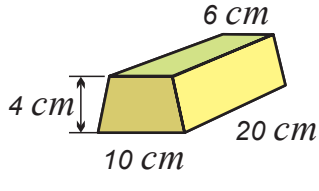
10.4. Найдите общую площадь поверхности предметов, изображённых на рисунке 2.

2

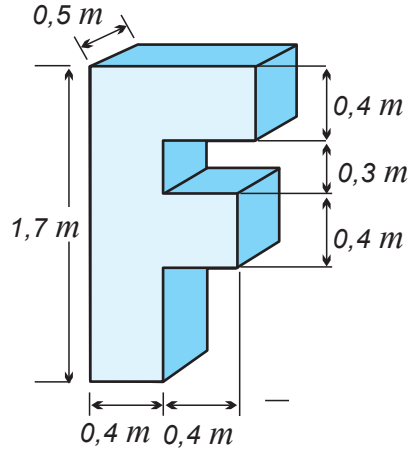
a)



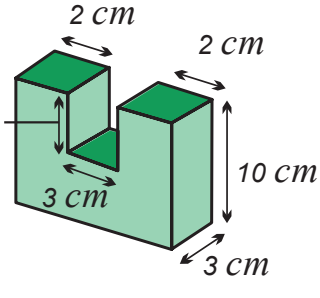
b)



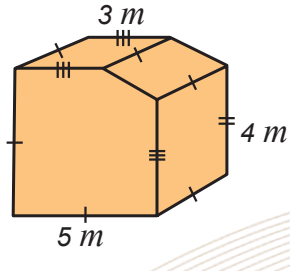
c)



d)



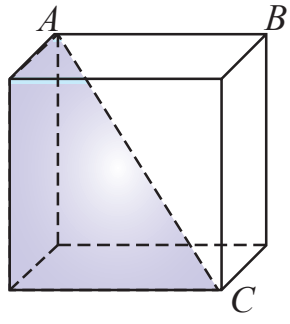
e)



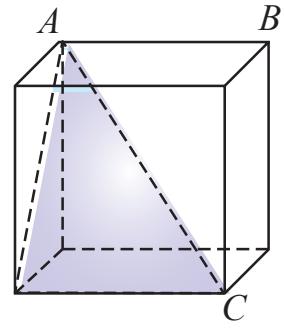
10.5. Какая из ситуаций, описанных на рис. 3, может возникнуть при разрезании куба плоскостью? Какие из них невозможны?

3

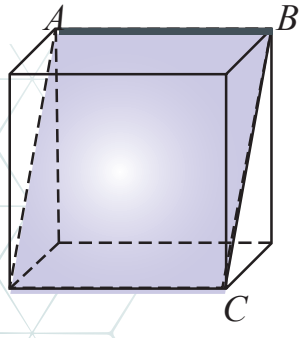
a)



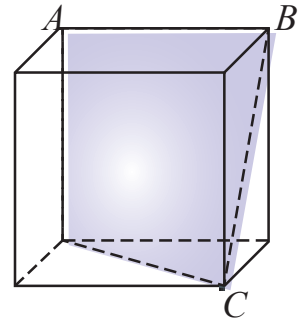
b)



c)



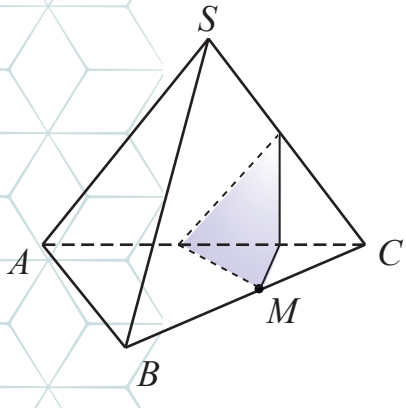
d)



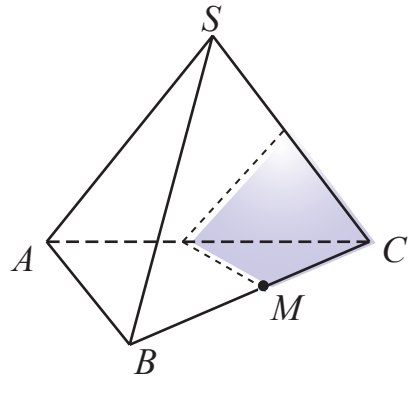
10.6. На каком рисунке изображено сечение, проходящее через точку M и параллельное углу SAB тетраэдра?

4

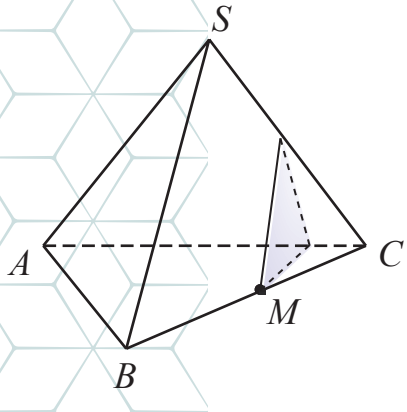
a)



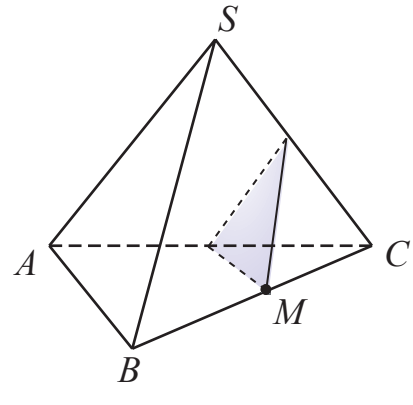
b)



c)



d)

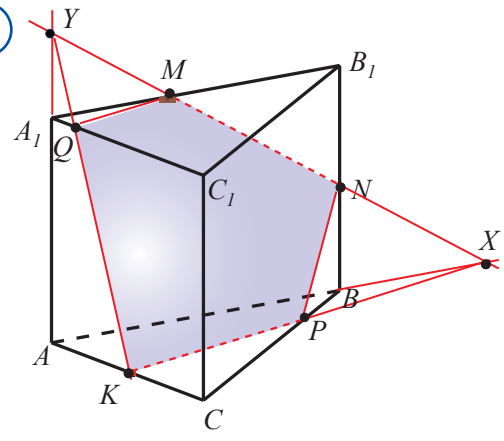


10.7. На основе следующего алгоритма постройте сечение призмы, проходящее через заданные точки, и объясните процесс его построения. Алгоритм

построения сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$, проходящего через точки M, N, P и Q – искомое:

1. $M \leftrightarrow N$, $MN \cap AB = X$
2. $X \leftrightarrow K$, $XK \cap BC = P$
3. $MN \cap AA_1 = Y$
4. $Y \leftrightarrow K$, $YK \cap A_1C_1 = Q$
5. $P \leftrightarrow N$, $Q \leftrightarrow M$
6. $MNKPQ$ – искомое сечение.

5

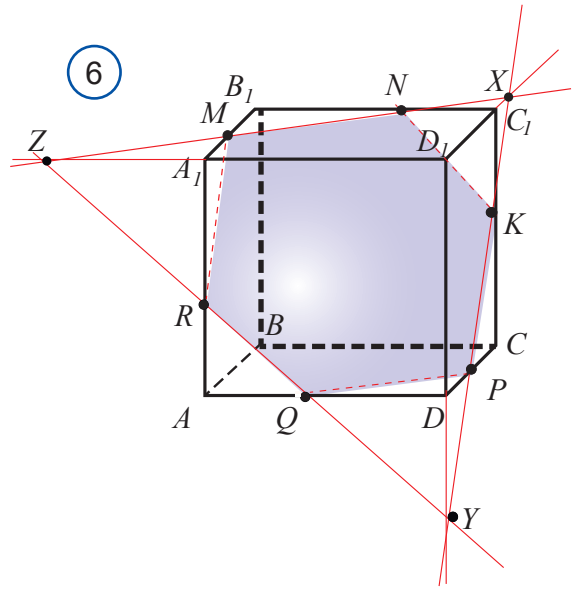


Здесь отметка $M \leftrightarrow N$ означает, что мы проводим прямую, проходящую через точки – M и N, а отметка $MN \cap AB = X$ означает, что мы отмечаем точку пересечения прямых MN и AB с X.

10.8. На основе следующего алгоритма создайте сечение куба, проходящее через заданные точки, и объясните процесс создания. Алгоритм построения сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ по точкам $M \in A_1B_1$, $N \in B_1C_1$ и $K \in CC_1$:

1. $M \leftrightarrow N$;
2. $MN \cap D_1C_1 = X$;
3. $N \leftrightarrow K$, $X \leftrightarrow K$;
4. $XK \cap DC = P$;
5. $KP \cap DD_1 = Y$;
6. $MN \cap A_1D_1 = Z$;
7. $Y \leftrightarrow Z$
8. $YZ \cap AD = Q$;
9. $YZ \cap AA_1 = R$;
10. $Q \leftrightarrow P$, $R \leftrightarrow M$;
11. $MNKPQR$ – искомое сечение.

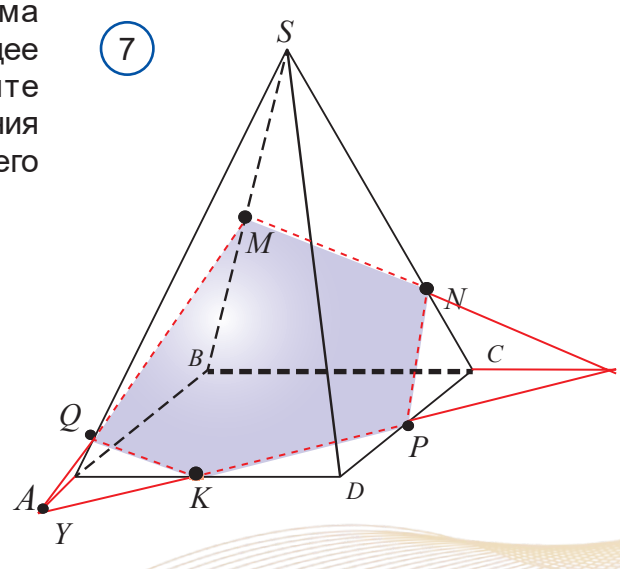
6



10.9. На основе следующего алгоритма составьте сечение пирамиды, проходящее через заданные точки, и объясните процесс построения. Алгоритм построения сечения пирамиды $SABCD$, проходящего через точки $M \in SB$, $N \in SC$ и $K \in AD$:

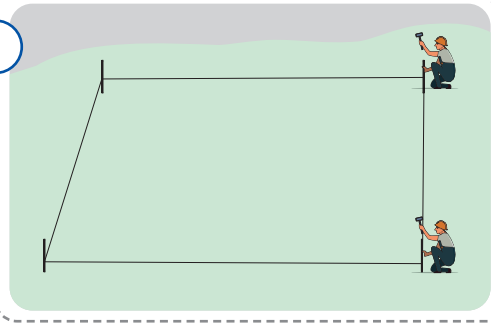
1. $M \leftrightarrow N$
2. $MN \cap BC = X$
3. $X \leftrightarrow K$
4. $XK \cap DC = P$
5. $XK \cap AB = Y$
6. $Y \leftrightarrow M$
7. $YM \cap SA = Q$
8. $P \leftrightarrow N$, $K \leftrightarrow Q$
9. $MNPKQ$ – искомое сечение.

7



Формирование практических компетенций

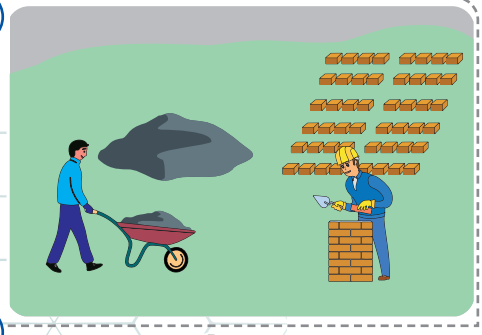
1



1. Почему перед рытьём котлована под постройку производят разметку с помощью натянутой веревки? *(рис. 1)*

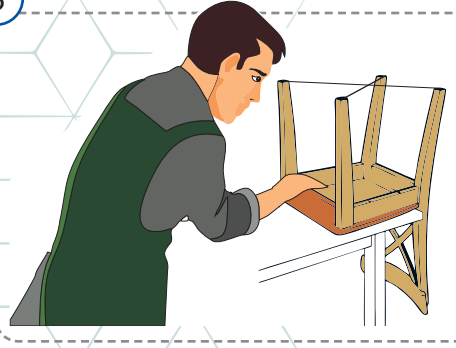
Ответ: *пересечение двух плоскостей является прямой линией.*

2



2. При формовке кирпича глину закладывают в форму, а лишнюю глину снимают линейкой, передвигая её по противоположным краям формы. Объясните, почему при такой обработке поверхность кирпича остаётся плоской? *(рис. 2)*

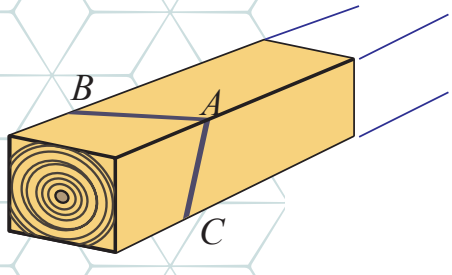
3



3. Чтобы убедиться, что ножки готового стула лежат в одной плоскости, столяры натягивают нитку на противоположные ножки стула. Попробуйте этот метод и расскажите, на чём он основан. *(рис. 3)*

Ответ: *две пересекающиеся прямые определяют одну плоскость.*

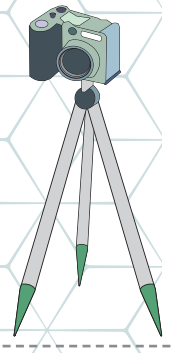
4



4. Как плотник добивается ровной поверхности при распиливании куска дерева? *(рис. 4)*

Ответ: *при распиливании бруса плотник обычно намечает плоскость распила двумя прямыми AB и AC на смежных гранях. Затем пилит так, чтобы полотно пилы было направлено по этим прямым. В результате, поскольку плоскость, проходящая через две пересекающиеся прямые, является единственной, поверхность распила получается плоской.*

5



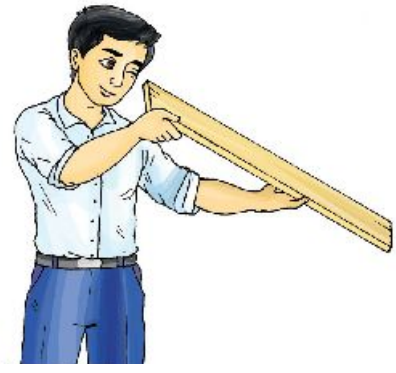
5. Почему штатив для установки камеры стоит на трёх ножках? *(рис. 5)*

Ответ: *через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит только одна плоскость.*

6. Как плотник проверяет ровность поверхности обработанной доски? На чём основан этот метод? *(рис. 6)*

Ответ: *если две точки прямой лежат в плоскости, то и вся прямая лежит в этой плоскости.*

6



7. Почему трёхколесный мотоцикл устойчивее двухколёсного? *(рис. 7)*

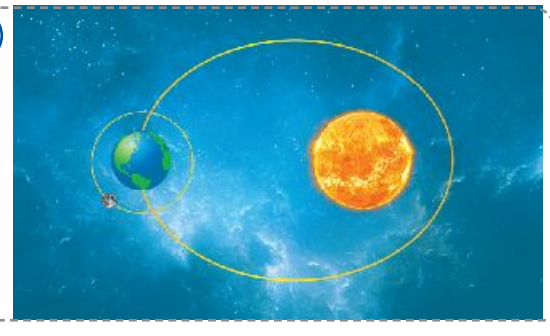
Ответ: *через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит только одна плоскость.*

7



8. Могут ли центры Солнца, Земли и Луны лежать в одной плоскости? А на одной прямой? Когда? *(рис. 8)*

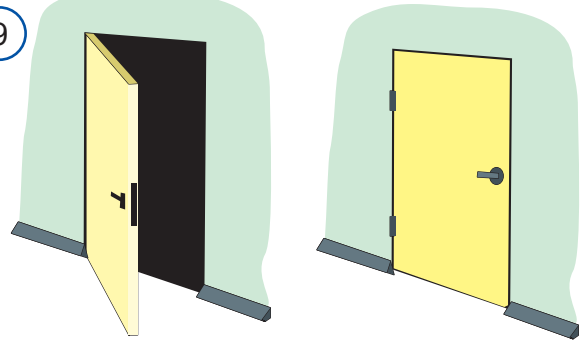
8



9. Почему открытые двери двигаются сами по себе? Почему этого не происходит с закрытыми дверями? *(рис. 9)*

Ответ: *Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести только одну плоскость.*

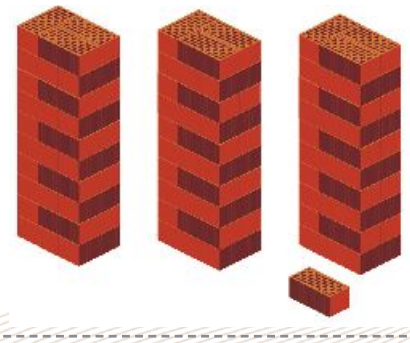
9



10. Сколько кирпичей понадобится для постройки 18 колонн, если поперечное сечение каждой колонны есть квадрат со стороной 7 dm, а высота колонны 4 m? (Размеры кирпича: 1 : 1,5 : 3 dm. При строительстве 5% кирпича уходит в отходы) *(рис. 10)*.

Ответ: *5760 единиц.*

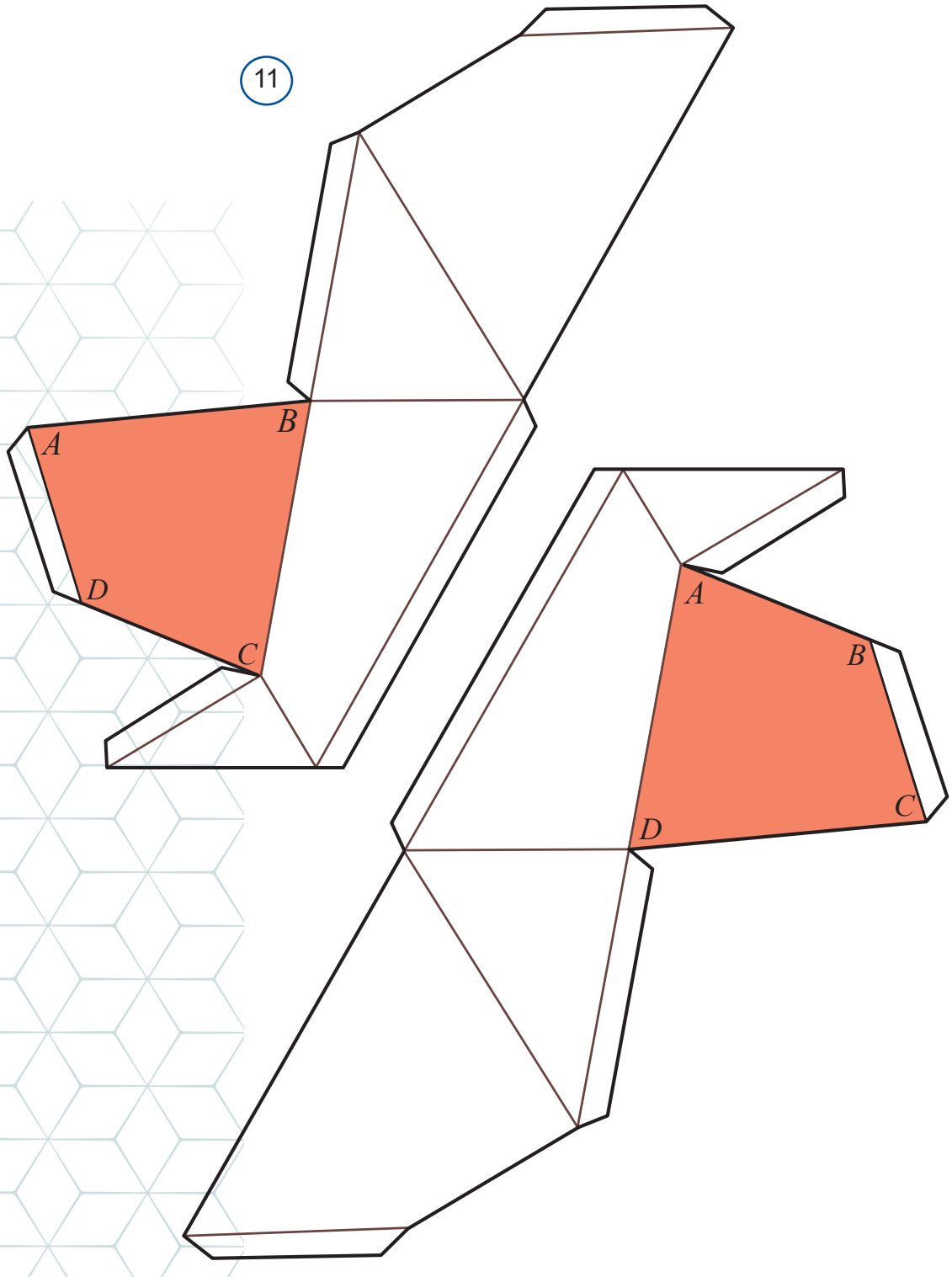
10



Практическая работа

1. Нарисуйте развёртку, представленную на рис. 1.11, на плотной бумаге. Вырежьте её ножницами, сложите по соответствующим линиям, а затем склейте. В результате две части тетраэдра пересекутся некоторой плоскостью $ABCD$.

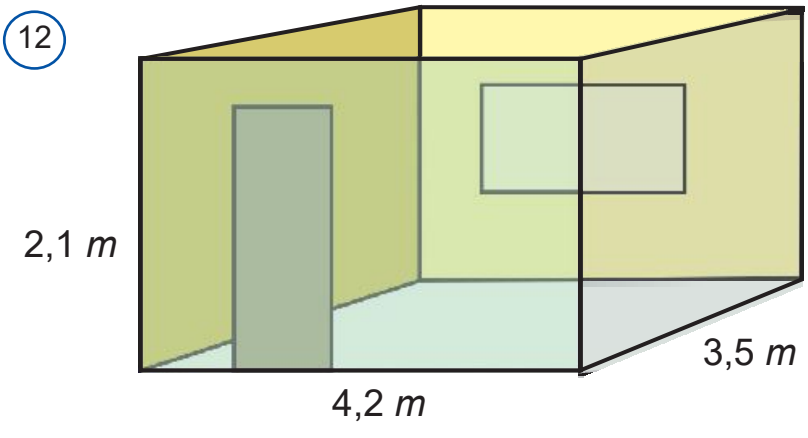
11



2. Комната, показанная на рисунке 12, нуждается в ремонте. В ней есть дверь размерами 0,8 *m* и 2,2 *m* и окно размерами 183 *cm* и 91 *cm*. Обе стороны двери должны быть окрашены. В таблице указаны цены двух видов красок. Используйте эту информацию, чтобы рассчитать, сколько вам нужно краски для недорогого ремонта.

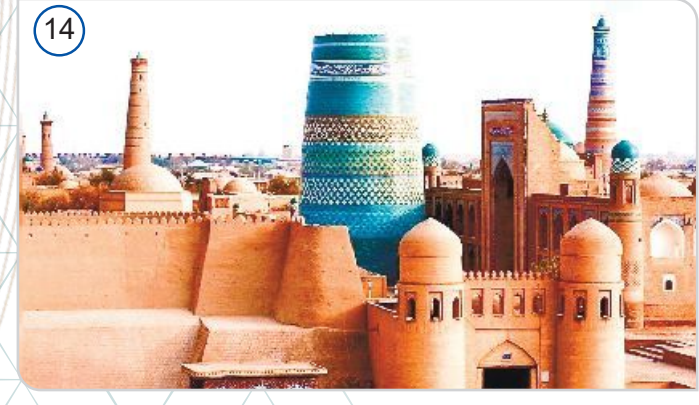
Тип краски	**Объём**	**Площадь покраски**	**Стоимость** *(в сумах)*
Для стен	*4 l*	*16 m²*	*32450*
	2 l	*8 m²*	*20800*
Для двери	*2 l*	*10 m²*	*23600*
	1 l	*5 m²*	*15400*

12

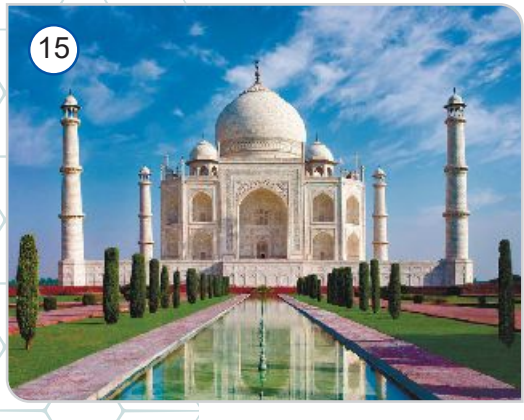




Наши предки, строившие большие здания и сооружения, обладали большими геометрическими знаниями и потенциалом. Это видно по историческим памятникам, стоящим на площади Регистан в г. Самарканде (рис. 13).



Какие геометрические фигуры вы видите на росписи комплекса Ичанкала в г. Хиве (рис. 14)?



Тадж-Махал – древний памятник, построенный потомком Бабура правителем Шах-Джаханом в Агре, Индия (рис. 15). Очевидно, что мастера, строившие его, в совершенстве владели геометрией.



Сиднейский оперный театр (рис. 16) – образец современной архитектуры Австралии. Он примечателен своим необычным геометрическим видом.

17



Невозможно не насладиться удивительным видом развлекательного комплекса «Галактика Сохо», построенного в Пекине, столице Китая, по проекту известного иракского архитектора Захи Хадид, обладательницы прекрасного геометрического воображения (рис. 17) .

Вызывает восхищение и проект комплекса «Ташкент сити», возвышающегося в столице нашей страны. Можно себе представить, какой уровень геометрических знаний потребовался инженерам-строителям при создании столь необычных сооружений (рис. 18-19).

18



19



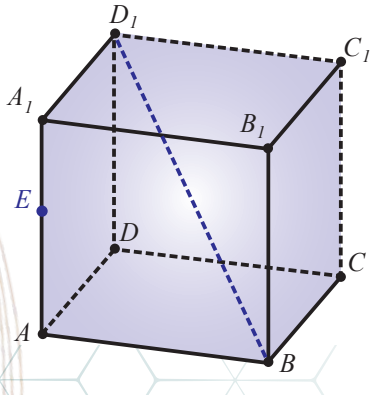
Используя GeoGebra

Создание сечений многогранников

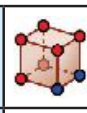
Постройте сечение куба, проходящее через заданную точку E и перпендикулярное прямой BD_1.

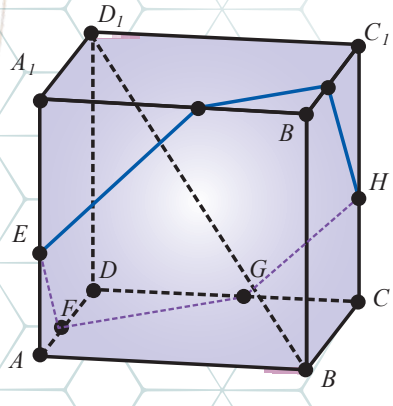
Моделирование:

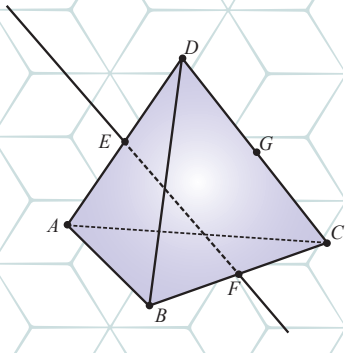
- Откройте новое окно в GeoGebra.
- Переключите интерфейс GeoGebra в режим **«Настройки» – «3D Графика»**.

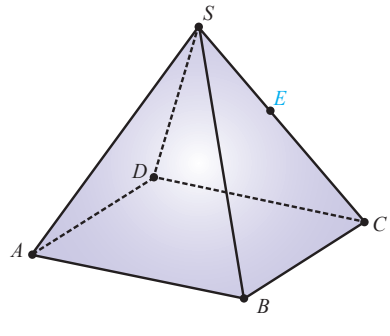


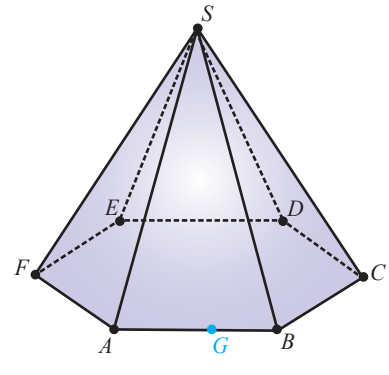
Этапы моделирования:

1		Создать произвольный куб.
2		На ребре куба AA_1 отметить точку E.
3		Провести линию BD_1.
4		Через точку E и BD_1 провести перпендикулярную плоскость.
5		Создаётся сечение, проходящее через точку E куба.
6		Скрыть ненужную часть плоскости.
7		Перемещая точку E, проверить правильность выполнения сечения.









1. Определить форму сечения плоскости, проходящей через середину G и перпендикуляр EF к ребру CD правильного тетраэдра $ABCD$. Здесь точки E, F являются серединами AD и BC.
2. Нарисуйте сечение плоскости, проходящее через точку E на ребре SC правильной прямоугольной пирамиды и перпендикулярное этому ребру.
3. Изобразите плоское сечение правильной шестиугольной пирамиды, проходящее через данную точку G и параллельное плоскости SAF.



ГЛАВА III

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

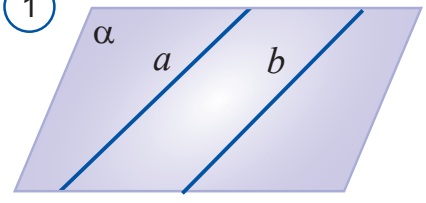
Изучив эту главу, вы научитесь:

- представлять параллельные прямые в пространстве;
- узнаете свойства параллельных прямых и научитесь использовать их при решении практических и контрольных задач;
- узнаете свойства параллелепипеда и научитесь использовать их при решении задач;
- представлять пересекающиеся прямые линии;
- научитесь правильно использовать знак пересечения прямых при решении задач;
- определять угол между прямыми в пространстве;
- определять угол между скрещивающимися прямыми в пространстве;
- представлять перпендикулярные прямые линии;
- узнаете определение прямой, параллельной плоскости;
- узнаете свойства прямых, параллельных плоскости, и научитесь их применять;
- узнаете определение параллельных и пересекающихся плоскостей;
- узнаете признаки параллельности двух плоскостей и научитесь ими пользоваться;
- узнаете свойства параллельных плоскостей и научитесь ими пользоваться;
- узнаете свойства параллельного проецирования и научитесь ими пользоваться;
- научитесь применять изученные концепции, факты и методы в незнакомых или жизненных ситуациях.

11 ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ

Параллельные прямые в пространстве

1



Две прямые называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются *(рис. 1)*.

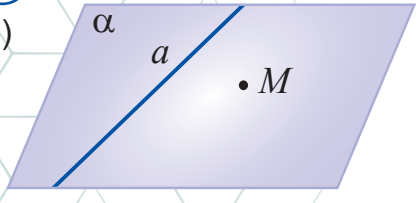
Параллельные прямые a и b на письме обозначаются как $a \parallel b$.

Через данную точку на плоскости можно провести одну прямую, параллельную данной. Такая конструкция будет уместна и в пространстве.

Теорема 3.1. Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной прямой.

2

a)

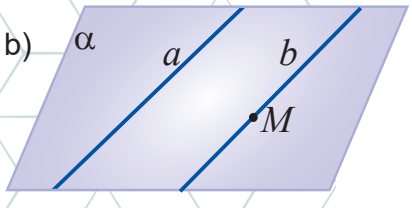


Доказательство. Пусть дана прямая a и точка M, не лежащая на этой прямой *(рис. 2а)*. Согласно следствию 1 на стр. 34, через данную прямую a и не лежащую на ней точку M можно провести единственную плоскость α *(рис. 2б)*.

В этой плоскости через точку M можно провести единственную прямую b, параллельную данной прямой a *(рис. 2б)*.

Прямая b – единственная искомая параллельная прямая.

b)



Когда одна из двух параллельных прямых на плоскости пересекает третью прямую, вторая из них также пересекает эту прямую. Подобное расположение будет уместно и в пространстве.

Теорема 3.2. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

Доказательство. Даны параллельные прямые b и c, одна из них – прямая b – пересекает плоскость β в точке M *(рис. 3)*.

Поскольку прямые b и c параллельны, они лежат в одной плоскости. Пусть это будет плоскость γ.

M – общая точка плоскостей β и γ. Тогда по аксиоме S_3 эти плоскости пересекаются по одной прямой l. Эта прямая лежит в плоскости γ, а b пересекает прямую в точке M. Следовательно, эта

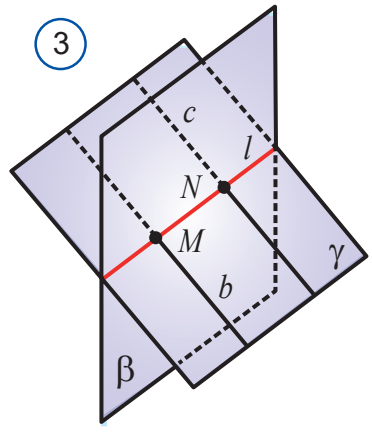
прямая, параллельная прямой b, пересекает прямую с в точке N.

Поскольку прямая l лежит в плоскости β, точка N также принадлежит плоскости β. Итак, точка N является общей точкой плоскостей β и γ.

Покажем теперь, что прямая c не имеет других общих точек с плоскостью β.

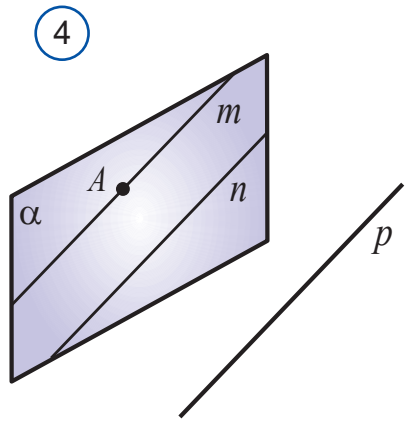
Предположим обратное. Предположим, что прямая c имеет ещё одну общую точку – K – с плоскостью β. В ней, согласно аксиоме S_2, прямая c лежит в плоскости. Тогда прямая c будет общей для плоскостей β и γ. Но l – прямая линия. Отсюда следует, что прямая c совпадает с прямой l. Это противоречит тому, что прямая b параллельна прямой c, а l пересекает прямую. Конфликт показывает, что наша гипотеза неверна.

Как известно из планиметрии, две прямые параллельны друг другу, если каждая из них параллельна третьей прямой. Это свойство справедливо и в пространстве и называется признаком *параллельности прямых*.



Теорема 3.3. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны друг другу.

Доказательство. Предположим, что прямые m и n параллельны прямой p *(рис. 4)*. Покажем, что прямые m и n лежат в одной плоскости и не пересекаются, т. е. параллельны.



Возьмём точку A на прямой и проведём плоскость через эту точку и прямую n. Докажем, что прямая m лежит в плоскости α.

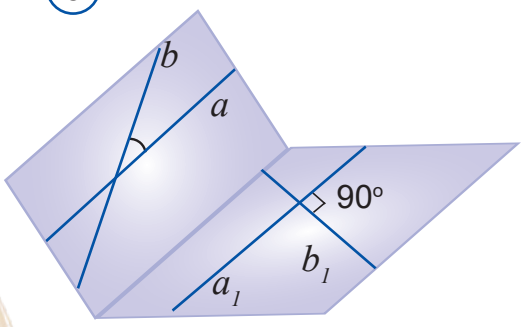
Допустим, это не так. Прямая m пересекает плоскость, так как имеет общую точку с плоскостью α. Тогда согласно теореме 3.2, эта плоскость пересекается прямой p, параллельной прямой m, и проходит прямая n, параллельная прямой p. Но этого не может быть, так как в плоскости α лежит прямая n.

Следовательно, прямые m и n лежат в плоскости α.

Теперь докажем, что эти прямые не пересекаются.

Опять же, предположим обратное. Пусть прямые m и n пересекаются в какой-то точке B. Через точку B проходят две параллельные прямой p прямые – m и n. Согласно теореме 3.1, этого быть не может.

5



Отрезки (лучи), лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *взаимно параллельными отрезками (лучами)*.

Наименьший из смежных углов, образованных пересечением двух прямых, называется *углом между двумя прямыми* (рис.5).

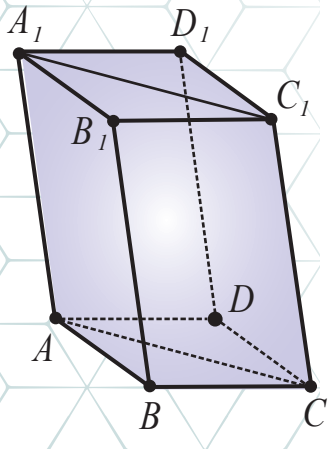
Прямые линии с углом 90° называются перпендикулярными прямыми.

Угол между параллельными прямыми равен 0°.

Теперь докажем следующие свойства параллелепипеда. Для этого необходимо вспомнить определение параллелепипеда и его элементов, данное в главе II.

Свойства параллелепипеда

6



Свойство 1. Параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ состоит из четырёхугольного параллелограмма ACC_1A_1, составленного из диагоналей основания и боковых рёбер параллелепипеда (рис. 6).

Доказательство. На самом деле стороны ABB_1A_1 и BCC_1B_1 параллелепипеда по определению являются параллелограммами.

Противоположные стороны этих параллелограммов равны между собой.

В частности, $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$.

По определению параллелепипеда, $AA_1 \parallel BB_1$ и $BB_1 \parallel CC_1$. Тогда, согласно теореме 3.3, $AA_1 \parallel CC_1$ и $AA_1 = CC_1$.

Следовательно, прямоугольник AC_1CA_1 является параллелограммом.

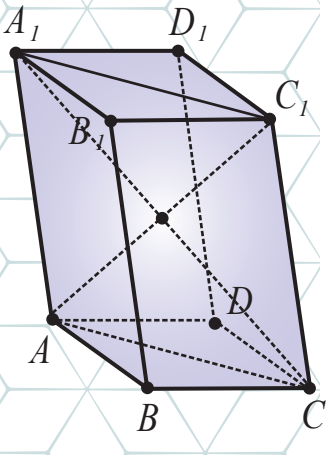
Свойство 2. Противоположные стороны параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны между собой (рис. 6).

Доказательство. Согласно указанному выше свойству, AC_1CA_1 является параллелограммом, и $AC = A_1C_1$.

Тогда треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трём сторонам, равны и углы ABC и $A_1B_1C_1$. В результате параллелограммы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны друг другу.

Таким же образом доказывается равенство и других противоположных сторон.

7



Свойство 3. Все диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся в этой точке пополам (рис. 7).

Доказательство. Согласно свойству 1, ACC_1A_1 – параллелограмм. Тогда диагонали A_1C и AC_1 этого параллелограмма пересекаются в одной точке и делятся пополам в точке пересечения.

Аналогично доказывается пересечение оставшихся диагоналей и их биссектриса в этой точке.

Пример. Докажите, что середины сторон пространственного прямоугольника, вершины которого не лежат в одной плоскости, будут вершинами параллелограмма.

Доказательство. Пусть $ABCD$ – пространственный четырёхугольник, а A_1, B_1, C_1 и D_1 – середины сторон четырёхугольника *(рис. 8)*. Тогда отрезок A_1B_1 – срединная линия треугольника ABC, параллельная стороне AC, а C_1D_1 – срединная линия треугольника ACD, параллельная стороне AC.

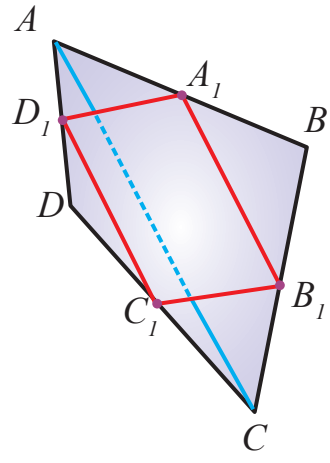
Согласно теореме 3.3, A_1B_1 и C_1D_1 параллельны. Следовательно, они лежат в одной плоскости.

Аналогично доказывается параллельность прямых A_1D_1 и B_1C_1.

Таким образом, четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ лежит в одной плоскости, а его противоположные стороны параллельны.

Следовательно, это параллелограмм.

8

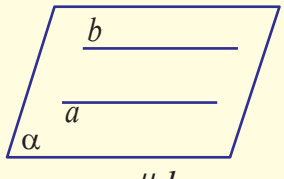
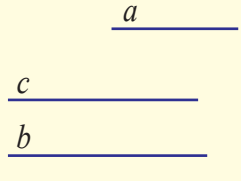
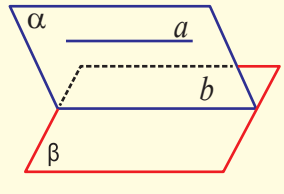
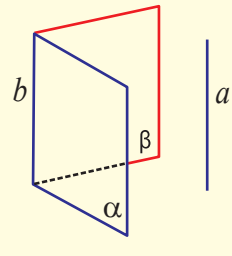


Вопросы и упражнения по теме

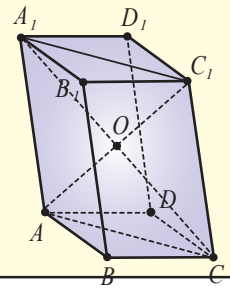
1. *Какие свойства параллельных прямых вы знаете?*
2. *Назовите признаки параллельности прямых.*
3. *Какие свойства параллелепипеда вы знаете?*

Практические упражнения

11.1. В таблице содержится основная информация 11-й темы. Внимательно изучите её.

1. Параллельные прямые			
Описание	**Отличительные признаки**		
 $a \parallel b$, если прямые a и b лежат в одной плоскости и не пересекаются, они называются *параллельными прямыми.*	 Если $a \parallel b$, $a \parallel c$, тогда $b \parallel c$.	 Если $\alpha \cap \beta = b$, $a \subset \alpha$ и $a \parallel \beta$, тогда $b \parallel a$.	 Если $\alpha \cap \beta = b$, $a \parallel \alpha$ и $a \parallel \beta$, тогда $a \parallel b$.

2. Свойства параллелепипеда



Свойство 1. Четырёхугольник (AA_1C_1C), образованный диагоналями основания и боковыми рёбрами параллелепипеда, является параллелограммом.

Свойство 2. Противоположные стороны равны $(AA_1B_1B = DD_1C_1C)$.

Свойство 3. Все диагонали пересекаются в одной точке и делятся в этой точке пополам $(AO = OC_1,\ CO = OA_1)$.

9

a)



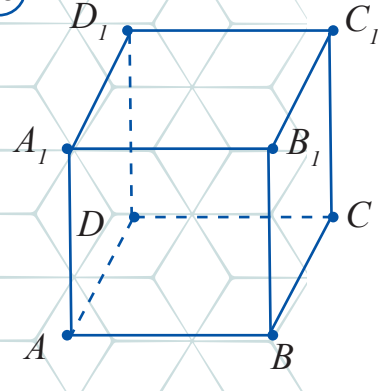
b)



c)



10



11.2. Обозначьте параллельные прямые в пространстве на рисунке 9.

11.3. Определите на рисунке 10 попарно параллельные рёбра на: а) параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$; б) призме $ABCA_1B_1C_1$.

11.4. Рёбра каких пирамид параллельны?

11.5. Известно, что если прямая пересекает одну из параллельных прямых на плоскости, то она пересекает и другую. Уместно ли это свойство в пространстве?

11.6. Прямые a и b параллельны прямой c. Как можно расположить прямые a и b между собой?

11.7. Докажите, что в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, изображённом на рисунке 10, диагонали BC_1 и AD_1 равны и параллельны друг другу.

11.8. На отрезке AB, где точка A лежит в плоскости α, выбрана точка C. Параллельные прямые, проведённые из точек B и C, пересекают плоскость a в точках B_1 и C_1 соответственно. Найдите длину сечения CC_1, если: а) точка C – середина отрезка B, а BB_1 = 14 cm; б) $AC : CB$ = 3:2, и BB_1 = 50 cm.

11.9. Даны параллелограмм $MNOP$ и трапеция $MNEK$ с основанием EK, не лежащие в одной плоскости. 1) Определите взаимное положение прямых PO и EK. 2) Основания трапеции равны MN = 45 cm, EK = 55 cm, и в ней можно построить внутреннюю окружность. Найдите периметр трапеции.

11.10. Какие из следующих свойств относятся к параллелепипеду? Отметьте правильные ответы.

а) состоит из прямоугольного параллелограмма, составленного из диагоналей основания и боковых граней;

б) боковые стороны перпендикулярны основанию;

в) основание состоит из прямоугольного квадрата, образованного из диагоналей и боковых граней;

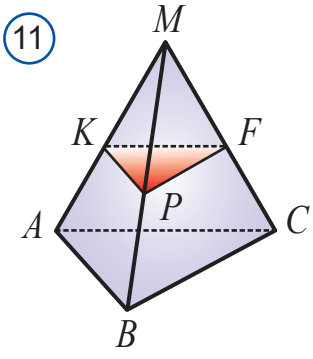
г) все его диагонали пересекаются в одной точке и делятся в этой точке на две равные части;

д) противоположные грани параллельны друг другу;

е) боковые стороны представляют собой прямоугольник;

ж) противоположные стороны равны между собой.

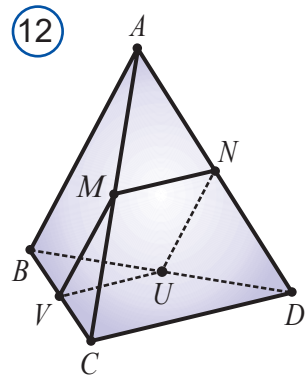
11



11.11. Параллельны ли друг другу прямые, перпендикулярные одной прямой в пространстве?

11.12. На рисунке 11 точка M лежит во внешней области треугольника ABC. Центры отрезков MA, MB, MC отмечены точками K, F, P соответственно. Какие из прямых параллельны друг другу? 1) KP; 2) PF; 3) KF; 4) KM; 5) PM; 6) FM; 7) AB; 8) BC; 9) AC.

12



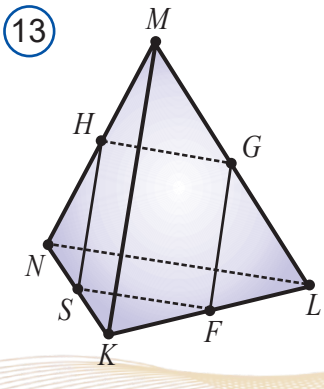
11.13. Прочитайте следующие предложения. Если предложение правильное, поставьте рядом с ним знак «+», а если неверное, поставьте рядом с ним знак «–».

1	В пространстве к прямой можно провести множество параллельных ей прямых из точки, не лежащей на ней.	
2	Две прямые, параллельные третьей прямой, пересекаются между собой.	
3	Если две прямые лежат на плоскости, они пересекаются.	
4	Через прямую и точку, не лежащую на ней, можно провести две плоскости.	
5	Из точки пространства, не лежащей на плоскости, можно провести множество прямых, пересекающих эту плоскость.	

11.14. Точки M, N, U, V – это середины рёбер AC, AD, BD и BC пирамиды $ABCD$ соответственно (рис.12). Если $AB = 20\,cm$, $CD = 30\,cm$, найдите периметр прямоугольника.

11.15. Точки H, G, F, S – это середины рёбер MN, ML, LK и KN треугольной пирамиды $KLMN$ соответственно *(рис.13)*. Найдите периметр прямоугольника $HGFS$, если $MK = 18\,mm$, $LN = 22\,mm$.

13



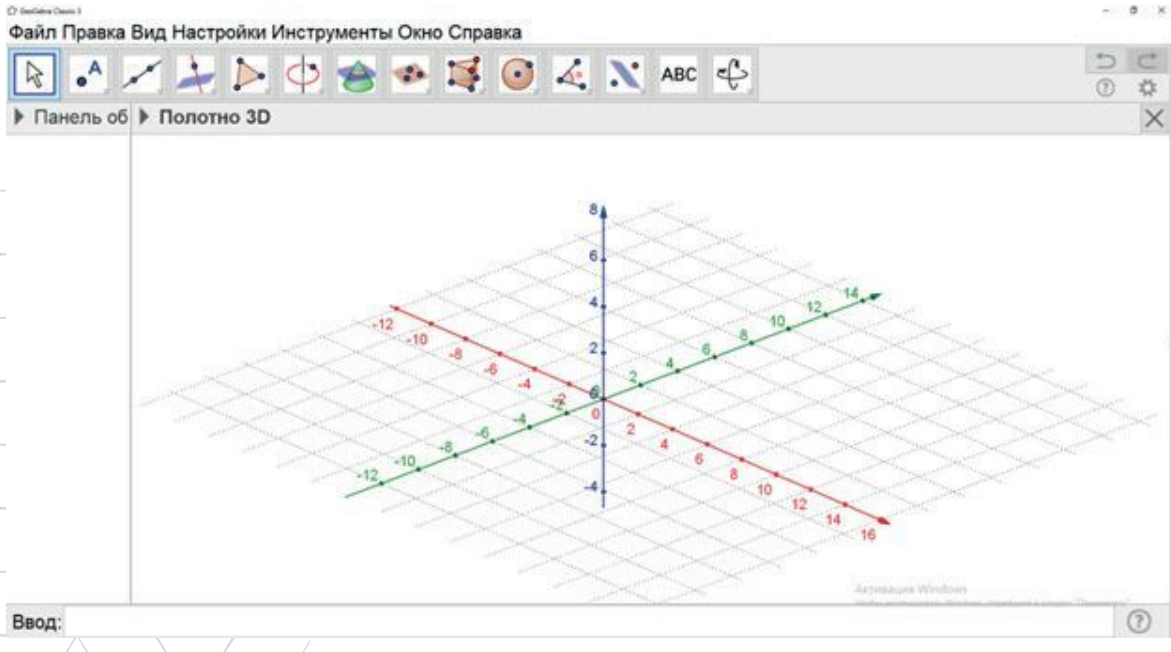
Используя GeoGebra

Создание различных плоскостей с помощью 3D-калькулятора



Если щёлкнуть левой кнопкой мыши инструмент **Плоскость через три точки** на панели инструментов, откроются еще три его возможности:

- **Плоскость;**
- **Перпендикулярная плоскость;**
- **Параллельная плоскость.**



Эти инструменты выполняют следующие задачи:

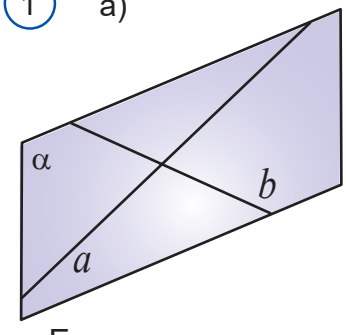
	С помощью инструмента **Плоскость** создаётся плоскость.
	При использовании инструмента **Перпендикулярная плоскость** можно создать перпендикулярную ей плоскость.
	При помощи инструмента **Параллельная плоскость** можно создать параллельную плоскость.

Задания для самостоятельного выполнения

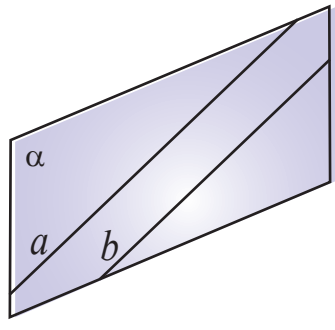
1. Отметьте любые три точки. Начертите плоскость, проходящую через них.
2. Начертите плоскость, затем создайте плоскость, перпендикулярную ей.
3. Начертите плоскость, затем создайте параллельную ей плоскость.

12 ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМЫХ

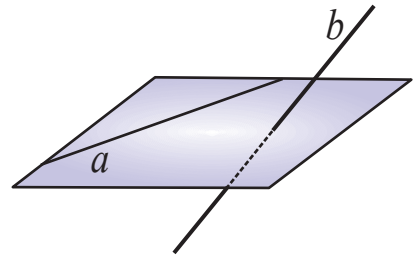
1 a)



b)



c)



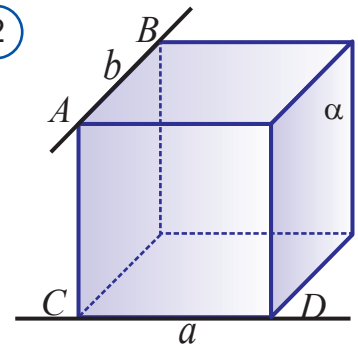
Если две прямые пересекаются или параллельны друг другу в пространстве, то они лежат в одной плоскости *(рис. 1а и 1б)*.

Прямые, не лежащие в одной плоскости в пространстве, называются ***скрещивающимися прямыми*** (рис. 1в). Пересечение прямых a и b выражается как $a \div b$.

Скрещивающиеся прямые – прямые, которые не лежат на одной плоскости. На рис. 2 показаны пересекающиеся рёбра AB и CD куба.

Скрещивающиеся прямые можно распознать по следующим признакам:

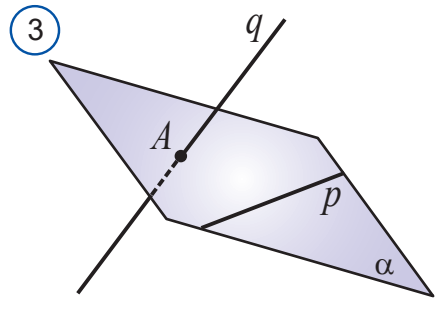
2



Теорема 3.4. Если одна из двух прямых лежит на плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, которая не лежит на первой прямой, то эти прямые будут скрещивающимися.

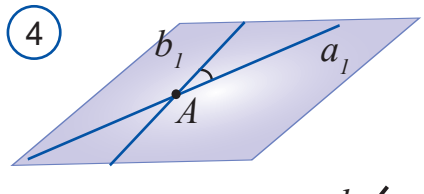
Доказательство. Пусть прямая p лежит на плоскости α. А прямая q пересекает эту плоскость в точке A, не принадлежащей прямой p *(рис. 3)*. Докажем, что прямые p и q – скрещивающиеся.

3



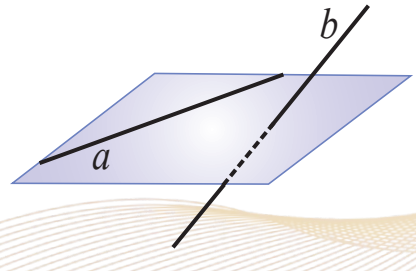
Предположим, что прямые p и q лежат в плоскости β. Тогда прямая p и точка A принадлежат плоскости β. В свою очередь, точка A принадлежит плоскости α. Получается, что прямая β лежит в плоскости α, а это противоречит условию теоремы. Таким образом, наше предположение неверно, а значит, прямые α и β скрещивающиеся.

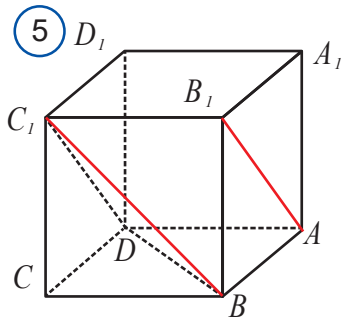
4



Углом между скрещивающимися прямыми считается угол между ***построенными пересекающимися прямыми***, параллельными этим прямым.

На практике можно найти угол между прямыми a и b *(рис. 4)*:





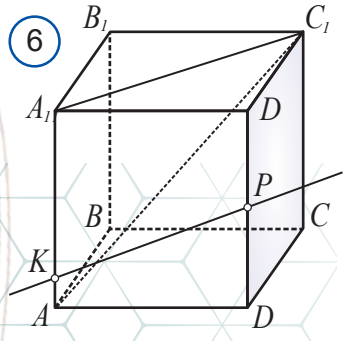
1) выбрать точку A;

2) от точки A провести прямые a_1 и b_1, параллельные скрещивающимся прямым a и b;

3) измерить угол между этими прямыми.

Учтите, что результат этого алгоритма не зависит от точки A.

Пример. Найдите угол между скрещивающимися диагоналями смежных сторон куба.



Решение. По условию необходимо найти угол между диагоналями AB_1 и C_1B сторон куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, смежных сторон BA_1B_1 и CBC_1B_1 *(рис. 5)*.

Проводим диагональ DC_1 параллельно AB_1. Тогда по определению угол между диагоналями AB_1 и BC_1 равен углу DC_1B между диагоналями DC_1 и C_1B.

DC_1B – равносторонний треугольник.

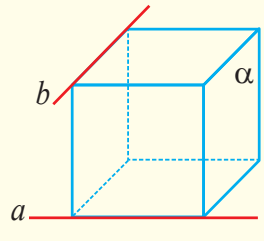
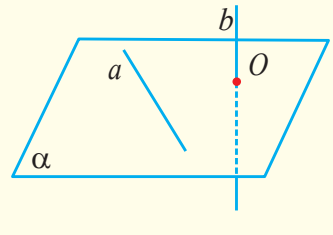
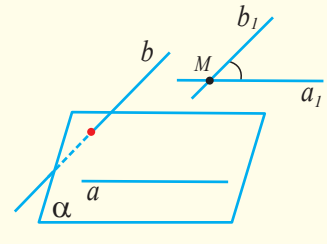
Следовательно, $\angle DC_1B = 60°$.

Вопросы и упражнения по теме

1. *Назовите признаки скрещивания прямых.*
2. *Как определяется угол между прямыми?*
3. *Могут ли скрещивающиеся прямые быть параллельными?*
4. *Как определяется угол между скрещивающимися прямыми?*
5. *Как можно расположить в пространстве прямые линии?*
6. *Всегда ли параллельны в пространстве непересекающиеся прямые?*

Практические упражнения

12.1. В таблице содержится основная информация по 12-й теме. Внимательно изучите её.

1. Скрещивающиеся прямые		
Описание	**Обозначение**	**Угол между прямыми**
 Прямые, которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости, называются *скрещивающимися*, на письме выражаются как $a \div b$.	 Если $a \subset \alpha$, $\alpha \cap b = O$, $O \notin a$, тогда $a \div b$.	 *Углом между скрещивающимися прямыми* считается угол между построенными пересекающимися прямыми, параллельными этим прямым.

12.2. На *рис. 6* изображён прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки K и P на его рёбрах AA_1 и DD_1 соответственно. Исходя из взаимного расположения прямых, представленных в таблице, отметьте соответствующие ячейки таблицы (⊗ – пересекаются, ÷ скрещиваются). Найдите ошибки в таблице.

	AB	BB_1	A_1D_1
KP	⊗	÷	⊗
C_1A_1	÷	÷	⊗
C_1B	⊗	⊗	÷

12.3. Прямые a и b лежат в одной плоскости. Покажите возможные пересечения этих прямых.

а) параллельны, б) пересекаются,

в) не пересекаются, г) скрещиваются,

д) перпендикулярны.

12.4. Нарисуйте: а) параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$; б) призму $ABCA_1B_1C_1$; в) тетраэдр $ABCD$; г) пирамиду $SABCD$, и найдите в ней пары скрещивающихся рёбер.

12.5. Если прямая A перпендикулярна прямой B, а прямая B перпендикулярна прямой C, перпендикулярна ли прямая A прямой C?

12.6. На рисунке 7 найдите примеры скрещивающихся прямых.

12.7. Каково взаимное расположение отрезков EF и GH, изображённых на рисунке 8?

12.8. Пересекаются ли отрезки EH и FG, изображённые на рисунке 9?

12.9. Точки K, Z, M, N – это середины рёбер SA, AC, BC, SB треугольной правильной пирамиды $SABC$ соответственно. Найдите периметр прямоугольника $KZMN$, если боковые грани пирамиды равны B, а сторона основания равна A.

12.10. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на рисунке 10 найдите углы между следующими прямыми: а) DC и BC; б) AB и BB_1; в) AA_1 и D_1C; г) AA_1 и D_1C_1; д) A_1C_1 и AC; е) AB и B_1D_1.

12.11. Прямые XU и VT параллельны, а прямые XY и VT пересекаются. Если: а) $\angle YXU = 40^\circ$;

б) $\angle YXU = 135^\circ$; в) $\angle YXU = 90^\circ$, найдите угол между прямыми XY и VT.

12.12. Прямая l параллельна стороне BC параллелограмма $ABCD$ и не лежит в его плоскости. Докажите, что прямые l и CD – скрещивающиеся. Найдите угол между l и CD, если один из углов параллелограмма равен: а) 58°; б) 133°.

7

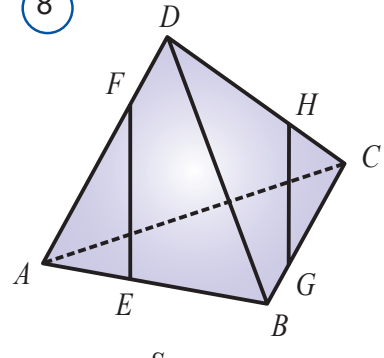
а)



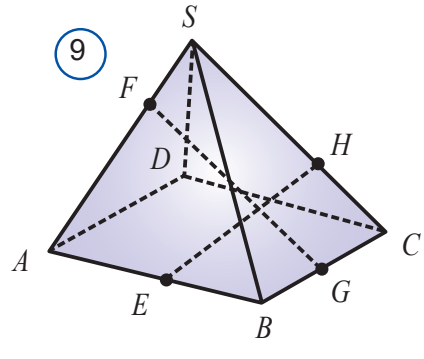
b)



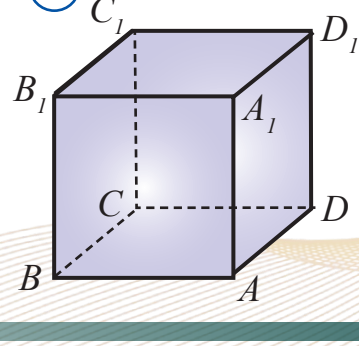
8



9



10

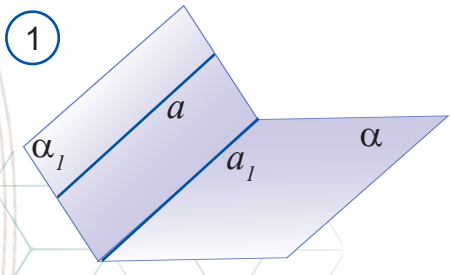


13 ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Если прямая и плоскость не пересекаются, *прямая и плоскость* называются *параллельными*. Параллель плоскости с прямой определяется по следующему признаку.

Теорема 3.5. Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-либо прямой плоскости, то она параллельна этой плоскости.

1



Доказательство. Пусть α – плоскость, a – прямая, не лежащая на ней, и пусть a_1 – прямая, лежащая в плоскости и параллельная a.

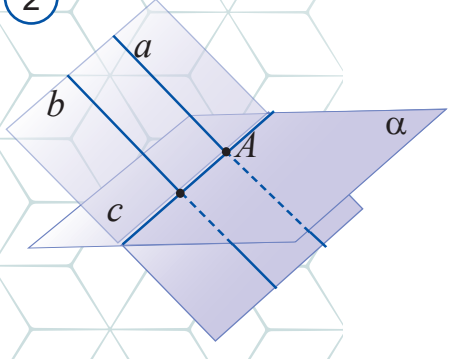
Проведём плоскость α_1 через прямые a и a_1 *(рис. 1)*. Ясно, что плоскости α и α_1 пересекаются по прямой a_1.

Если бы прямая a пересекала плоскость α, то точка пересечения принадлежала бы прямой a_1. Но это невозможно, так как прямые a и a_1 параллельны друг другу. Таким образом, прямая a не может пересекать плоскость α.

Итак, прямая a параллельна плоскости α.

Пример. Докажите, что если плоскость пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

2



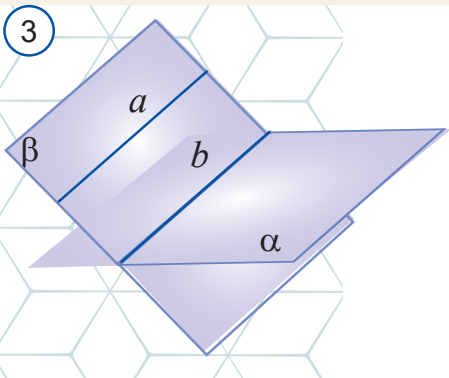
Доказательство. Пусть a и b – две параллельные прямые, и пусть α – плоскость, пересекающая прямую a в точке A *(рис. 2)*.

Проведём плоскость через прямые a и b. Она пересекает плоскость α по прямой линии c. Прямая c пересекает прямую a в точке A.

Следовательно, параллельная ей b также пересекает прямую. Так как прямая c лежит в плоскости α, то плоскость α также пересекает прямую b.

Теорема 3.6. Если одна плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, то прямая пересечения этих плоскостей также параллельна данной прямой.

3



Доказательство. Предположим, что прямая a параллельна плоскости α и лежит в плоскости β. Пусть прямая b является пересечением плоскостей α и β *(рис. 3)*. Тогда прямые a и b лежат в плоскости β и не пересекаются. В противном случае прямая a пересекала бы плоскость β.

Итак, прямые a и b параллельны друг другу.

Вопросы и упражнения по теме

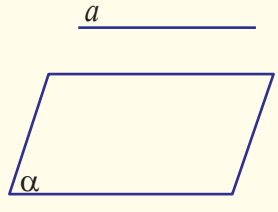
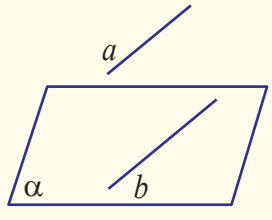
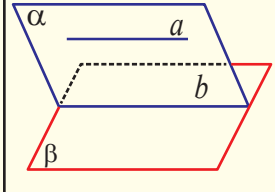
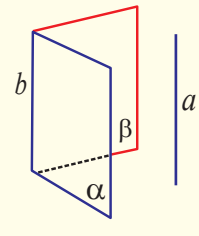
1. *Как могут быть расположены в пространстве прямая и плоскость?*
2. *Когда прямая и плоскость параллельны?*
3. *Укажите признаки параллельности прямой плоскости.*
4. *Какие свойства расположения прямых и плоскостей в пространстве вы знаете?*

Практические упражнения

13.1. В таблице содержится основная информация по 13-й теме. Внимательно изучите её.

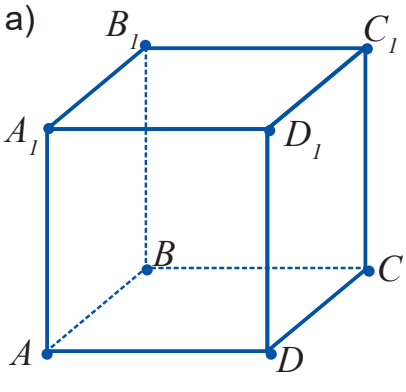
Прямая a и плоскость α	имеют много общих точек.	прямая лежит в плоскости: $a \subset \alpha$.
	имеют одну общую точку.	прямая пересекает плоскость: $a \otimes \alpha$.
	не имеют общих точек.	прямая параллельна плоскости: $a \parallel \alpha$.

Параллельность прямых и плоскостей

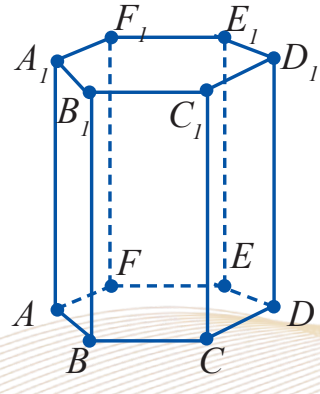
Описание	Обозначения	Свойства	
			
Если прямая a не имеет общих точек с плоскостью α, то *прямая и плоскость* называются *параллельными* и обозначаются через $a \parallel \alpha$.	Если прямая a не лежит в плоскости α и $a \parallel b$, $b \subset \alpha$, тогда $a \parallel \alpha$.	Если прямая b – *линия пересечения плоскостей* α и β, $a \subset \alpha$ и $a \parallel \beta$, тогда $b \parallel a$.	Если прямая b – *линия пересечения плоскостей* α и β, $a \parallel \alpha$ и $a \parallel \beta$, тогда $a \parallel b$.

13.2. По рисунку определите параллельные рёбра и стороны: а) куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$; б) правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ *(рис. 4)*.

4 a)



b)



5



13.3. Определите, какие части комбайна на рис. 5 параллельны поверхности земли (плоскости).

13.4. Определите, к какой стороне деревянной доски можно провести параллельную прямую линию с помощью столярной линейки (*рис. 6*).

13.5. Прочитайте следующие предложения. Поставьте «+», если предложение верно, и «–», если оно неверно.

1	Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна прямой в этой плоскости, то эта прямая параллельна и самой плоскости.	
2	Прямые, параллельные одной плоскости, параллельны друг другу.	
3	Прямая, параллельная плоскости, параллельна и любой прямой, лежащей в этой плоскости.	
4	Если одна плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, то линия пересечения этих плоскостей также параллельна данной прямой.	
5	Если прямая и плоскость не пересекаются, то говорят, что прямая и плоскость параллельны.	
6	Прямые линии с углом 90° называются перпендикулярными прямыми.	
7	Угол между скрещивающимися прямыми – это угол между пересекающимися прямыми, параллельными этим прямым	

6



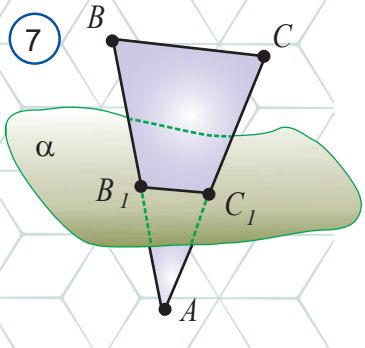
13.6. Точки A и C лежат в плоскости α. Точки B и D лежат в плоскости β. Какие из прямых AC, CD, BD, AB, BC и AD пересекают плоскость β?

13.7. Треугольник ABC пересекает плоскость α в точках B_1 и C_1 (*рис. 7*). Найдите длину отрезка B_1C_1, если $AB_1 : BB_1 = 2 : 3$, $BC = 15$ *см*, $BC \parallel B_1C_1$.

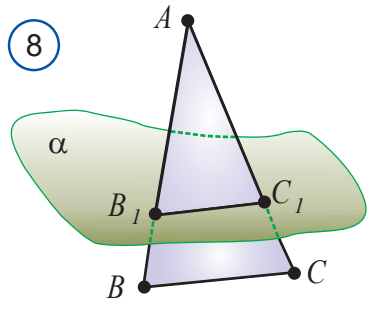
13.8. Плоскость α пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках B_1 и C_1 (*рис. 8*). Найдите длину отрезка BC, если $AB_1 : BB_1 = 3 : 1$, $B_1C_1 = 12$ *см*, $BC \parallel \alpha$.

13.9. Плоскость α пересекает трапецию $ABCD$ параллельно её основанию AD и в серединах M и N её сторон (*рис. 9*). Если $AD = 17$ *см*, $BC = 9$ *см*, найдите длину отрезка MN.

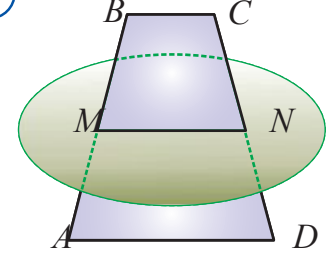
7



8



9



13.10. Сколько параллельных прямых можно провести к плоскости из точки, не лежащей на ней?

13.11. Прямая параллельна плоскости α. Найдите правильные утверждения.

А) прямая a параллельна только одной прямой плоскости α.

Б) прямая a пересекает всех прямые, кроме одной прямой плоскости α.

В) На плоскости α имеется множество прямых, параллельных и пересекающих прямую a.

Г) В плоскости α имеется только одна прямая, параллельная прямой a и проходящая через произвольную точку этой плоскости.

13.12. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Точки M, N, K, Z являются серединами отрезков AD, BD, BC, AC соответственно. Если $CD=AB$, докажите, что прямые MK и NZ перпендикулярны.

13.13. Стороны AB и BC параллелограмма $ABCD$ пересекают плоскость α. Докажите, что прямые AD и DC также пересекают плоскость α.

13.14. Треугольники ABC и ABD не лежат в одной плоскости. Докажите, что произвольная прямая, параллельная прямой CD, пересекает плоскости этих треугольников.

13.15. Докажите, что прямые, пересекающие две заданные прямые, лежат в одной плоскости.

13.16. Прямая CK, не лежащая в плоскости квадрата, проходит через вершину C квадрата $ABCD$:

а) докажите, что CK и AD – скрещивающиеся прямые;

б) найдите угол между прямыми CK и AD.

13.17. Предприниматель хочет изготовить лестницу, показанную на рисунке 10, из алюминия. Лестница состоит из двух частей, по 6 ступеней в каждой, скреплённых между собой.

1) определите, какие части лестницы параллельны, а какие пересекаются;

2) если известно, что ширина лестницы 0,5 m, высота в 3,5 раза больше ширины, сколько m алюминиевого профиля понадобится для изготовления одной лестницы?

3) Если цена 1 m алюминиевого профиля 20 000 сумов, то на какую сумму его потребуется для изготовления одной лестницы?

Последняя философская школа, Александрийская, дала миру известного ученого Евклида, жившего около 300 г. до н. э. Аксиоматическая структура геометрии была впервые представлена в тринадцатой книге работы Евклида «Начала». На протяжении почти двух тысяч лет эта работа остаётся основой для изучения систематического курса геометрии. Согласно повествованиям, царь Птолемей спросил Евклида: «разве нельзя найти более короткий и простой способ изучения геометрии, чем «Начала»?» . Евклид ответил ему: «в геометрии нет царского пути».

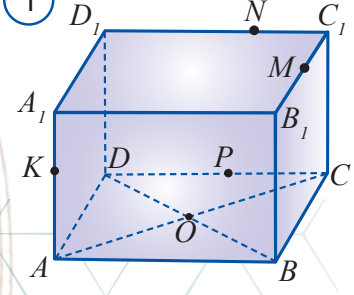
10



ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. На *рис. 1* изображён прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и середины его рёбер B_1C_1, C_1D_1, CD и AA_1 – точки M, N, P, K соответственно. Точка O является центром основания $ABCD$. Определите взаимное расположение приведённых в таблице прямых по рисунку, запишите соответствующий символ ($\otimes$ – пересечение, // – параллельность и $\div$ – скрещивание) в соответствующей ячейке таблицы.

1



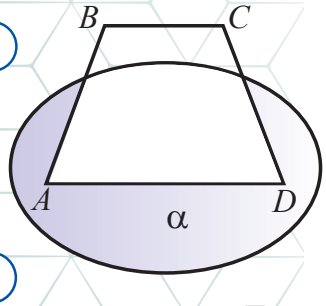
Прямые линии	MN	NP	C_1O	NO
AA_1				
BC_1				
BD				
AC				

2. Точки A, B, C, D лежат в одной плоскости. А как насчёт прямых AB и CD?

А) они параллельны; Б) они пересекаются;

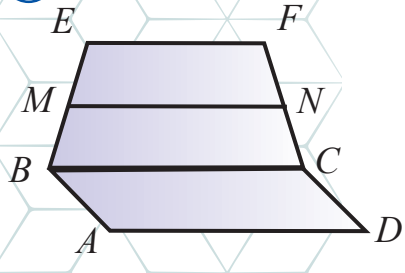
В) они скрещиваются.

2



3. Через сторону AD прямоугольника $ABCD$ проведена плоскость *(рис. 2)*. Если $\angle BCA = \angle CAD$, докажите, что сторона BC параллельна плоскости α.

3



4. Квадрат $ABCD$ и трапеция $BEFC$ *(рис. 3)* не лежат в одной плоскости. Точки M и N являются серединами сечений BE и FC соответственно. 1) Докажите, что MN параллелен AD. 2) Если $AD = 10\ cm$, $EF = 6\ cm$, найдите MN.

5. Точка A_1 на стороне AD параллелограмма $ABCD$ выбрана так, что $DA_1 = 4\ cm$. Плоскость, параллельная диагонали AC, проходит через точку A_1 и пересекает сторону CD в точке C_1.

1) Докажите, что треугольники C_1DA_1 и ABC подобны.

2) Если $BC = 10\ cm$, $A_1C_1 = 6\ cm$, найдите AC.

6. Плоскость α пересекает стороны угла BAC в точках A_1 и B_1, а параллельная плоскость β пересекает по точкам A_2 и B_2. Если $A_1B_1 = 18$, $AA_1 = 24$, $AA_2 = \frac{1}{2}A_1A_2$, найдите A_2B_2 и AA_2.

7. Прямая FA проходит через концы параллелограмма $ABCD$ и не лежит в плоскости параллелограмма.

1) Докажите, что FA и CD – скрещивающиеся.

2) Если угол FAB равен 30°, найдите угол между прямыми FA и CD.

8. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Постройте сечение, образованное разрезанием куба плоскостью, проходящей через прямые AD_1 и BC. Найдите площадь сечения.

9. Боковое ребро правильной прямоугольной пирамиды равно 8 cm и образует с плоскостью основания угол 30°. Найдите высоту и площадь поверхности пирамиды.

10. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Если расстояние между серединами AB и BC равно 6, а $AC = 16$, $BD = 20$, найдите угол между прямыми AC и BD.

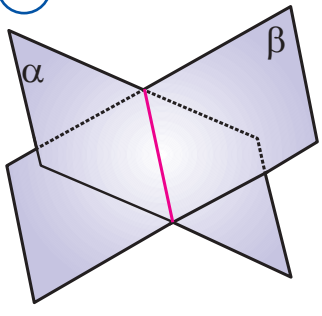
14 ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Две плоскости могут иметь или не иметь общую точку. В первом случае, согласно аксиоме S_3, эти плоскости также имеют общую прямую, т. е. пересекаются по прямой *(рис. 1)*. Во втором случае плоскости не пересекаются *(рис. 2)*.

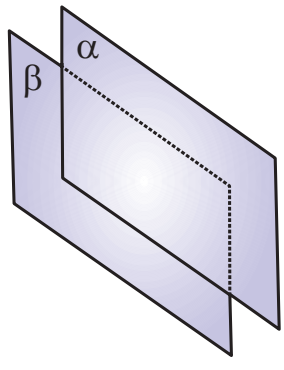
Непересекающиеся плоскости называются *параллельными плоскостями*. Пол и потолок комнаты, противоположные стены могут дать представление о параллельных плоскостях *(рис. 3)*.

Параллельность двух плоскостей определяется следующим признаком.

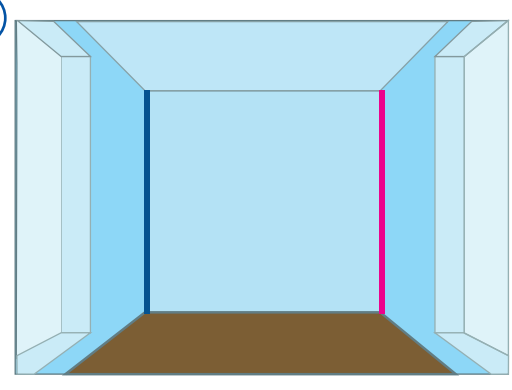
1



2



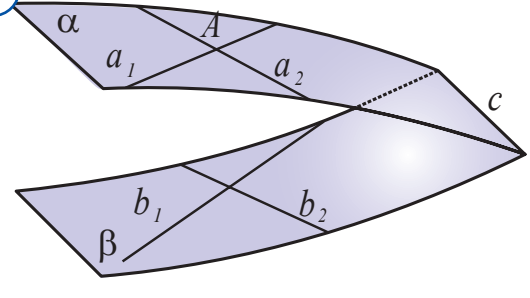
3



Теорема 3.7. Если две пересекающиеся прямые в одной плоскости соответственно параллельны двум прямым в другой плоскости, то и эти плоскости параллельны.

Доказательство. Пусть заданы плоскости α и β, a и b – прямые, лежащие в плоскости α и пересекающиеся в точке A, а a_1 и b_1 лежат в плоскости β и параллельны прямым a и b соответственно *(рис. 4)*.

4

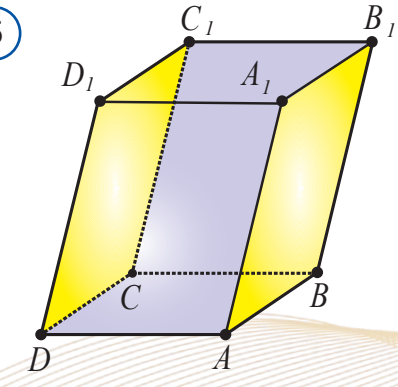


Предположим, что плоскости α и β не параллельны друг другу, то есть пересекаются по некоторой прямой. Тогда, согласно теореме 3.6, прямые a_1 и a_2 параллельны прямым b_1 и b_2 соответственно, а также параллельны плоскости β. Поэтому они не могут пересекать прямую c, лежащую в этой плоскости.

Таким образом, две прямые a_1 и a_2 проходят параллельно прямой c через точку A, лежащую в плоскости α. По аксиоме параллелизма такого быть не может. Противоречие показывает, что наша гипотеза неверна.

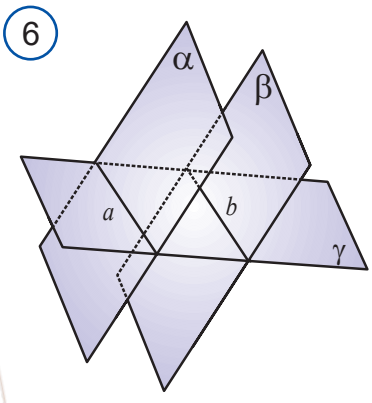
Докажите самостоятельно, используя эту теорему, что стороны параллелепипеда *(рис. 5)* параллельны.

5



Теорема 3.8. *Прямые пересечения двух параллельных плоскостей с третьей плоскостью параллельны друг другу.*

6

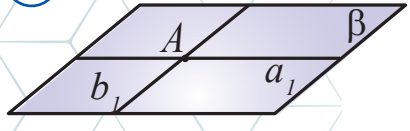


Доказательство. Предположим, что параллельные плоскости α и β пересекают плоскость γ по прямым a и b соответственно *(рис. 6)*. Докажем, что прямые a и b параллельны.

Предположим, что прямые a и b пересекаются в точке Q. Тогда точка Q лежит в плоскости α, так как прямая a лежит в плоскости α. Кроме того, точка Q лежит в плоскости β, поскольку прямая b лежит в плоскости β. В результате плоскости α и β имеют общую точку Q. Это невозможно. Противоречие показывает, что наша гипотеза неверна.

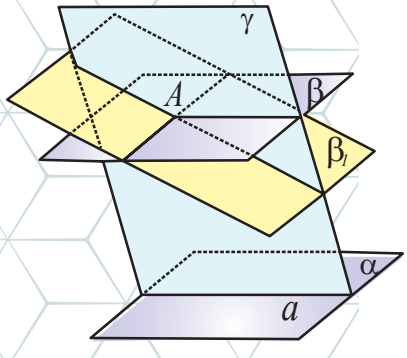
Теорема 3.9. *Через данную точку вне данной плоскости проходит единственная плоскость, параллельная данной.*

7





8



Доказательство. Проведём две прямые – a, b, пересекающиеся в заданной плоскости α. Из заданной точки A проводим параллельные им прямые a_1, b_1 *(рис. 7)*.

Проведём плоскость β через прямые a_1, b_1. Согласно теореме 3.7, эта плоскость параллельна плоскости α и является искомой плоскостью.

Теперь покажем, что эта плоскость единственна. Предположим, что имеется ещё одна плоскость β_1, параллельная плоскости α (рис. 8). Проведём плоскость γ, проходящую через точку A и прямую a. Эта плоскость пересекает плоскость β по прямой a_1 и плоскость β_1 по прямой a_2. Прямые a_1, a_2 параллельны прямой a, согласно теореме 3.6. Но этого не может быть, потому что из точки, не лежащей на плоскости, можно провести только одну параллельную прямую. Противоречие показывает, что наша гипотеза неверна.

Теорема 3.10. *Две плоскости, параллельные третьей плоскости, параллельны друг другу.*

Докажите эту теорему самостоятельно.

Теорема 3.11. *Участки параллельных прямых между параллельными плоскостями равны.*

Доказательство. Предположим, что плоскости α и β делят отрезки AC и BD прямых k и l *(рис. 9)*. Покажем, что эти отрезки равны.

Плоскость γ, проходящая через прямые k и l, пересекает параллельные плоскости по прямым AC и BD. В результате у нас получится прямоугольник $ABCD$ с параллельными противоположными сторонами, то есть параллелограмм.

Противоположные стороны параллелограмма равны между собой. В частности, $AB = CD$.

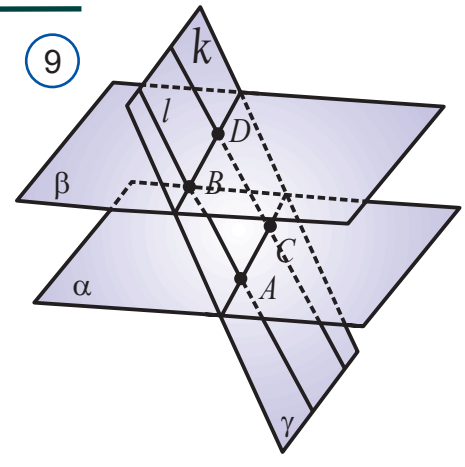
Теорема 3.12. *Отрезки произвольных прямых, заключённые между тремя параллельными плоскостями, пропорциональны.*

Докажите эту теорему самостоятельно.

Вопросы и упражнения по теме

1. *Как могут быть расположены плоскости в пространстве?*
2. *Какие плоскости называются параллельными?*
3. *Каковы признаки параллельности плоскостей?*
4. *Какие свойства расположения плоскостей в пространстве вы знаете?*
5. *Параллельны ли стороны параллелепипеда? Обоснуйте.*

9

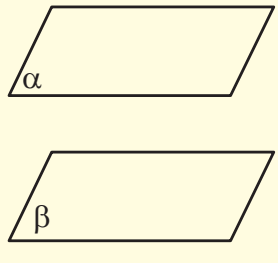
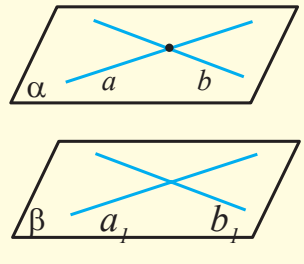
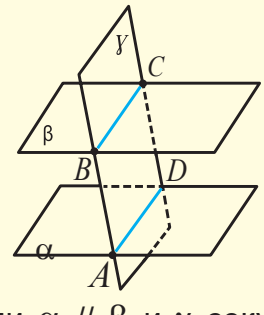


Практические упражнения

14.1. В таблице содержится основная информация 14-й темы. Внимательно изучите её и объясните.

плоскости α и β	Имеют общую точку.	Пересекаются	$\alpha \otimes \beta$
	Не имеют общих точек.	Параллельны	$\alpha \parallel \beta$

Параллельность плоскостей

Описание	Обозначение	Свойства
 Непересекающиеся плоскости α и β называются *параллельными плоскостями* и обозначаются как $a \parallel b$.	 Если $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a \otimes b$, $a_1 \subset \beta$, $b_1 \subset \beta$, $a_1 \otimes b_1$, $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$, тогда $\alpha \parallel \beta$.	 Если $\alpha \parallel \beta$ и γ секущая плоскость, $\alpha \cap \gamma = AD$ и $\beta \cap \gamma = BC$, будет $AD \parallel BC$

14.2. Определите, какие параллельные плоскости представлены на рисунке 10.

14.3. Определите параллельные рёбра: 1) параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$; 2) призмы $ABCA_1B_1C_1$.

14.4. Как расположены в пространстве плоскости α и β, не имеющие общей точки?

10 a)



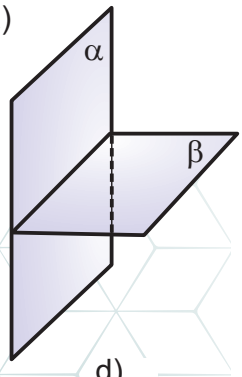
b)



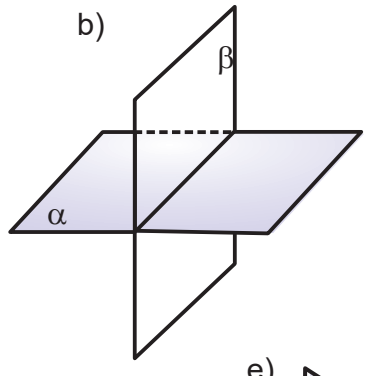
c)



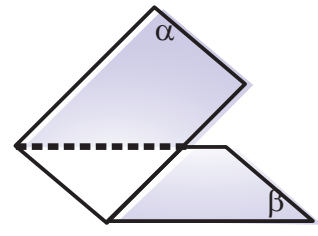
11 a)



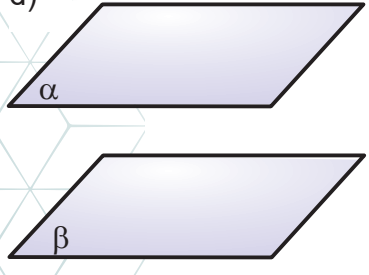
b)



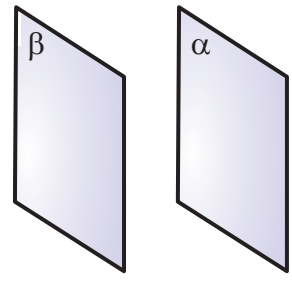
c)



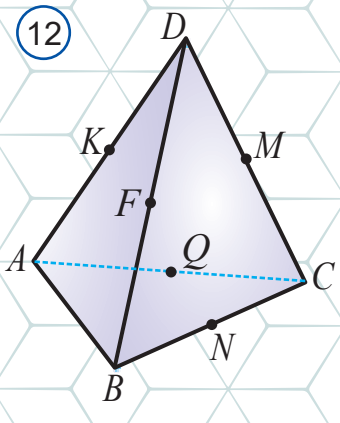
d)



e)



12



14.5. Плоскости α и β параллельны. Прямые a и b лежат в плоскости α, а прямые c и d – в плоскости β. Какие из следующих утверждений верны?

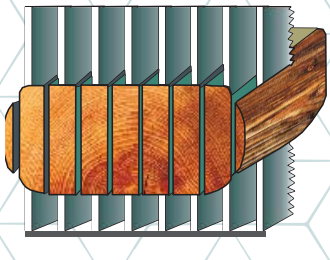
A) $\alpha \parallel b$ B) $c \parallel b$ C) $b \parallel \beta$ D) $\beta \parallel a$

E) $c \parallel a$ F) $d \parallel b$ G) $a \parallel \alpha$ H) $d \parallel \alpha$

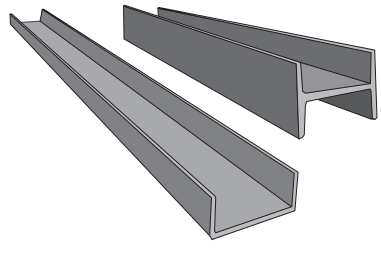
14.6. Покажите три изображения двух пересекающихся плоскостей *(рис. 11)*.

14.7. Если точки K, F, M, N, Q являются центрами соответствующих рёбер тетраэдра $ABCD$, изображённого на рис. 12, определите плоскость: а) проходящую через точку K и параллельную плоскости ABC; б) проходящую через прямую BD и параллельную плоскости MNQ.

13



14

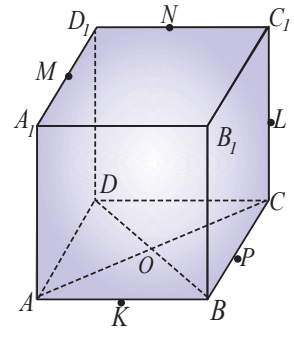


14.8. Найдите параллельные плоскости на рисунках 13 и 14.

14.9. На *рис. 15* показан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и середины некоторых его рёбер – точки M, N, P, K и L. Точка O является центром основания $ABCD$. Определяя взаимное расположение представленных в таблице плоскостей по рисунку, запишите соответствующий символ ($\otimes$ – пересечение, // – параллельность) в соответствующую ячейку таблицы.

Плоскости	ADC	PLN	MNP	A_1C_1C
$A_1B_1C_1$				
MNK				
MKP				
A_1DC_1				

15



14.10. Плоскости α и β параллельны. Через точку, не принадлежащую ни одной из них, проведена плоскость γ. Укажите правильные выражения.

а) плоскость γ – единственная плоскость, параллельная плоскости α;

б) плоскость γ – единственная плоскость, пересекающая плоскость β;

в) плоскость γ – единственная плоскость, параллельная плоскости β;

г) плоскость γ – единственная плоскость, пересекающая плоскость α;

д) плоскость γ – единственная плоскость, параллельная как плоскости α, так и плоскости β.

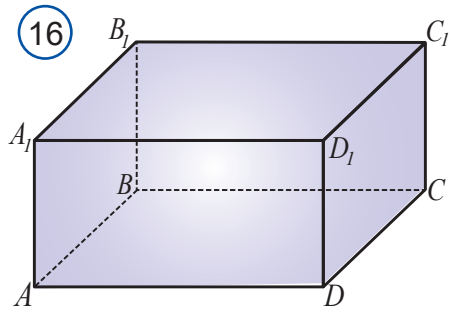
14.11. На рисунке 16 изображён прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Определите взаимное расположение.

а) $A_1B_1C_1D_1$ и $B_1A_1D_1C_1$; б) ADD_1A_1 и $ABCD$;

в) ABB_1A_1 и C_1D_1DC; г) $BADC$ и ABB_1A_1;

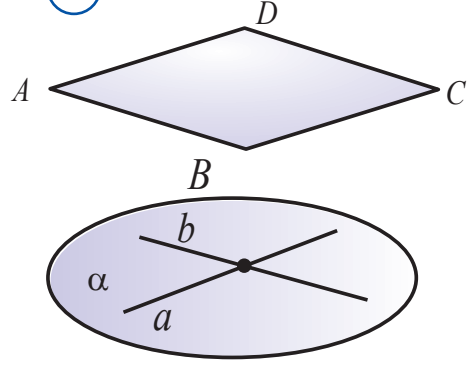
д) CC_1B_1B и ADD_1A_1.

16



14.12. Отрезки AB, BC – это стороны параллелограмма $ABCD$, параллельные прямым a и b соответственно *(рис. 17)*. Прямые a и b пересекаются и принадлежат плоскости α. Определите взаимное расположение плоскостей $ABCD$ и α в пространстве.

17

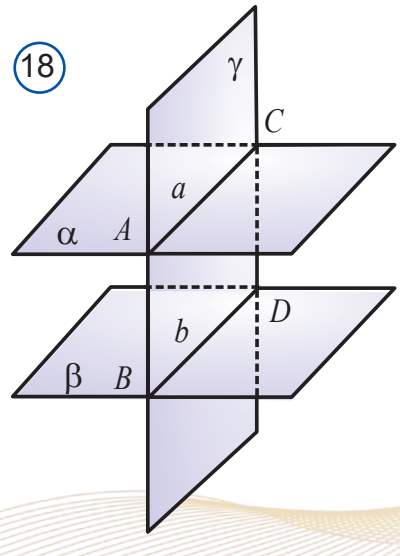


14.13. Даны скрещивающиеся прямые a и b. Сколько плоскостей, проходящих через прямую a и параллельных плоскости β, можно провести?

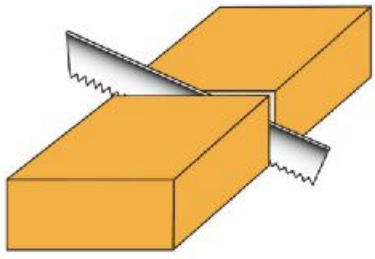
14.14. Линия пересечения двух плоскостей α и β параллельна третьей плоскости – γ. Определите взаимное расположение плоскостей α и β в пространстве.

14.15. Плоскость γ, проходящая через параллельные прямые AB и CD, пересекает параллельные плоскости α и β по прямым AC и BD соответственно.

18



19



Если BD = 15 cm, найдите длину отрезка AC *(рис. 18)*.

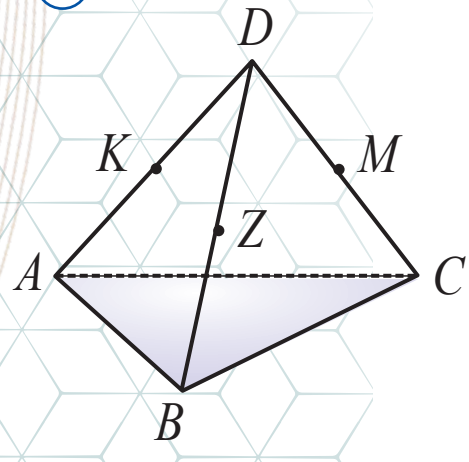
14.16. Все стороны куска деревянной доски прямоугольные *(рис. 19)*. Докажите, что каким бы способом вы ни распилили доску, разрез всегда будет параллелограммом.

14.17. Докажите, что через любые две скрещивающиеся прямые можно провести единственную пару параллельных плоскостей.

14.18. Плоскости α и β параллельны. Докажите, что произвольная прямая, лежащая в плоскости α, параллельна плоскости β.

14.19. Точка O является общим центром отрезков AA_1, BB_1, CC_1, не лежащих в одной плоскости. Докажите, что плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны.

20



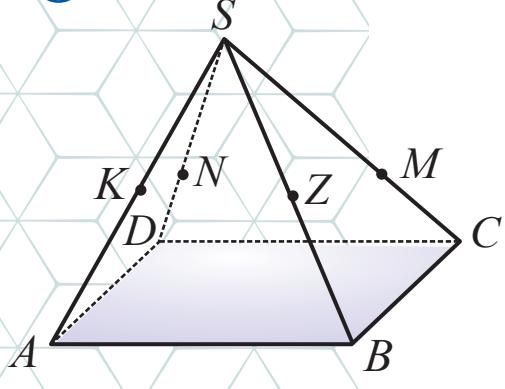
14.20. Даны параллелограмм $ABCD$ и плоскость, не пересекающая его. От концов A, B, C, D параллелограмма проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Если AA_1 = 4 m, BB_1 = 3 m и CC_1 = 1 m, найдите длину участка DD_1.

14.21. Даны две параллельные плоскости. Из точек A и B одной плоскости проведены параллельные прямые, пересекающие вторую плоскость в точках A_1 и B_1. Если $AB = a$, найдите длину отрезка A_1B_1.

14.22. Плоскости α и β параллельны. Из точек M и N плоскости α проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость β в точках K и L. Докажите, что $MNLK$ – параллелограмм. Если ML=14 cm, NK = 8 cm и $MK : MN$ = 9 : 7, найдите периметр прямоугольника $MNLK$.

14.23. Лучи OF и OP пересекают параллельные плоскости α и β в точках F_1, P_1, F_2, P_2 соответственно. Если F_1P_1 = 3 cm, F_2P_2 = 5 cm и P_1P_2= 4 cm, найдите длину отрезка OP_1.

21



14.24. Лучи OA и OB пересекают параллельные плоскости α и β в точках A_1, B_1, A_2, B_2 соответственно. Если OA_1 = 16 cm, A_1A_2 = 24 cm и A_2B_2= 50 cm, найдите длину отрезка A_1B_1.

14.25. Точка D не принадлежит плоскости треугольника ABC *(рис. 20)*. Точки K, M, Z являются серединами отрезков DA, DB и DC соответственно. Определите взаимное положение плоскостей ABC и KZM.

14.26. Точка S не принадлежит плоскости параллелограмма $ABCD$ *(рис. 21)*. Точки K, Z, M, N принадлежат отрезкам SA, SB, SC и SD соответственно. Если $SK = AK$, $SZ = BZ$, $CM : MC$ = 2 : 1, $SN : ND$ = 2 : 1, определите взаимное расположение плоскостей $ABCD$ и $KZMN$.

15 ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

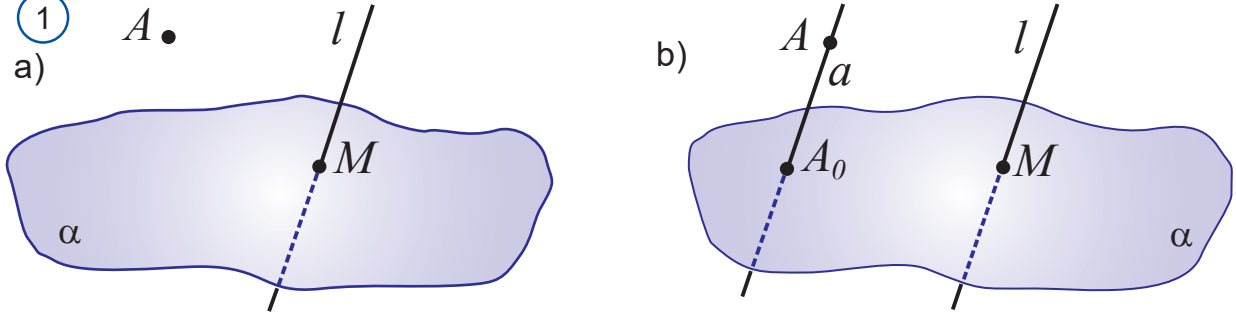
Фигуры в пространстве по-разному изображаются на плоскости. Мы познакомимся с ними ниже.

Говорят, что *форма в пространстве проецируется параллельно плоскости* таким образом, что каждая точка формы перемещается на плоскость по прямым линиям, параллельным заданному направлению проекции.

Параллельную проекцию можно сравнить с отбрасыванием тени объекта на стену или пол при помощи лучей света.

Таким образом, при параллельной проекции берутся фигура и плоскость, известная как *плоскость проекции*, и выбирается *направление проекции*, то есть прямая линия. Разумеется, эта прямая должна пересекаться с плоскостью проекции.

1



Допустим, даны произвольная плоскость α, прямая проекции l и точка A, не лежащая ни на плоскости, ни на прямой *(рис. 1а)*.

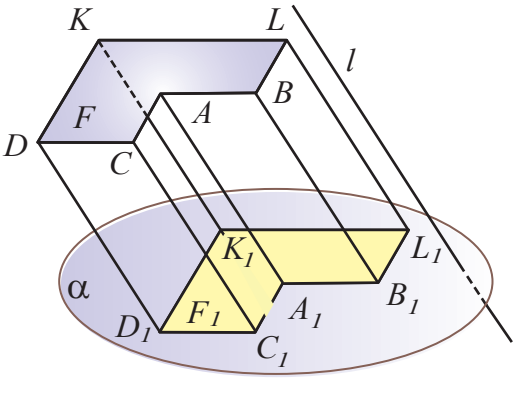
Проведём прямую, параллельную прямой l, из точки A в плоскость α. Пусть эта прямая пересекает плоскость α в точке A_0 *(рис. 1б)*.

Найденная точка A_0 называется проекцией точки A, параллельной плоскости α. Таким образом, в параллельной проекции точка проходит через точку.

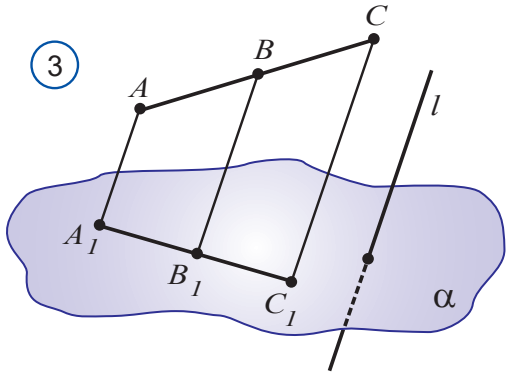
Предположим, что необходимо спроецировать фигуру F на плоскость α в направлении l. Для этого берём произвольную точку фигуры F, проводим от неё прямую, параллельную l, и отмечаем точку её пересечения с плоскостью A. Такие точки образуют некоторую форму F на плоскости α. Именно эта фигура F_1 является проекцией фигуры F на плоскости A. На рисунке 2 показана проекция фигуры F_1 на плоскость α – фигура F_1.

Также приведём следующие свойства параллельной проекции. Попробуйте доказать их самостоятельно.

2



3



В параллельной проекции отрезок переходит в отрезок, прямая становится прямой.

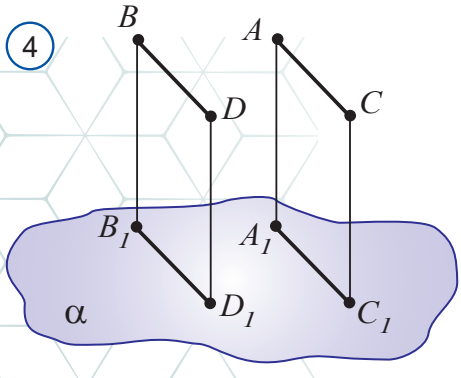
Проекции параллельных прямых параллельны или совпадают.

Разумеется, эти свойства справедливы для пересекающихся отрезков и прямых линий, не параллельных направлению проекции. Теперь докажем следующие свойства.

Свойство 1. *В параллельной проекции линейные отрезки фигур также переходят в аналогичные отрезки.*

Действительно, все прямые, проецирующие отрезки AC, лежат в плоскости, пересекающей плоскость α по прямой A_1C_1 *(рис. 3)*. Произвольная точка B отрезка AC переходит в точку B_1 отрезка A_1C_1.

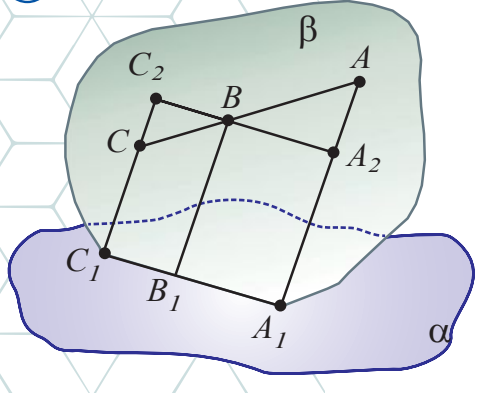
4



Свойство 2. *В параллельной проекции параллельные участки фигур также становятся параллельными участками.*

Действительно, пусть AC и BD – параллельные отрезки фигуры *(рис. 4)*. Их проекции, отрезки A_1C_1 и B_1D_1, также параллельны, так как образуются при пересечении двух параллельных плоскостей с плоскостью α.

5



Свойство 3. *Отношение длин участков, лежащих на одной прямой или параллельных прямых, равно отношению длин их параллельных проекций.*

Действительно, *на рис. 5* прямые AC и A_1C_1 лежат в плоскости β. Проведём прямую A_2C_2, параллельную A_1C_1, из точки B отрезка AC. Полученные треугольники BAA_2 и BCC_2 подобны. Из подобия треугольников и $A_1B_1=A_2B$ и $B_1C_1=BC_2$, имеем следующее соотношение: $AB:BC=A_1B_1:B_1C_1$.

Таким образом, при параллельной проекции сохраняется соотношение длин отрезков, лежащих на прямой или параллельных прямых.

В частности, середина отрезка переходит в середину проекции.

6

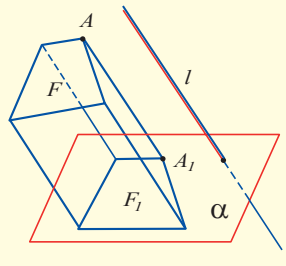


Вопросы и упражнения по теме

1. *Как отразить фигуру в пространстве в виде проекции, параллельной плоскости?*
2. *Как найти проекцию точки на плоскость?*
3. *Как создаются персонажи «теневого театра» на рис. 6?*
4. *Что такое параллельная плоскость проекции и направление проекции?*
5. *Какие свойства параллельной проекции вам известны?*
6. *Где можно использовать параллельную проекцию?*

Практические упражнения

15.1. В таблице содержится основная информация 15-й темы. Внимательно изучите её и объясните.

<table>
<tr><th colspan="3">Параллельная проекция</th></tr>
<tr><th>Описание</th><th colspan="2">Свойства фигур в параллельной проекции</th></tr>
<tr><td rowspan="2">

F – фигура,
α – плоскость проекции,
l – направление проекции,
F_1 – F проекция фигуры.</td><td>Сохраняются</td><td>Не сохраняются</td></tr>
<tr><td>1) принадлежность фигур к классам (точка к точке, прямая к прямой, отрезок к отрезку, треугольник к треугольнику);
2) принадлежность точек прямой линии;
3) расположение точек на прямой;
4) параллельность прямых;
5) равенство (или пропорциональность) отрезков, лежащих на одной или параллельных прямых.</td><td>1) длина отрезка;
2) величина угла;
3) перпендикулярность прямых;
4) равенство углов (пропорциональность);
5) равенство (пропорциональность) отрезков, лежащих на пересекающихся прямых.</td></tr>
</table>

15.2. Может ли проекция отрезка быть в параллельной проекции: а) отрезком; б) точкой; в) двумя точками; г) лучом; д) прямой?

15.3. Может ли проекция квадрата быть в параллельной проекции: а) квадратом; б) параллелограммом; в) ромбом; г) правильным треугольником; д) трапецией; е) отрезком?

15.4. Докажите, что треугольник, лежащий на одной из параллельных плоскостей, не изменит своей стороны, если его спроецировать параллельно на вторую плоскость.

15.5. Может ли параллельная проекция параллелограмма быть трапецией? Обоснуйте ответ.

15.6. Является ли параллельная проекция прямоугольного треугольника прямоугольным треугольником?

15.7. Может ли параллельная проекция прямоугольного треугольника быть прямоугольным треугольником?

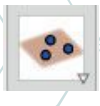
15.8. Параллельная проекция треугольника ABC представляет собой треугольник $A_1B_1C_1$. Проходит ли в этой проекции: а) медиана; б) высота; в) биссектриса треугольника ABC через соответствующие: а) медиану; б) высоту; в) биссектрису треугольника $A_1B_1C_1$?

15.9. Параллельная проекция треугольника ABC представляет собой треугольник $A_1B_1C_1$. Если $\angle A = 30^\circ$, $BC = 20\ cm$, будет ли $\angle A_1 = 30^\circ$, $B_1C_1 = 20\ cm$?

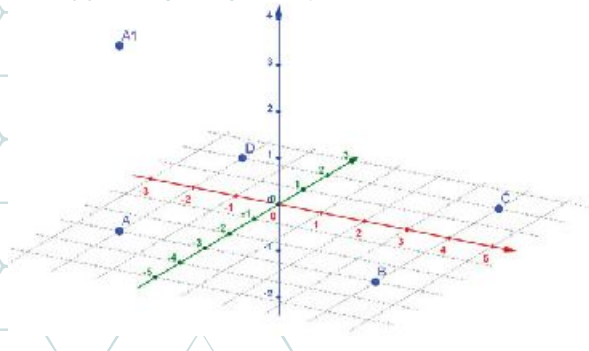
15.10. Параллельная проекция отрезка AB состоит из отрезка A_1B_1. C_1 – проекция точки C. $AB = 48\ cm$, $A_1B_1 = 36\ cm$. Если длина отрезка AC равна: а) 24 cm; б) 12 cm; в) 8 cm; г) 32 cm; д) 36 cm, найдите длину отрезка A_1C_1.

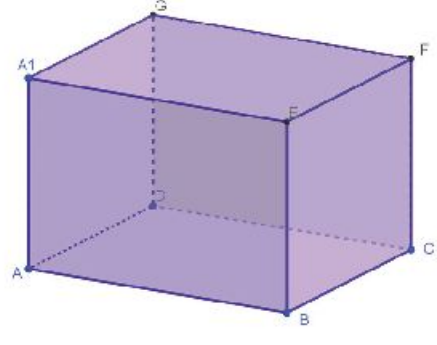
Используя GeoGebra

Создание прямоугольного параллелепипеда с помощью 3D-калькулятора



Ввод – с помощью входной линии отмечаем 4 точки A, B, C, D на плоскости xOy и одну точку A_1 на плоскости xOz.







Призма – выберите инструмент «Призма» и последовательно кликайте по точкам A, B, C, D а затем по точке A_1, в результате чего на изображении справа получится прямоугольный параллелепипед.

Задания для самостоятельного выполнения

1. Определите параллельные стороны построенного выше прямоугольного параллелепипеда и проверьте их параллельность с помощью 3D-калькулятора GeoGebra.

2. Начертите куб. Определите его параллельные стороны с помощью 3D-калькулятора GeoGebra.

3. Постройте куб. Определите угол между пересекающимися диагоналями соседних его сторон с помощью 3D-калькулятора GeoGebra.

16 ПРАКТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ НА ПОВТОРЕНИЕ ГЛАВЫ

16.1. Сколько общих точек может быть у: а) двух прямых; б) прямой и плоскости; в) двух плоскостей?

16.2. Могут ли иметь общую точку: а) две прямые; б) прямая и плоскость; в) две плоскости; г) три плоскости?

16.3. Четыре точки не лежат в одной плоскости. А) Могут ли три из них лежать на одной прямой? Б) Сколько плоскостей можно через них пропустить?

16.4. Прямые m и n пересекаются, а прямая d параллельна прямой n. Как можно расположить прямые m и d между собой?

16.5. Сколько плоскостей можно провести через точку C треугольника ABC параллельно стороне AB?

16.6. Параллелограммы $ABCD$ и $ABKZ$ лежат в разных плоскостях. Обозначьте параллельные прямые.

A) DA и KB B) CD и KZ C) BC и AZ

D) DA и ZA E) CB и KB

16.7. Точки A и C принадлежат плоскости α, точки B и D принадлежат плоскости β. Какая из прямых AC, CD, BD, AB, BC, AD пересекает плоскость β?

16.8. Сечения AB, AC, KB, KD пересекают плоскость α. Какая из прямых AK, AD, BD, KC, CD пересекает плоскость α?

16.9. Прямые AB, AC и AD не лежат в одной плоскости и пересекают плоскость α в точках B_1, C_1 и D_1. Какая фигура получится, если точки B_1, C_1 и D_1 соединить последовательно?

16.10. Через две вершины и середину отрезка MN, не лежащего в плоскости α, проведены параллельные прямые. Найдите длину отрезка MM_1, если эти прямые пересекают плоскость α в точках M_1, N_1 и K_1 соответственно, $KK_1 = 9$ cm, $NN_1 = 15$ cm.

16.11. Через точки P и Z плоскости α проведены параллельные отрезки $PK = 6$ cm и $ZM = 9$ cm. Прямая MK пересекает плоскость α в точке O. Найдите длину отрезка MO, если $MK = 6$ cm.

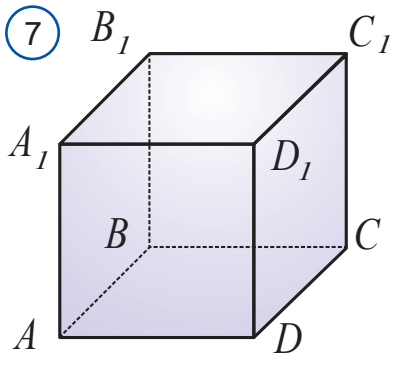
16.12. Можно ли образовать квадрат при параллельной проекции параллелограмма?

16.13. Дана параллельная проекция треугольника. Как строятся проекции медиан этих треугольников?

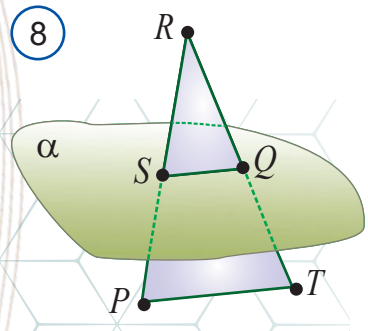
16.14. Треугольник MNZ и параллелограмм $MNPS$ (BC – основание) не лежат в одной плоскости. Точки Q и R – середины отрезков CB и DA, а M и N – середины отрезков DP и CZ. Докажите, что прямые MN и QR параллельны.

A1B1: AA1D1D;

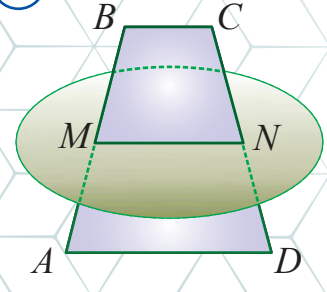
7



8



9



16.15. Какие из сторон куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *(рис. 7)* параллельны прямой A_1B_1 : AA_1D_1D; BB_1C_1C; $ABCD$; DD_1C_1C; $B_1C_1D_1A_1$; ADD_1A_1?

16.16. Дан треугольник PRT. Плоскость α, параллельная прямой PT, пересекает сторону PR в точке S, а сторону RT в точке Q *(рис. 8)*. Найдите сторону PT, если SR = 7 cm, SQ = 3 cm и SP= 35 cm.

16.17. Плоскость α параллельна основанию AD равносторонней трапеции $ABCD$ и пересекает стороны AB и CD в точках M и N *(рис. 9)*. AD = 20 cm, MN = 16 cm. Найдите периметр трапеции, если точка M – середина AB, а AB = 8 cm.

16.18. Через точки P и Z плоскости были сделаны разрезы PK = 6 cm и ZM = 9 cm. Прямая МК пересекает плоскость в точке O. Найдите расстояние MO, если MK = 6 cm.

16.19. Сторона AB прямоугольника $ABCD$ параллельна плоскости α, а сторона AD не параллельна этой плоскости. Определите взаимное расположение плоскостей $ABCD$ и α в пространстве.

16.20. Какая из следующих сторон прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллельна грани $ABCD$?

A) D_1A_1AD B) $D_1A_1B_1C_1$ C) ABB_1A_1 D) D_1C_1CD

16.21. Две диагонали ромба параллельны плоскости α. Определите пространственное положение ромбической плоскости и плоскости α.

16.22. В левой колонке таблицы перечислены некоторые сходные свойства геометрических фигур на плоскости, а в правой колонке – в пространстве. Визуализируйте их и посмотрите, чем они похожи, затем заполните пробелы. Какие ещё подобные свойства плоскости и пространства можно указать?

На плоскости	В пространстве
Если прямые имеют общую точку, то они пересекаются в этой точке.	Если плоскости имеют общую прямую, то они пересекаются на этой прямой.
Через точку на плоскости можно провести бесконечное количество прямых.	
	Через прямую, не лежащую в плоскости, можно провести одну и только одну плоскость, параллельную данной плоскости.
Прямые, параллельные одной прямой, параллельны друг другу.	

Задания на формирование практических компетенций

1. Как расположены оси колёс вагонов относительно друг друга *(рис. 1)*?

1



2. Как расположена ось колеса железнодорожных вагонов по отношению к рельсам *(рис. 1)*?

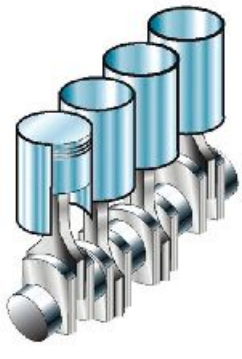
2



3. Приведите примеры параллельных и перпендикулярных прямых из окружности.

4. Почему ящики стола иногда открываются не плавно *(рис. 2)*?

3



5. Почему поршень насоса плавно перемещается внутри него *(рис. 3)*?

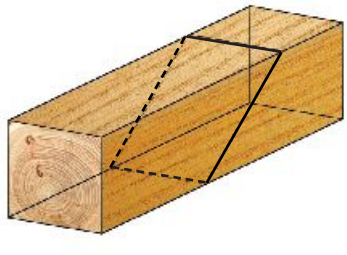
4



6. Как проверить параллельность ламелей, приклеенных к краю пола зала, с помощью швейной ленты или длинной палки *(рис. 4)*?

7. Все стороны деревянной доски прямоугольные. Докажите, что как бы вы ни распиливали её по поперечным рёбрам, все получившиеся сечения будут параллелограммами *(рис. 5)*.

5

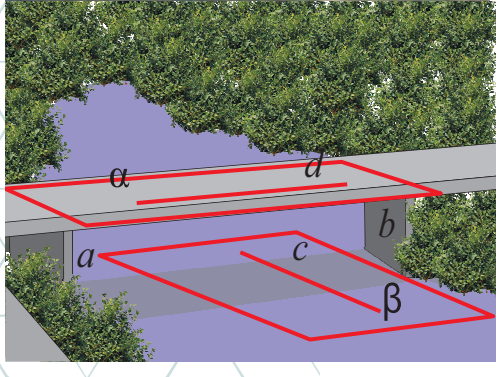


ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

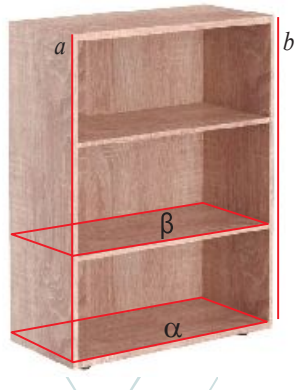
1. Прочтите следующие предложения. В зависимости от значения предложений определите, всегда ли они верны, иногда верны или никогда не верны, и поместите знак «+» в соответствующий столбец. Прокомментируйте свой ответ.

	Утверждение	Всегда	Иногда	Никогда
а	В пространстве две прямые не пересекаются.			
б	В пространстве две плоскости не пересекаются.			
в	В пространстве прямая и плоскость пересекаются.			
г	Прямые линии в пространстве будут скрещены.			
д	На плоскости прямые линии будут перекрещиваться.			
е	Прямые, пересекающие плоскость, также пересекаются.			
ж	Прямые, параллельные плоскости, пересекаются.			

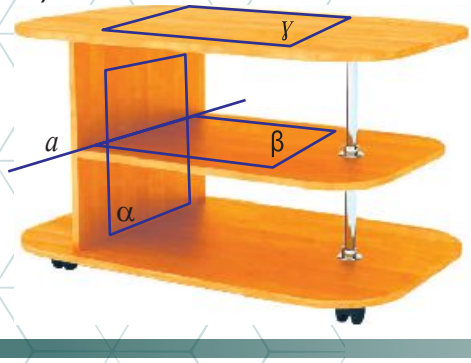
1 a)



b)



c)



2. На рисунке 1 некоторые объекты изображены как символы пространственных геометрических фигур. Какие пространственные геометрические фигуры вы видите? Определите и запишите, как они взаимодействуют друг с другом.

3. Как называются прямые, лежащие в одной плоскости и имеющие одну общую точку?

A) скрещивающиеся, B) пересекающиеся, C) параллельные.

4. Сколько общих точек могут иметь скрещивающиеся прямые?

A) 1 B) 0 C) 2

5. Как называются прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общей точки?

A) скрещивающиеся, B) пересекающиеся, C) параллельные.

6. Докажите, что по прямой можно провести две разные плоскости.

7. Даны четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько плоскостей можно провести через три из них?

8. Точки A, B, C лежат в каждой из двух различных плоскостей. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой.

9. Даны две плоскости, пересекающиеся по прямой a. Прямая b лежит на одной из них и пересекает другую. Докажите, что прямые a и b пересекаются.

10. Даны три различные попарно пересекаю-

щиеся плоскости. Докажите, что если две из прямых пересечения этих плоскостей пересекаются, то третья прямая проходит через точку их пересечения.

11. Докажите, что если в пространстве диагонали четырёхугольника пересекаются, то его вершины лежат в одной плоскости.

12. Через вершины A и C параллелограмма $ABCD$ проведены параллельные прямые A_1C и C_1C, не лежащие в плоскости параллелограмма. Докажите, что плоскости A_1AB и C_1CD параллельны.

13. Основания трапеции параллельны некоторой плоскости. Могут ли стороны трапеции быть параллельны этой плоскости? Обоснуйте ответ.

14. Известно, что проекции вершин A и B квадрата и точки пересечения его диагоналей O состоят из точек A_1, B_1 и O_1. Изобразите проекцию квадрата $ABCD$.

15. По рисунку 2 определите, как расположены заданная прямая и плоскость, и поставьте между ними соответствующие символы ($\otimes$ – пересечение, // – параллельность, $\div$ – скрещивание и $\subset$ –принадлежность).

Прямые / плоскости	AA_1	BC_1	CC_1	CB_1	AB_1
ADD_1					
AA_1B_1					
ABD					
AA_1D					
BCD					

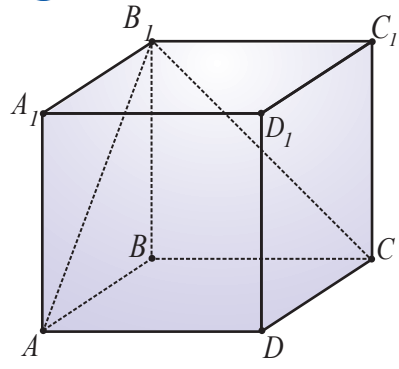
16. Основание AB трапеции $ABCD$ на рис. 3 лежит в плоскости α, а основание CD не лежит в плоскости α. Дополните предложения, выражающие взаимное расположение данных прямых и плоскости α:

а) поскольку прямая DB имеет общую точку с данной плоскостью, то она __ с плоскостью α;

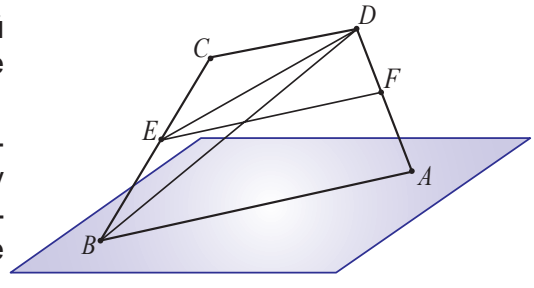
б) поскольку средняя линия трапеции EF параллельна ее основаниям, то она ___ плоскостью α.

17. Точки D и E на сторонах AB и AC треугольника ABC на рисунке 4 обозначены таким образом, что $DE = 5$ *см* и $AD : BD = 3 : 4$. Из точек B и C проведена плоскость, параллельная отрезку DE. Найдите длину отрезка BC.

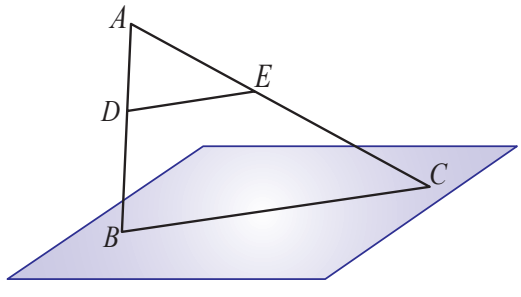
2



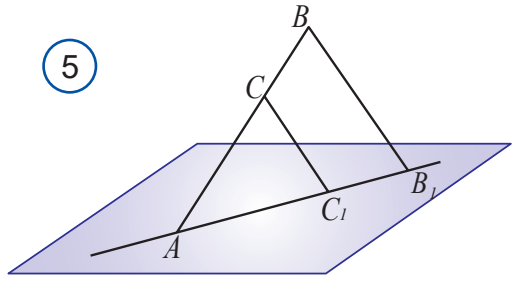
3



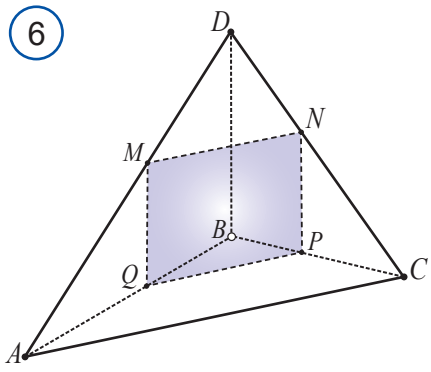
4



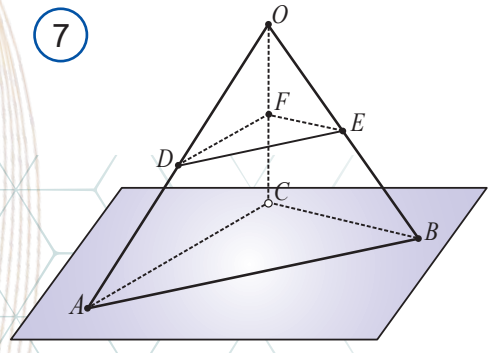
5



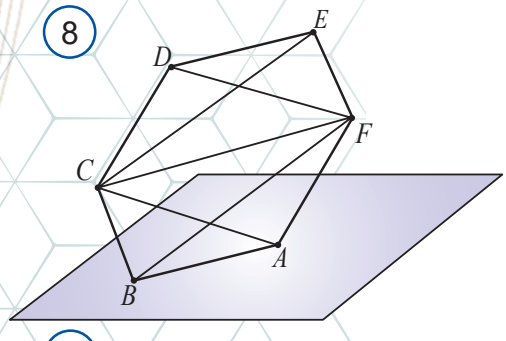
6



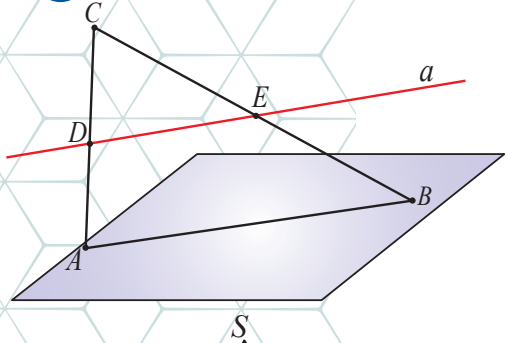
7



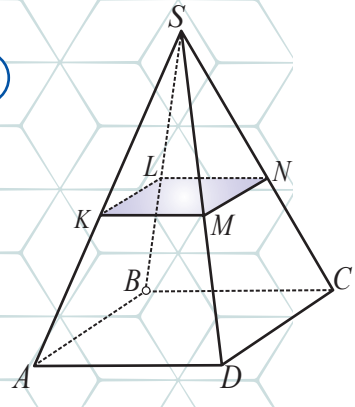
8



9



10



18. Точка C на рис. 5 принадлежит отрезку AB. Из точки A проведена плоскость, а из точек B и C проведены параллельные прямые. Эти прямые пересекают плоскость в точках B_1 и C_1 соответственно. Найдите длину отрезка CC_1, если $AC : BC = 3 : 2$ и $BB_1 = 9$.

19. Параллельные прямые a и b пересекают одну из двух параллельных плоскостей в точках A_1 и B_1 соответственно, а другую в точках A_2 и B_2:

а) докажите, что отрезок A_1B_1 параллелен A_2B_2;

б) если $\angle A_1A_2B_2 = 140°$, найдите $\angle A_2A_1B_1$.

20. Плоскость α пересекает стороны угла BAC в точках A_1 и B_1, а параллельная ей плоскость β – в точках A_2 и B_2. Если $A_1B_1 = 8$, $AA_1 = 12$, $AA_2 = 0{,}5\,A_1A_2$, найдите A_2B_2 и AA_2.

21. Точка D не лежит в плоскости треугольника ABC. Точки K, Z и M являются серединами отрезков DA, DB, и DC соответственно. Определите взаимное расположение плоскостей ABC и KZM в пространстве.

22. Точки M, N, P, Q на рисунке 6 являются серединами сечений AB, CD, BC, AB соответственно. Если $AC = 10$ cm, $BD = 18$ cm, найдите периметр прямоугольника $MNPQ$.

23. Точка O на рис. 7 не лежит в плоскости треугольника ABC. Точки D, E, F являются серединами сечений AO, BO, CO соответственно. Найдите площадь треугольника DEF, если площадь треугольника ABC равна 380 cm^2.

24. Сторона AB правильного шестиугольника $ABCDEF$ на рис. 8 лежит в плоскости α. Определите пересечение прямых DE, CD и EC с заданной плоскостью α.

25. Точки A и B на рис. 9 лежат в плоскости α. Точка C не лежит в плоскости α. Между отрезками AC и BC проведена прямая. Докажите, что эта прямая параллельна плоскости α.

26. Правильная пирамида $SABCD$ на рис. 10 рассекается плоскостью $KLNM$, параллельной её основанию.

1) BS и CS; AB и KL; CS и KL – прямые;

2) определите взаимное положение плоскостей ASD и DSC; ABD и ASC.



ГЛАВА IV

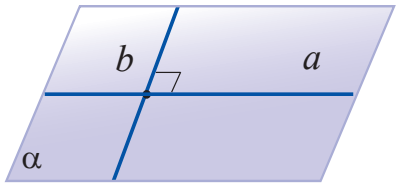
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Изучив эту главу, вы получите следующие знания и навыки:

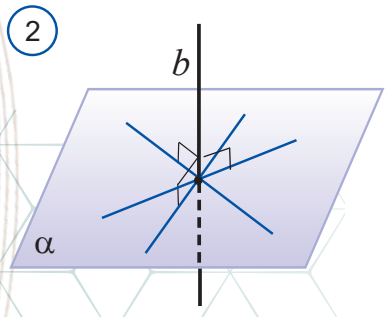
- представлять себе прямые, перпендикулярные плоскости, знать их свойства, признаки перпендикулярности прямой к плоскости, и уметь использовать их при решении задач;
- знать обобщённую теорему Пифагора и уметь применять её при решении задач;
- иметь представление о перпендикулярах и диагоналях, приведённых к плоскости в пространстве, и уметь применять их при решении практических задач;
- уметь определять расстояния от точки до прямой и плоскости, от прямой до параллельной ей плоскости;
- определять расстояния между параллельными плоскостями, между пересекающимися прямыми линиями;
- знать теорему о трёх перпендикулярах и уметь применять её при решении задач;
- уметь описывать и вычислять угол между плоскостями на чертеже;
- уметь применять теоремы об перпендикулярности плоскостей в пространстве и признаках перпендикулярности плоскостей при решении задач;
- узнать об ортогональных проекциях и их использовании в технике;
- находить грань ортогональной проекции многоугольника.

17 ПЕРПЕНДИКУЛЯРНАЯ ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

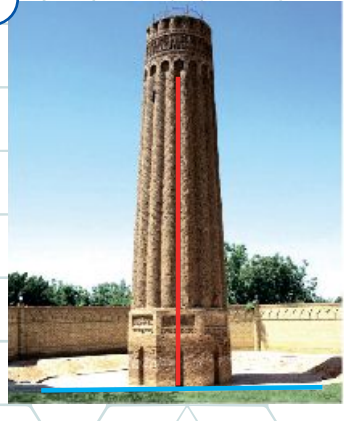
1



2



3



Напомним, что если угол между двумя данными прямыми в пространстве равен 90°, то они называются *взаимно перпендикулярными прямыми*.

Перпендикулярные прямые могут быть пересекающимися или скрещивающимися. На рисунке 1 перпендикулярные прямые a и b пересекаются, а перпендикулярные прямые b и c скрещиваются. Перпендикулярность прямых a и b записывается как $a \perp b$.

Прямая, перпендикулярная произвольной прямой на плоскости, называется *прямой, перпендикулярной плоскости (рис. 2)*.

Перпендикулярность плоскости α и прямой b записывается как $b \perp \alpha$.

Примеров взаимно перпендикулярных фигур можно найти множество. Обычно стены домов и колонны, башни, фонарные столбы и каркасы строят вертикально, т. е. перпендикулярно земле *(рис. 3)*.

Шкафы, столы и холодильники в комнате также устанавливаются вертикально по отношению к полу.









Теперь поговорим о некоторых свойствах перпендикулярных прямых в пространстве.

Если прямая a лежит в плоскости α или параллельна ей, то существует другая прямая b, лежащая в плоскости α и параллельная прямой a.

Прямая, перпендикулярная плоскости, должна пересекать эту плоскость.

Теорема 4.1. Если две прямые перпендикулярны плоскости, то они параллельны друг другу.

Доказательство. Пусть прямые a и b перпендикулярны плоскости α *(рис. 4)*. Докажем, что эти прямые параллельны друг другу.

Из точки M прямой a проводим прямую a_1, параллельную прямой b.

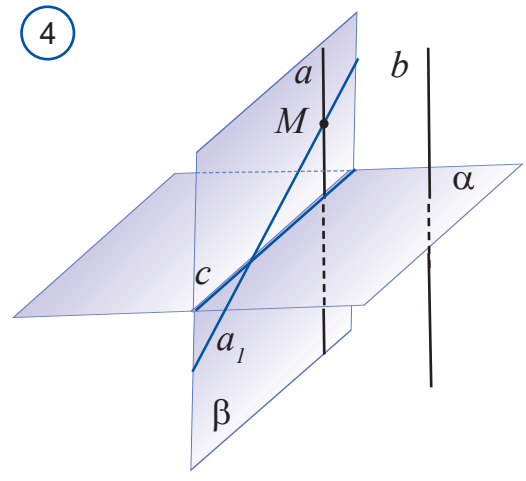
Тогда $a_1 \perp \alpha$.

Докажем, что прямые a и a_1 пересекаются. Пойдём от обратного и докажем, что это не так, что прямые a и a_1 не пересекаются. От точки M на плоскости β, где лежат прямые a и a_1 до прямой c пересечения плоскостей α и β, проходят две перпендикулярные прямые – a и a_1. Это невозможно. Противоречие показывает, что наша гипотеза неверна.

Итак, прямые a и b параллельны друг другу.

Теперь докажем перпендикулярность прямой к плоскости.

4



Теорема 4.2. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она также перпендикулярна плоскости.

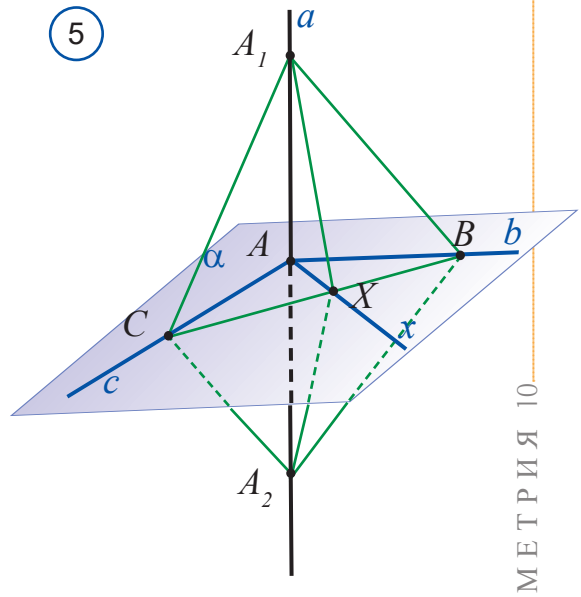
Доказательство. Пусть прямая a перпендикулярна двум прямым – b и c, лежащим в плоскости α. Тогда прямая a проходит через точку пересечения прямых b и c *(рис. 5)*. Докажем, что прямая a перпендикулярна плоскости α.

Проведём произвольную прямую x через точку A плоскости α и покажем, что она перпендикулярна прямой a. В плоскости α проведём прямую x, не проходящую через точку A и пересекающую прямые b, c и x. Пусть эти пересечения будут точками B, C и X соответственно.

На прямой откладываем равные отрезки AA_1 и AA_2 по разные стороны от точки A. Полученные треугольники A_1BA_2 и A_1CA_2 равносторонние (обоснуйте это самостоятельно). Отсюда следует, что треугольники A_1BC и A_2BC равны (обоснуйте это самостоятельно). В свою очередь, отсюда следует, что углы A_1BX и A_2BX равны, наконец, равны и треугольники A_1BX и A_2BX (обоснуйте это самостоятельно).

В частности, $A_1X = A_2X$. Тогда треугольник A_1XA_2 равносторонний. Следовательно, его медиана XA также является его высотой. Это, в свою очередь, показывает, что линия x перпендикулярна линии a.

5



Итак, прямая a перпендикулярна плоскости α.

Из этой теоремы следуют следующие свойства. Обоснуйте их самостоятельно.

Теорема 4.3. Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой.

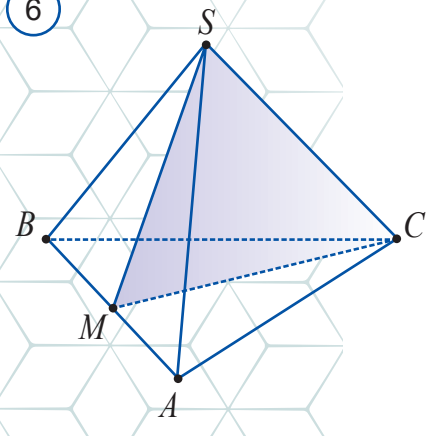
Теорема 4.4. Если две плоскости перпендикулярны прямой, то они параллельны.

Ниже мы приводим свойства, так называемые «теоремы существования и единственности», для независимого доказательства.

Теорема 4.5. Из произвольной точки пространства можно провести единственную плоскость, перпендикулярную данной прямой.

Теорема 4.6. Из произвольной точки пространства можно провести единственную прямую, перпендикулярную данной плоскости.

6



Пример. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка M является серединой ребра AB *(рис. 6)*. Докажите, что прямая AB перпендикулярна плоскости SMC.

Доказательство. По условию, $SABC$ – правильная пирамида, поэтому ее основание равностороннее, а стороны – равносторонние треугольники.

Тогда медианы CM и SM треугольников ABC и ABS также являются их высотами.

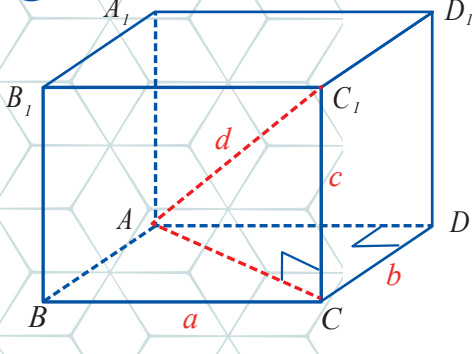
Тогда прямая AB перпендикулярна обеим прямым CM и SM.

В результате мы обнаружили, что прямая AB перпендикулярна двум прямым SM и CM, лежащим в плоскости SMC.

Это означает, что по теореме 4.2 прямая AB перпендикулярна плоскости SMC.

Теперь докажем обобщённую теорему Пифагора для прямоугольного параллелепипеда. Для этого необходимо вспомнить свойства параллелепипеда, приведённые в разделе III.

7



$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Теорема 4.7. (обобщённая теорема Пифагора). Квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов длин трёх его рёбер, имеющих общую вершину.

Доказательство. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед *(рис. 7)*.

Поскольку ребро CC_1 перпендикулярно грани $ABCD$, треугольник ACC_1 – прямоугольный.

Тогда по теореме Пифагора

$A_1C^2 = CC_1^2 + AC^2$. (1)

ADC также является прямоугольным треугольником. (Почему?)

Если мы снова воспользуемся теоремой Пифагора:

$AC^2 = AD^2 + DC^2$. (2)

Тогда согласно (1) и (2):

$A_1C^2 = CC_1^2 + AC^2 = CC_1^2 + AD^2 + DC^2$.

Так как $AD = BC$,

$A_1C^2 = CC_1^2 + BC^2 + DC^2$.

Если обозначить диагональ прямоугольного параллелепипеда как d, а его три измерения – через буквы a, b и c, то обобщённую теорему Пифагора можно записать следующим образом:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

7

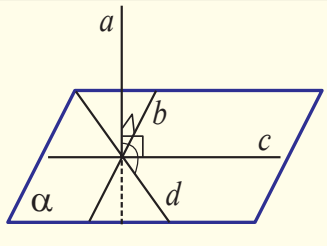
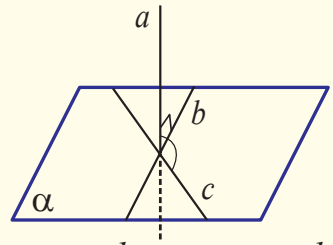


Вопросы и упражнения по теме

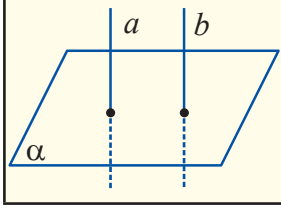
1. *Какие прямые в пространстве перпендикулярны друг другу?*
2. *Могут ли скрещивающиеся прямые быть перпендикулярными?*
3. *Какой город изображён на рисунке выше? Какие прямые линии и плоскости вы видите в нём? Приведите примеры параллельных, перпендикулярных и скрещивающихся линий с рисунка.*
4. *Какая прямая называется перпендикулярной к плоскости?*
5. *Укажите свойства прямых, перпендикулярных одной плоскости.*
6. *Укажите знаки перпендикулярности прямых и плоскостей.*
7. *Укажите свойство прямой, перпендикулярной одной из параллельных плоскостей.*
8. *Укажите свойство плоскостей, перпендикулярных одной прямой.*
9. *О чём гласит обобщённая теорема Пифагора?*

Практические упражнения

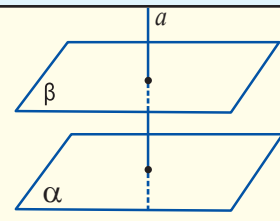
17.1. В таблице содержится основная информация 17-й темы. Внимательно изучите её и объясните.

Перпендикулярность прямой к плоскости	
Описание	**Обозначение**
 Если $a \perp b$ для любого $b \in \alpha$, то называется $a \perp \alpha$.	 Если $a \perp b$, $a \perp c$ для $b \in \alpha$, $c \in \alpha$, то $a \perp \alpha$.

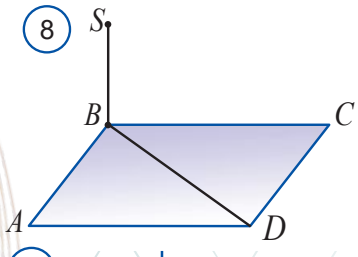
Связь между параллельностью и перпендикулярностью плоскостей

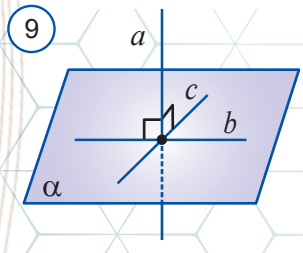


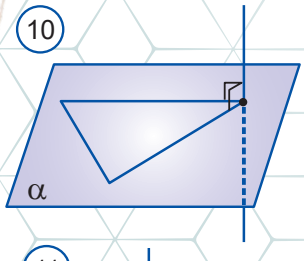
Если $a \parallel b$, $\alpha \perp a$, то $\alpha \perp b$.
Если $\alpha \perp a$, $b \perp \alpha$, то $a \parallel b$.

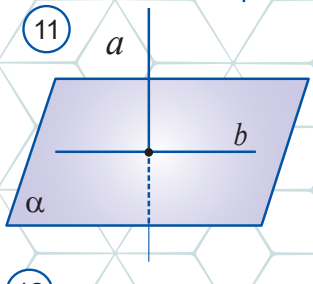


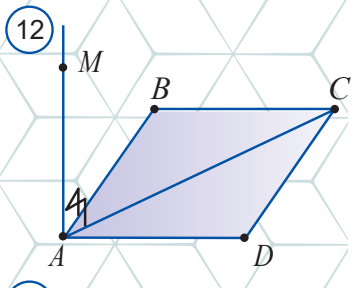
Если $\alpha \parallel \beta$, $a \perp \beta$, то $a \perp \alpha$.
Если $\alpha \perp a$, $\beta \perp a$, то $\alpha \parallel \beta$.

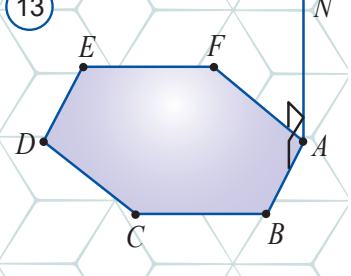
8


9


10


11


12


13


17.2. Отрезок SB перпендикулярен плоскости параллелограмма $ABCD$ *(рис. 8)*. Назовите прямые, которым перпендикулярен отрезок SB.

17.3. На рис. 9 изображена прямая a, перпендикулярная прямым b и c, лежащим в плоскости α. Докажите, что $a \perp \alpha$.

17.4. Прямая линия на рисунке 10 перпендикулярна двум сторонам треугольника. Докажите, что она перпендикулярна плоскости треугольника.

17.5. На рисунке 11 $a \perp \alpha$. Докажите, что прямая a также перпендикулярна прямой b, лежащей в плоскости α.

17.6. На рис. 12 MA проведена перпендикулярно вершине A прямоугольника $ABCD$. Если $MA \perp AB$ и $MA \perp AC$, докажите, что $MA \perp AD$.

17.7. На рисунке 13 NA проведена перпендикулярно концу A шестиугольника $ABCDEF$. Если $NA \perp AB$ и $NA \perp AF$, то докажите, что: а) $NA \perp AC$; б) $NA \perp AD$; в) $NA \perp AE$.

17.8. Из точки A треугольника ABC проведена прямая AK, перпендикулярная его сторонам AB и AC. Докажите, что эта прямая перпендикулярна высоте, медиане и биссектрисе треугольника, проведённого из точки A.

17.9. Прямая перпендикулярна сторонам AB и AC треугольника ABC. Определите пересечение прямой и плоскости треугольника ABC.
А) Прямая пересекает плоскость ABC, но не перпендикулярна ей.
Б) Прямая принадлежит плоскости ABC.
В) Прямая перпендикулярна плоскости ABC.
Г) Прямая параллельна плоскости ABC.

17.10. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1D_1C_1$. Докажите, что:
а) прямая DD_1 перпендикулярна стороне $ABCD$;
б) прямая AD перпендикулярна стороне DD_1CC_1.

17.11. На рис. 14 показан куб $ABCDA_1B_1D_1C_1$. Докажите, что
а) AB_1D – прямоугольный треугольник;
б) AB_1C_1D – правильный прямоугольник.

17.12. Прямая CM перпендикулярна плоскости треугольника ABC ($\angle C = 90°$). Докажите, что: а) прямая BC перпендикулярна плоскости, на которой лежат прямые AC и CM;

б) прямая AC перпендикулярна плоскости прямых BC и AC и CM.

17.13. Прямая CD перпендикулярна стороне BC треугольника ABC ($\angle C = 90°$). Определите и интерпретируйте взаимно перпендикулярные прямые и плоскости.

17.14. Прямоугольные треугольники ABC и DBC на рисунке 15 лежат в разных плоскостях и пересекаются по прямой BC. Какие прямые и плоскости взаимно перпендикулярны? Обоснуйте свой ответ.

17.15. Прямая KO перпендикулярна плоскости параллелограмма $ABCD$ (*рис. 16*). Определите прямую, перпендикулярную прямой KO.

17.16. Прямая MB перпендикулярна сторонам AB и BC треугольника ABC (*рис. 17*). Если точка X является произвольной точкой на стороне AC, определите тип треугольника MBX.

17.17. Стороны прямоугольника $ABCD$ параллельны сторонам прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что $ABCD$ – прямоугольник.

17.18. Плоскость α перпендикулярна прямой m, а прямая m параллельна прямой n. Докажите, что плоскость α также перпендикулярна прямой n.

17.19. Прямая, на которой лежит основание AB трапеции $ABCD$, перпендикулярна плоскости α. Докажите, что линия основания CD этой трапеции также перпендикулярна плоскости α.

17.20. Докажите, что из любой точки пространства можно провести прямую, перпендикулярную прямой.

17.21. Докажите, что из любой точки прямой в пространстве можно провести две различные перпендикулярные прямые.

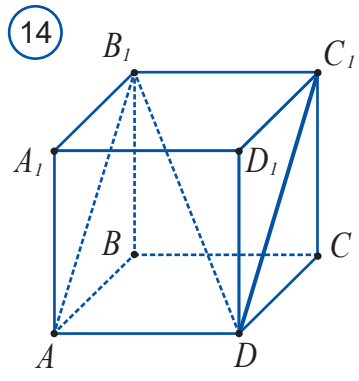
17.22. Прямые AB, AC, AD попарно перпендикулярны друг другу (*рис. 18*). Найдите длину отрезка CD, если

1) $AB = 3$ *см*, $BC = 7$ *см*, $AD = 1{,}5$ *см*;
2) $BD = 9$ *см*, $BC = 16$ *см*, $AD = 5$ *см;*
3) $AB = b$ *см*, $BC = a$ *см*, $AD = d$ *см;*
4) $BD = c$ *см*, $BC = a$ *см*, $AD = d$ *см*.

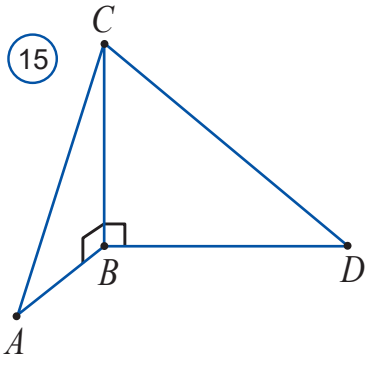
17.23. Из вершины A прямоугольника $ABCD$ перпендикулярно его плоскости проведена прямая AK. Расстояние от точки K до других концов прямоугольника равно 6 m, 7 m, 9 m. Найдите расстояние AK.

17.24. Из точек A и B проведены прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие её в точках C и D соответственно. Если $AC = 3$ m, $BD = 2$ m и $CD = 2{,}4$ m и AB не пересекает плоскость α, найдите расстояние между A и B.

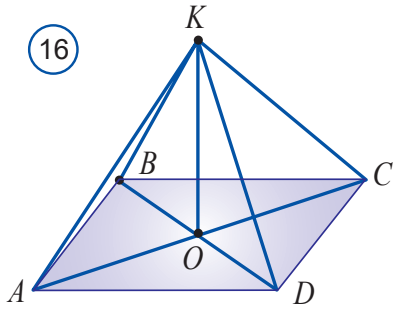
14



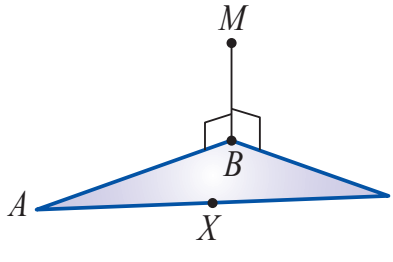
15



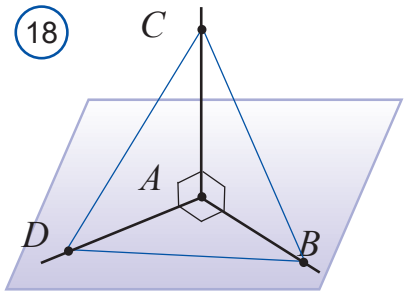
16



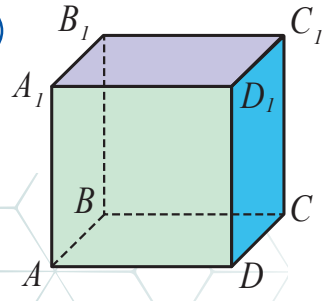
17



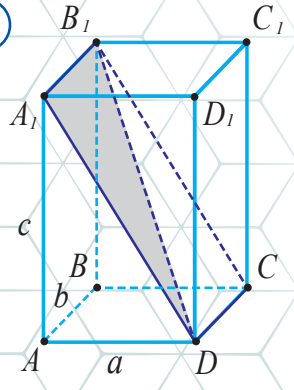
18



19



20



21



22



17.25. Найдите периметр треугольника AB_1C и грань треугольника DAC1, если ребро куба, изображённого на рисунке 19, равно а) 4 *см;* б) 8 *см*.

17.26. Прямая CM перпендикулярна плоскости квадрата $ABCD$ (прямая a), $CM = b$. Найдите расстояния от точки M до концов квадрата, если: а) a = 2 *см*, b = 1 *см;* б) a = 3 *см*, b = 4 *см*.

17.27. Отрезок CD, проходящий через точку C, перпендикулярен плоскости прямоугольного треугольника ABC. Найдите расстояние от точки D до середины гипотенузы треугольника, если: а) AC = 6 *см*, BC = 8 *см*, CD = 12 *см;* б) AC = 12 *см*, BC = 16 *см*, CD = 24 *см*.

17.28. Найдите площади треугольника A_1B_1D и прямоугольника A_1B_1CD, если размеры прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1D_1C_1$ на рис. 20: а) a = 12 *см*, b = 8 *см*, c = 16 *см;* б) a = 5 *см*, b = 10 *см*, c = 12 *см*.

17.29. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1D_1C_1$, если а) a = 12 *см*, b = 8 *см*, c = 16 *см;* б) a = 5 *см*, b = 10 *см*, c = 12 *см;* в) a = 2 *м*, b = 12 *м*, c = 6 *м*.

17.30. Найдите диагональ правильного прямоугольного параллелепипеда, если его основание имеет сторону 4 *см* и высоту 5 *см*.

17.31. Найдите высоту прямоугольного параллелепипеда, если его стороны равны 12 *см* и 8 *см*, а диагональ – 16 *см*.

17.32. Через вершину C на плоскость треугольника ABC проведён перпендикулярный отрезок CD. Если $AD = a$, $BD = b$, $CD = c$, найдите медиану CM треугольника ABC.

17.33. Отрезок AE проведён перпендикулярно плоскости прямоугольника $ABCD$ через его вершину A. Если расстояния от точки E до других вершин прямоугольника равны a, b и c $(a < c, b < c)$, найдите длину отрезка AE и длины сторон прямоугольника.

17.34. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$ и $\angle A = 30°$. Отрезок CM перпендикулярен плоскости треугольника через его вершину C. Если AC = 18 *см*, CM = 12 *см*, найдите расстояние от точки M до отрезка AB.

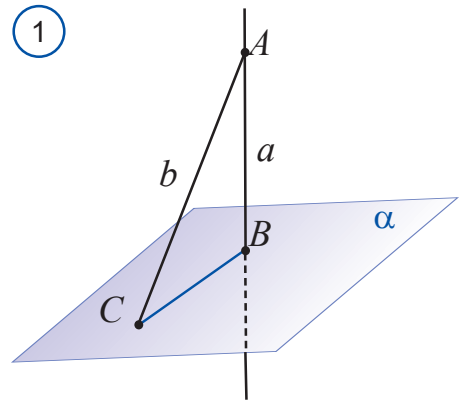
17.35. Расстояние между верхними концами колонн, параллельных друг другу, равно 3,4 *м* (*рис. 21*). Колонны соединяются друг с другом с помощью горизонтальной балки. Найдите длину балки, если высота первой колонны 5,6 *м*, а высота второй колонны 3,9 *м*.

17.36. Телефонный провод длиной 15 *м* протянут на высоту 6 *м* по деревянному дому высотой 20 *м* (*рис. 22*). Найдите расстояние между столбом и домом.

18 ПЕРПЕНДИКУЛЯР, ДИАГОНАЛЬ И РАССТОЯНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

Проведём прямую a, перпендикулярную плоскости α, из точки A, не лежащей в ней (*рис. 1*). Пусть эта прямая пересекает плоскость в точке B. Соединим также точку C плоскости с точкой A.

1



В результате

– отрезок AB – *перпендикуляр плоскости поперечного сечения*;

– отрезок AC – *опущенная в плоскость диагональ;*

– отрезок BC – *проекция диагонали на плоскость;*

– точка B – основание перпендикуляра,

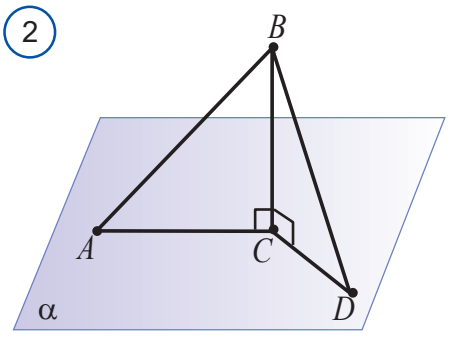
– точка C – основание кривой.

Треугольник ABC прямоугольный, а так как AB – катет, а AC – гипотенуза, $AB < AC$ всегда.

Следовательно, длина перпендикуляра, проведённого из точки к плоскости, меньше длины произвольной прямой, проходящей через эту точку.

Для перпендикуляров, углов и их проекций, проведённых из точки на плоскость, справедлива следующая теорема:

2



Теорема 4.8. ***Если из точки провести перпендикуляры и диагонали к плоскости, то (рис. 2):***

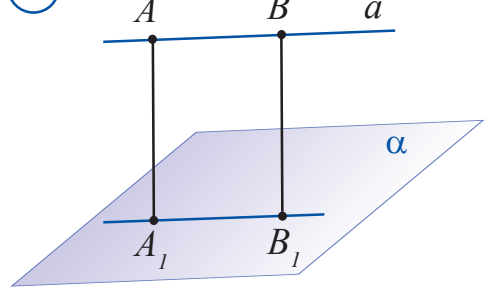
а) длина перпендикуляра меньше длины любой диагонали;

б) если проекция диагонали длинная, то и эта диагональ будет длинной;

в) чем длиннее угол, тем длиннее проекция этого угла.

Теперь докажем следующую теорему о параллельных прямых.

3



Теорема 4.9. ***Если прямая параллельна плоскости, то все её точки равноудалены от плоскости.***

Доказательство. Пусть a – заданная прямая, α – заданная плоскость (рис. 3). На прямой a отметим две точки – A и B. От них проводим перпендикуляры к плоскости α. Пусть основаниями этих перпендикуляров будут точки A и B соответственно. Тогда

4



расстояния от точек A и B до плоскости α будут отрезки AA_1 и BB_1 соответственно. Согласно теореме 3.6, отрезки AA_1 и BB_1 параллельны.

Значит, они лежат в одной плоскости. Эта плоскость пересекает плоскость α по прямой A_1B_1.

Прямая a параллельна прямой A_1B_1, так как не пересекает плоскость α.

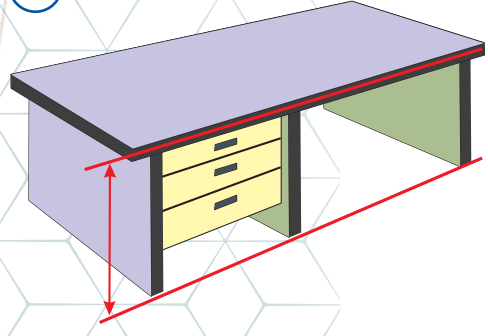
Таким образом, противоположные стороны четырёхугольника ABA_1B_1 параллельны.

Значит, это параллелограмм. В этом параллелограмме $AA_1 = BB_1$.

Расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра из точки к плоскости.

Когда говорят, что высота башни с часами в Ташкенте составляет 30 m, под этим понимают перпендикулярную длину, опущенную от верхушки колокола до плоскости его основания (*рис. 4*).

5



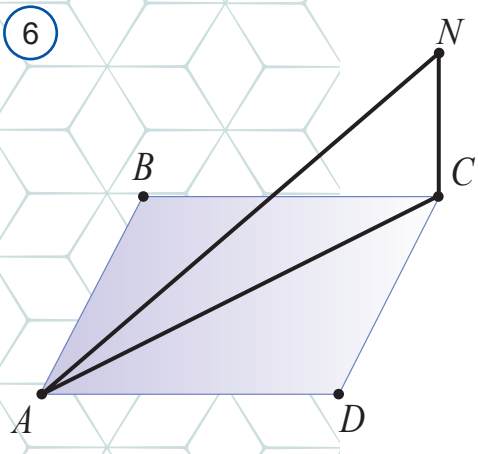
Расстоянием от прямой до плоскости, параллельной ей, называется расстояние от произвольной точки прямой до этой плоскости.

Расстояния от любых двух точек плоскости до плоскости, параллельной ей, одинаковы.

Расстояние между двумя параллельными плоскостями – это расстояние от произвольной точки одной плоскости до другой плоскости.

Высота стола, показанного на рисунке 5, равна расстоянию между полом и плоскостью стола.

6



Пример 1. Из вершины C квадрата $ABCD$ перпендикулярно плоскости, на которой он лежит, проводится отрезок CN *(рис. 6)*. Если длина отрезка CN = 6 cm, а сторона квадрата равна $4\sqrt{2}$, найдите расстояние от точки N до вершины A квадрата.

Решение. По условию сторона данного квадрата $AD = 4\sqrt{2}$.

Проведём диагональ AC квадрата $ABCD$ и вычислим её длину:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{\left(4\sqrt{2}\right)^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{16 \cdot 2 + 16 \cdot 2} = \sqrt{64} = 8 \text{ см}.$$

Поскольку CN перпендикулярна плоскости, $CN \perp AC$.

ACN – прямоугольный треугольник. Тогда по теореме Пифагора:

$$AC = \sqrt{AC^2 + CN^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$$

Ответ: 10 *см*.

Теорема 4.10. У двух скрещивающихся прямых есть только один общий перпендикуляр.

Доказательство. Пусть a и b – скрещивающиеся прямые *(рис. 7а)*. Сначала докажем существование общего перпендикуляра. Для этого нужно доказать, что на данных пересекающихся прямых можно выбрать такие точки A и B, что отрезок AB будет перпендикулярен и к a, и к b.

Пусть прямая b проходит через плоскость α, а прямая a параллельна ей. Возьмём точку C на прямой a и опустим отрезок CD перпендикулярно плоскости α. Проведём плоскость β через пересекающиеся прямые a и CD. Пусть прямая a_1 является линией пересечения плоскостей α и β *(рис. 7б)*.

Так как $a_1 \parallel a$, то прямые a_1 и b пересекаются в некоторой точке B. Из точки B проводим отрезок BA, лежащий в плоскости β и перпендикулярный прямой a.

В результате отрезки AB и CD лежат в плоскости β и перпендикулярны прямой a. Следовательно, $AB \parallel CD$ и $AB \perp a$.

Значит, $AB \perp a$ и $AB \perp b$, то есть AB – искомая прямая, перпендикулярная обеим прямым, разделяющим a и b.

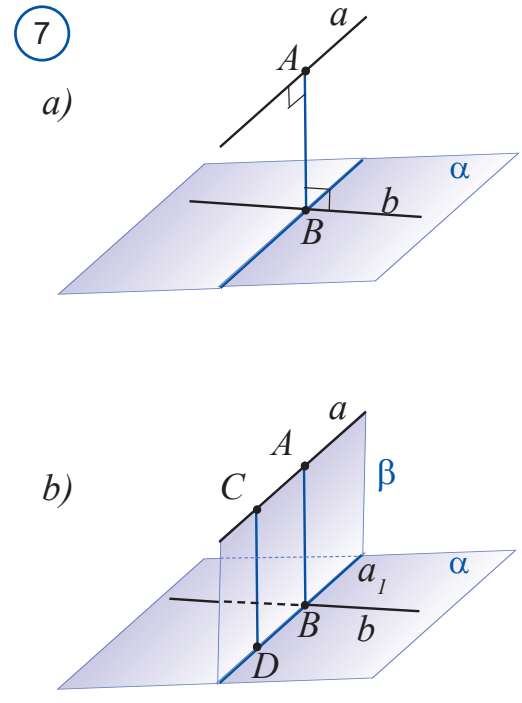
Самостоятельно докажите, что перпендикуляр – единственный.

Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра.

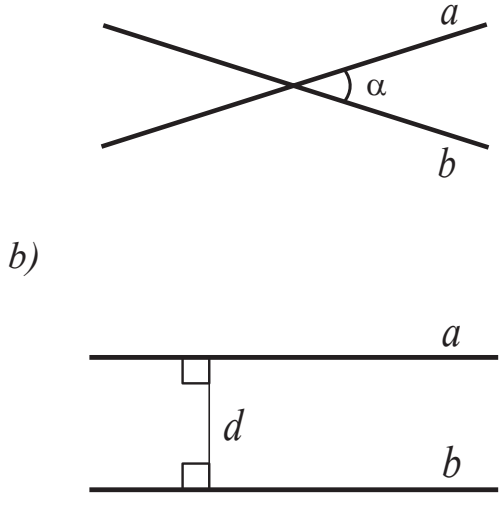
Из приведённой выше теоремы следует следующий вывод:

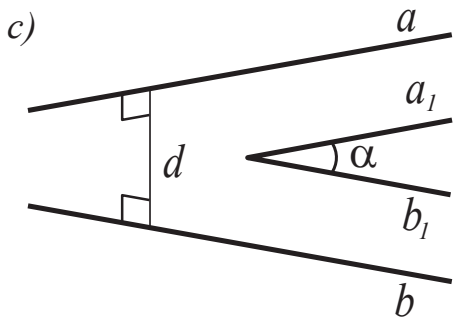
Свойство. *Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми a и b (рис.8)*

7



8





будет равно расстоянию от любой точки прямой a до плоскости α, на которой лежит прямая b и параллельна прямой a.

Исходя из вышесказанного, мы можем описать взаимное расположение двух прямых в пространстве с помощью чисел.

Если две прямые в пространстве:

• пересекаются, то угол α между ними (*рис. 8a*) численно описывает взаимное расположение этих прямых;

• параллельны друг другу, расстояние d между ними (*рис. 8b*) численно описывает взаимное расположение этих прямых;

• в случае взаимного пересечения угол α между ними и расстояние между ними d (*рис. 8c*) количественно описывают взаимное расположение этих прямых.

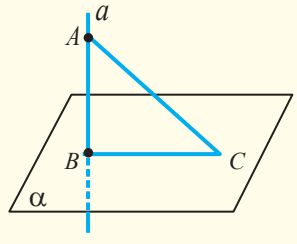
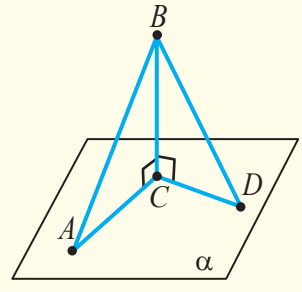


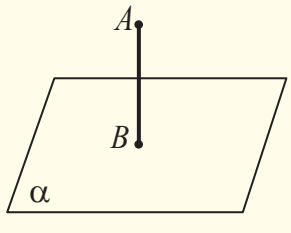
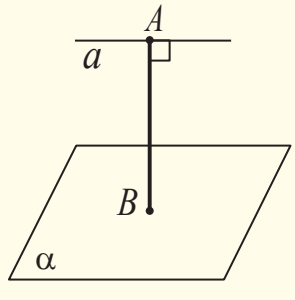
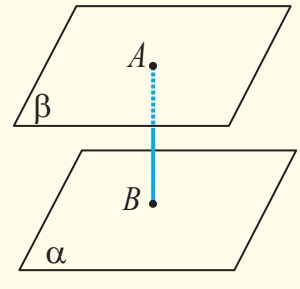
Вопросы и упражнения по теме

1. *Дайте определение перпендикуляру и диагонали, проведённым к плоскости.*
2. *Что на рис. 9: а) перпендикуляр; б) диагональ?*
3. *Что называется проекцией на плоскость?*
4. *Как определяется расстояние от точки до плоскости?*
5. *Как найти расстояние между прямой, параллельной плоскости, и плоскостью?*
6. *Как определяется расстояние между двумя параллельными плоскостями?*
7. *Как определяется расстояние между двумя пересекающимися прямыми?*
8. *Какое количество величин определяет взаимное расположение двух прямых в пространстве?*

Практические упражнения

18.1. В таблице содержится основная информация 18-й темы. Внимательно изучите её и объясните.

Перпендикуляры и диагонали	
Описание	**Свойства**
 Если $a \perp \alpha$, $AB \notin \alpha$, то: AB – перпендикуляр, опущенный на плоскость α из точки A AC – диагональ, BC - проекция диагонали на плоскости α.	 $BC < AB$, $BC < BD$; если $AB = BD$, то $AC = CD$; если $AC = CD$, то $AB = BD$; если $AC > CD$, то $AB > BD$.

Расстояния		
Расстояние от точки до плоскости	**Расстояние от прямой до плоскости**	**Расстояние между плоскостями**
 $A \notin \alpha$ $AB \perp \alpha$	 $a \parallel \alpha$, $A \in a$, $AB \perp \alpha$	 $\alpha \parallel \beta$, $A \in \beta$, $AB \perp \alpha$

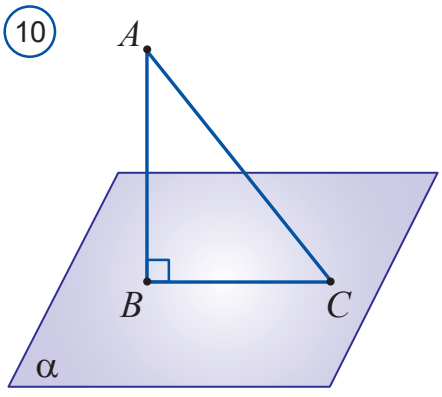
18.2. Определите и запишите проекцию: а) перпендикуляра; б) диагонали; в) основания перпендикуляра; г) проекцию диагонали на основание, рис. 10.

18.3. Из рис. 11 отрезки AD и DC являются проекциями диагоналей AB и BC:

а) Если $AD > DC$, что можно сказать о диагоналях?

б) Если $AB = BC$, что можно сказать об их проекциях?

10



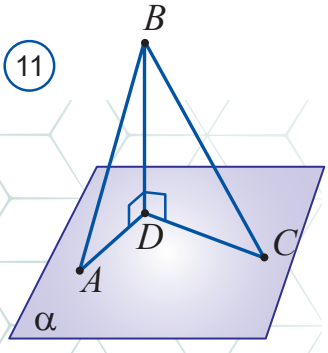
18.4. Найдите длины неизвестных отрезков на рис. 12.

18.5. Сравните длины отрезков MA и MC, используя данные на рисунке 13.

18.6. Если отрезок AB – перпендикуляр, AC – диагональ, BC – проекция диагонали, заполните таблицу, используя данные.

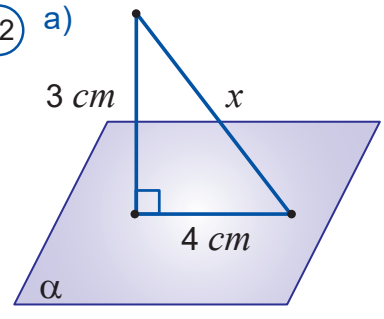
AB	24	15			12
BC	7		24	$4a$	
AC		25	26	$5a$	13

11

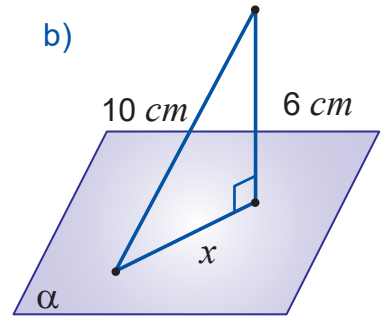


12

a)



b)

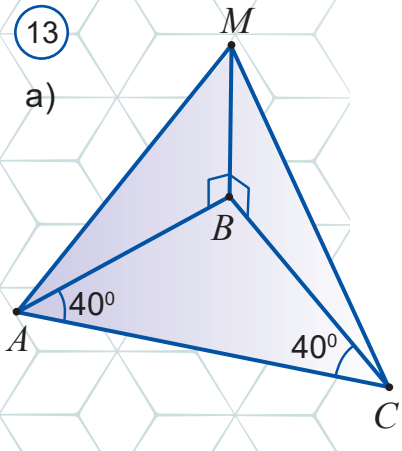


18.7. Если AB – перпендикуляр, AC – диагональ, BC – проекция диагонали, α – угол между перпендикуляром и диагональю, заполните таблицу, используя данные.

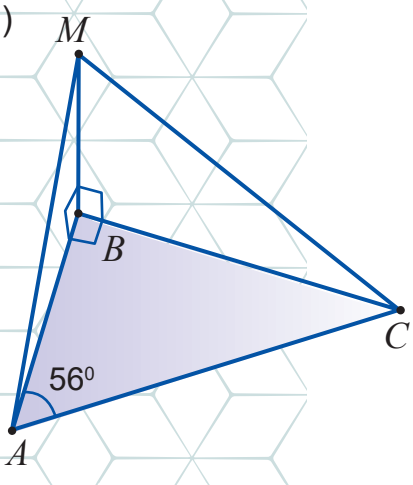
AB			5	6	14
BC		4			14
AC	6	8		12	
α	30°		45°		

13

a)



b)



18.8. Из точки M на плоскость перенесены равные диагонали MA, MB, MC, MD. Каким прямоугольником является $ABCD$: а) квадратным; б) параллелограммом; в) прямоугольником. Обоснуйте свой ответ.

18.9. Если найдётся точка, равноудалённая от вершин параллелограмма, докажите, что этот параллелограмм является прямоугольным.

18.10. Докажите, что ромб является квадратом, если найдутся точки, равноудалённые от вершин ромба.

18.11. Точки A, B, Q принадлежат плоскости α, а точка M ей не принадлежит, отрезок $MQ \perp \alpha$. Какой из отрезков MA, AQ, MQ, BQ, MB является: а) перпендикуляром; б) диагональю; в) проекцией?

18.12. Из точки A к плоскости α проведены диагонали AB и AC и перпендикулярный отрезок AO *(рис. 14)*. Если $AB = 2{,}5$ *см*, $AC = 3$ *см*, сравните проекции сторон.

18.13. Из точки к плоскости проведены две диагонали *(рис. 14)*. Если одна из диагоналей длиннее другой на 26 *см*, а проекции равны 12 *см* и 40 *см*, найдите длины этих сторон.

18.14. Прямая линия, перпендикулярная плоскости треугольника, проводится из центра окружности, проведённой вне треугольника. Докажите, что все точки этой прямой лежат на равном расстоянии от вершин треугольника.

18.15. На плоскость квадрата $ABCD$ опущен перпендикулярный отрезок DM. Найдите длину диагонали MA, если площадь квадрата – а) 21 $см^2$; б) 96 $см^2$; в) 44 $см^2$; г) 69 $см^2$; д) 156 $см^2$.

18.16. От вершины острого угла треугольника ABC с прямым углом C проведена прямая AD, перпендикулярная плоскости треугольника. Если $AC = c$, $BC = b$ и $AD = c$, найдите расстояния от точки D до вершин B и C.

18.17. Вершины колонн, стоящих друг от друга на расстоянии 4,2 $м$, соединены балкой. Найдите длину балки, если высоты колонн 5,8 $м$ и 4,1 $м$.

18.18. Телефонный кабель длиной 20 $м$ прикреплён к бетону на высоте 8 $м$ над уровнем земли и натянут на крыше многоэтажного дома высотой 18 $м$. Найдите расстояние между домом и столбом.

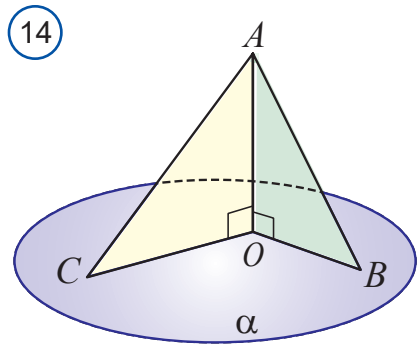
18.19. Длина перпендикуляра PQ, опущенного на плоскость из точки P, равна 1, а длины диагоналей PA и PB равны 2. Точка C является серединой отрезка AB. Найдите длину отрезка QC, если а) $APB = 90°$; б) $APB = \beta$.

18.20. Отрезок BH, перпендикулярный плоскости параллелограмма $ABCD$, построен из вершины тупого угла B. Найдите стороны параллелограмма, если $AH = 5$ *см*, $HD = HC = 8{,}5$ *см*, $AC = 1{,}5\sqrt{33}$.

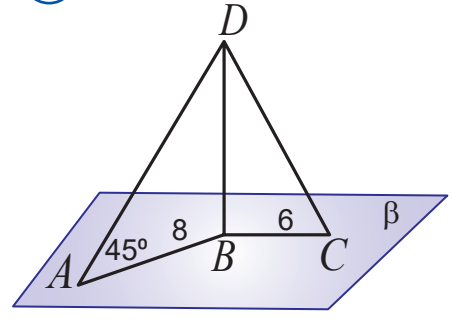
18.21. Точка M находится на расстоянии 40 *см* от каждого конца правильного треугольника ABC со стороной 60 *см*. Найдите расстояние от плоскости треугольника ABC до точки M.

18.22. Отрезок BD перпендикулярен плоскости β (*рис. 15*), от точки D проведены отрезки AD и DC. $\angle DCB = 45°$, $AB = 8$, $BC = 6$. Найдите длину CD.

14



15



Используя GeoGebra

Определение расстояния от точки до прямой с помощью 3D калькулятора

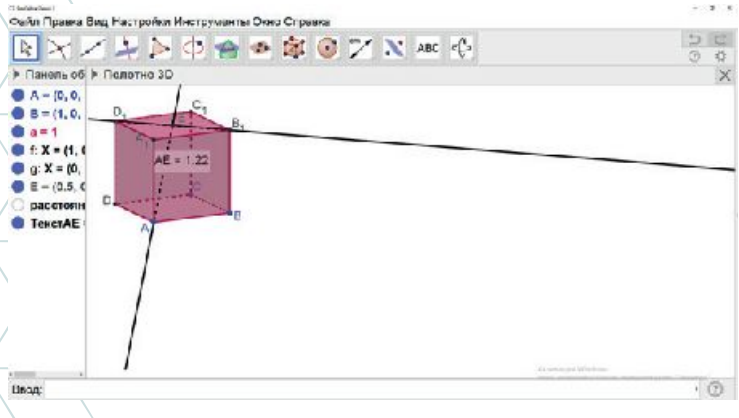
Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Из вершины A куба проведён перпендикуляр к прямой B_1D_1. Найдите расстояние от точки A до прямой B_1D_1.

Выполнение:

- Откройте новое окно в GeoGebra.
- Переключите интерфейс GeoGebra в режим **«Настроить» – «3D-графика»**.

Инструкции по определению расстояния

1.		**Ввод**	Поставить точку A=(0,0,0).
2.		**Ввод**	Поставить точку B=(1,0,0).
3.		**Куб**	Построить куб.
4.		**Переименовать**	Точки E, F, G, H меняются на $A1$, $B1$, $C1$, $D1$ соответственно. Для этого нажмите на точку и введите новый символ.
5.		**Прямая**	Проведена прямая B_1D_1.
6.		**Перпендикулярная прямая**	Из вершины A опускается отрезок к отрезку B_1D_1 перпендикулярно ему.
7.		**Пересечение**	Определяется точка пересечения прямой B_1D_1 и перпендикулярных линий – E.
8.		**Расстояние или длина**	Расстояние между вершиной A куба и точкой E определяется следующим образом: AE = 1.22.



Задание для самостоятельного выполнения

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Из вершины A куба проведён перпендикуляр к прямой BD_1. Найдите расстояние от точки A до прямой BD_1.

2. Через середину E ребра AA единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведён перпендикуляр к прямой BD_1. Найдите расстояние от точки E до прямой BD_1.

19 ТЕОРЕМА О ТРЁХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ

Теорема 4.11. Прямая, проведённая в плоскости и перпендикулярная проекции наклонной на эту плоскость, перпендикулярна и самой наклонной.

Доказательство. Пусть AB и AC – перпендикуляр и наклонная, направленные из точки A к плоскости α соответственно. Прямая c лежит в плоскости α, проходит через точки C и перпендикулярна проекции наклонной BC.

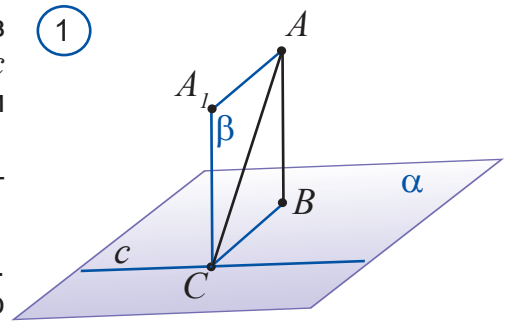
Проведём параллельный AB отрезок A_1C. Этот отрезок перпендикулярен плоскости α.

Проведём плоскость β через прямые AB и A_1C. Прямая c перпендикулярна прямой CA_1. По условию она также была перпендикулярна прямой CB. Тогда прямая c также перпендикулярна плоскости β.

Следовательно, прямая c также перпендикулярна наклонной AC, лежащей в плоскости β.

Поскольку эта теорема гласит о трёх перпендикулярах, она получила название «Теорема о трёх перпендикулярах». Обратное этой теоремы также справедливо. Докажите это самостоятельно.

1



Теорема 4.12. Прямая, перпендикулярная наклонной, перпендикулярна и её проекции на эту плоскость.

Пример 1. Из центра окружности, вписанной в треугольник, проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника *(рис. 2)*. Докажите, что произвольная точка на этой прямой лежит на равном расстоянии от сторон треугольника.

Доказательство. Пусть A, B, C – точки пересечения сторон треугольника с окружностью. O – центр окружности, а S – произвольная точка на перпендикуляре.

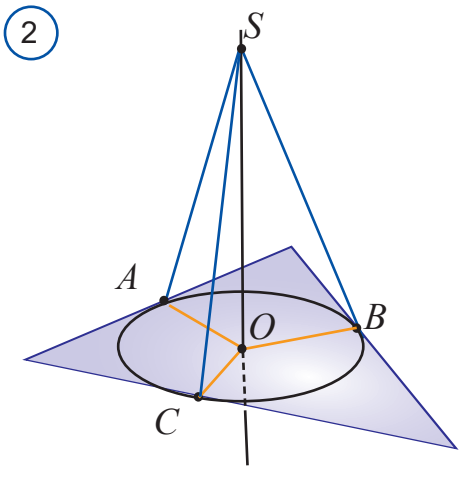
Так как OS перпендикулярна стороне треугольника, по теореме о трёх перпендикулярах, OA также перпендикулярна этой стороне. Тогда SOA будет прямоугольным треугольником. По теореме Пифагора в этом треугольнике:

$$SA = \sqrt{AO^2 + OS^2} = \sqrt{r^2 + OS^2},$$

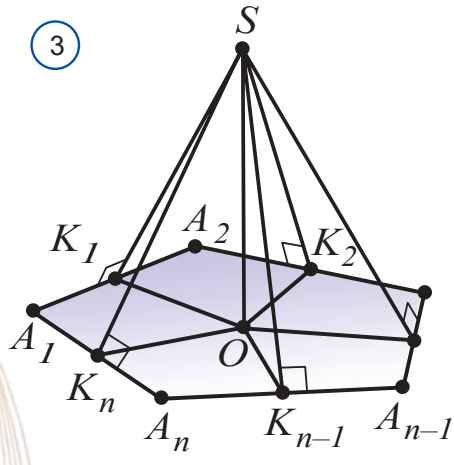
где r – радиус окружности.

Точно так же мы находим, что SBO – это $SB = \sqrt{r^2 + OS^2}$ прямоугольного треугольника, а SCO – это $SC = \sqrt{r^2 + OS^2}$ прямоугольного треугольника.

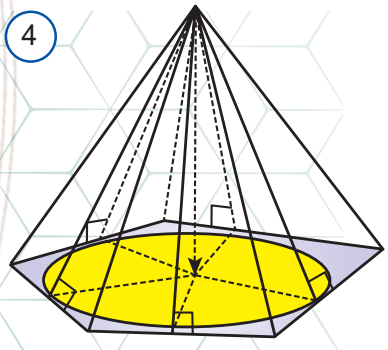
2



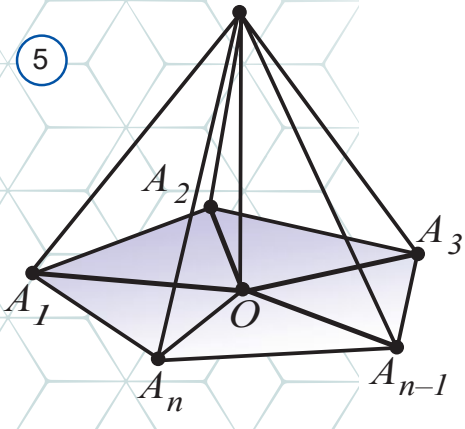
3



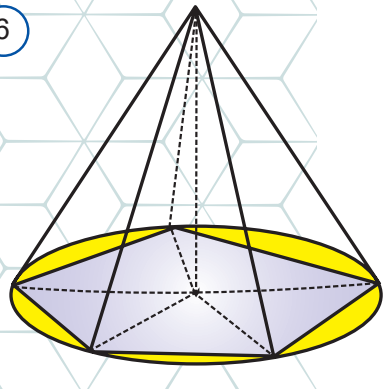
4



5



6



Значит, $SA = SB = SC$.

Мы также рассмотрим более общие случаи этого свойства для произвольных многоугольников.

Пример 2. Точка в пространстве находится на расстоянии, равном сторонам многоугольника, от которого опущен отрезок, перпендикулярный плоскости многоугольника. Докажите, что эта точка совпадает с центром окружности, вписанной в многоугольник *(рис. 3)*.

Доказательство. Пусть S – данная точка, $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ – данный многоугольник, O – точка на плоскости, от которой из точки S опущен перпендикуляр на многоугольник.

Тогда, согласно условию, расстояния от точки S до сторон многоугольника – SK_1, SK_2, ... SK_n (то есть перпендикуляры, опущенные к сторонам) равны друг другу:

$SK_1 = SK_2 = ... = SK_n$.

Соединяем точку O с точками K_1, K_2, ... K_n. В результате SOK_1, SOK_2, ... , SOK_n – прямоугольные треугольники с одним общим катетом SO и равными гипотенузами.

Эти прямоугольные треугольники равны по равенству катета и гипотенузы и признаку равенства треугольников.

Тогда их внутренние катеты – OK_1, OK_2, ... OK_n равны друг другу: $OK_1 = OK_2 = ... = OK_n$.

Эти уравнения показывают, что основание перпендикуляра – точка O – совпадает с центром окружности, вписанной в многоугольник. Из этого свойства следует следующий важный вывод.

Вывод. Если высоты всех сторон пирамиды равны друг другу (или стороны образуют одинаковый угол с плоскостью основания), то высота этой пирамиды приходится на центр окружности, проведённой внутри основания *(рис. 4)*.

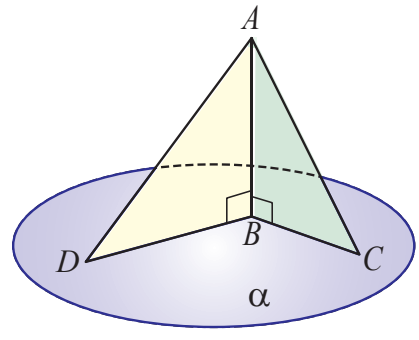
Пример 3. Точка в пространстве находится на одинаковом расстоянии от вершин многоугольника. От неё к многоугольнику проведён перпендикуляр. Докажите самостоятельно, что основание перпендикуляра совпадает с центром окружности, в которую вписан многоугольник *(рис. 5)*.

Вывод. Если все боковые рёбра пирамиды равны друг другу (или боковые рёбра пирамиды находятся под одинаковым углом с плоскостью основания), то высота этой пирамиды приходится на центр окружности, проведённой вне основания *(рис. 6)*.

Пример 4. Из заданной точки пространства к плоскости проведены две наклонные. Одна из них длиннее второй на 26 $см$, а длина их проекций соответственно 12 $см$ и 40 $см$. Найдите длину наклонных.

Решение. Допустим, AB – перпендикуляр, а AC и AD – соответствующие наклонные (рис. 7).

7



Допустим, $AC = x\ см$. Тогда, согласно условию, $AD = x + 26\ см$.

1) ABC – прямоугольный треугольник. По теореме Пифагора:

$AC^2 = AC^2 + AB^2$ или $AB^2 = x^2 + 144$.

2) ABD – тоже прямоугольный треугольник. По теореме Пифагора:

$AD^2 = BD^2 + AB^2$ или $AB^2 = (x + 26)^2 - 1600$.

Из 1 и 2 получаем $x^2 + 144 = (x + 26)^2$.

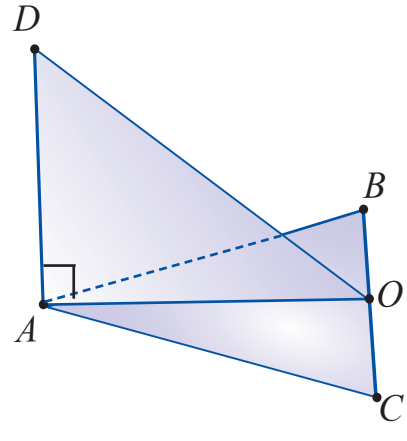
Из него определяем, что $x = 16\ см$.

Значит, $AC = 15\ см$, $AD = x + 26 = 41\ (см)$.

Ответ: $AC = 15\ см$, $AD = 41\ см$.

Пример 5. Из точки A треугольника ABC проведён перпендикуляр к его плоскости – отрезок AD *(рис. 8)*. Если $AB = 13$, $BC = 20$, $AC = 11$ и $AD = 36$, найдите расстояние от точки D до отрезка BC.

8



Решение. Искомое расстояние равно длине перпендикуляра, проведённого из точки D к отрезку BC. Чтобы построить такой отрезок, необходимо найти его основание на стороне BC. Для этого проведём отрезок AO от вершины A треугольника ABC к стороне BC: $AO \perp BC$.

Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $BC \perp DO$. Итак, DO – искомый отрезок.

Теперь найдём длину участка. Для этого сначала найдём площадь треугольника ABC по формуле Герона:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{20+11+13}{2} = 22;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

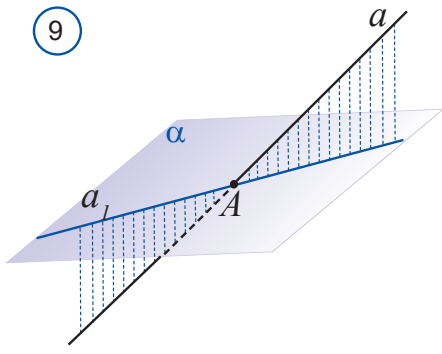
$$= \sqrt{22\cdot(22-20)\cdot(22-11)\cdot(22-13)} = 66$$

$$AO = \frac{2S}{a} = \frac{2\cdot 66}{20} = 6,6$$

По теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике ADO:

$$DO = \sqrt{AD^2 + AO^2} = \sqrt{36^2 + 6,6^2} = 36,6$$

9



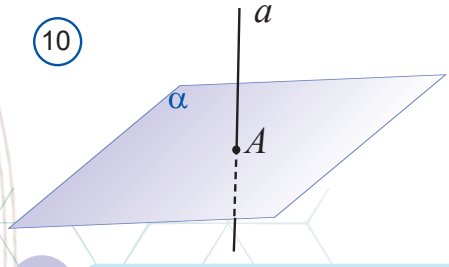
Допустим, даны плоскость и прямая, пересекающая её и не перпендикулярная этой плоскости *(рис. 9)*. Из каждой точки прямой проводим перпендикуляры. Основания этих перпендикуляров образуют прямую.

Прямая a_1 называется *проекцией* прямой a на плоскость a.

Угол между прямой a и плоскостью α – это угол между прямой и её проекцией на эту плоскость.

Если прямая перпендикулярна плоскости *(рис. 10)*, то угол между нею и плоскостью равен 90°, если она параллельна, то угол между этой прямой и плоскостью равен 0°.

10

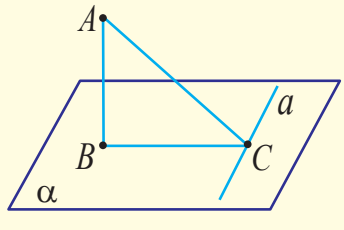
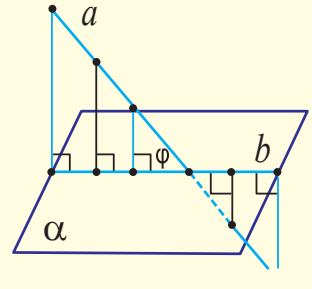


Вопросы и упражнения по теме

1. *Объясните теорему о трёх перпендикулярах. Почему она так называется?*
2. *Сформулируйте и объясните теорему, противоположную теореме о трёх перпендикулярах.*
3. *Как определяется угол между прямой и плоскостью?*
4. *Сколько градусов составляет угол между плоскостью и перпендикулярной к ней прямой?*

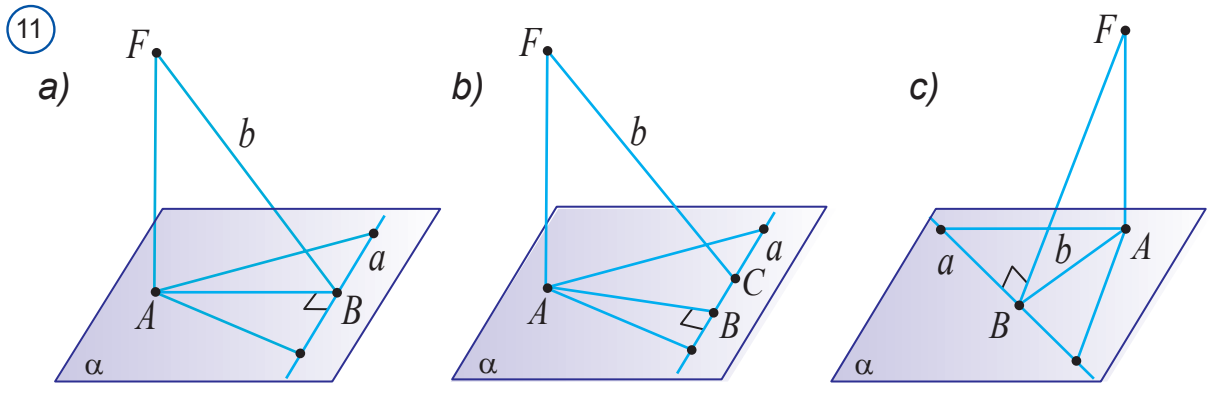
Практические задания

19.1. В таблице содержится основная информация 19-й темы. Внимательно изучите её и объясните.

Теорема о трёх перпендикулярах	Угол между прямой и плоскостью
 $AB \perp \alpha$ Если $a \perp BC$, то $a \perp AC$. Если $a \perp AC$, то $a \perp BC$.	 Прямая b – проекция прямой a на плоскости α φ – угол между прямой a и плоскостью α.

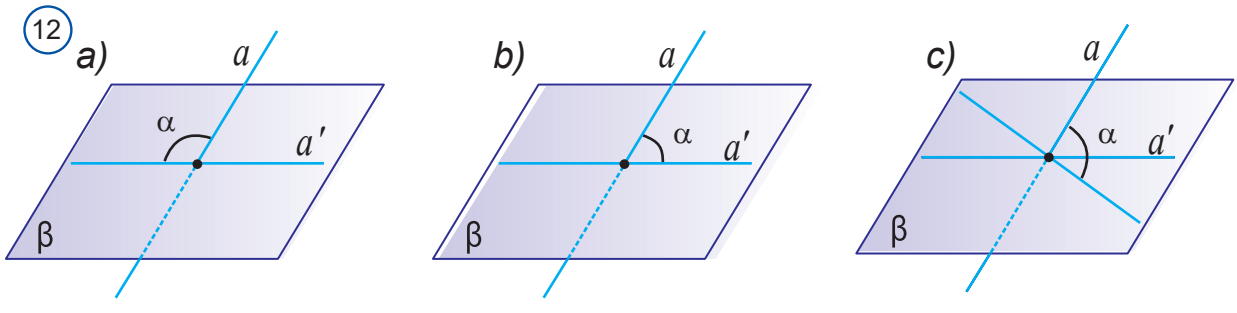
19.2. На рис. 11 $AF \perp \alpha$. Определите взаимное расположение прямых a и b.

11



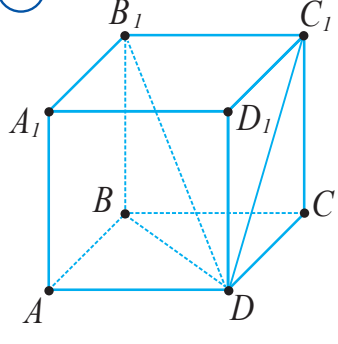
19.3. На рис. 12 прямая a' является проекцией прямой a на плоскость β. На каком из рисунков правильно показан угол α между прямой a и плоскостью β?

12

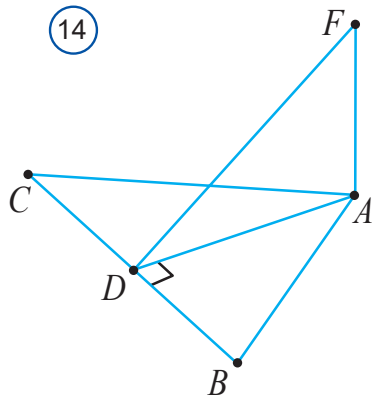


19.4. На рис. 13 показан куб $ABCDA_1B_1D_1C_1$. Определите угол между: а) диагональю DC_1 стороны DD_1C_1C и базовой плоскостью $ABCD$; б) между диагональю B_1D куба и плоскостью $ABCD$; в) диагональю B_1D куба и боковой плоскостью DD_1C_1C.

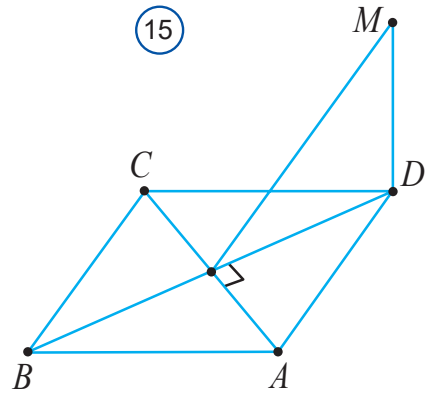
13



14



15



19.5 Составьте и решите задачи к рисункам 14 и 15.

19.6. Какое из следующих утверждений неверно?

А) Если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то эти прямые параллельны.

Б) Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна любой прямой на плоскости, то плоскость и прямая параллельны друг другу.

В) Если проекция перпендикулярна прямой, лежащей в плоскости, то её проекция также перпендикулярна прямой.

Г) Прямая, перпендикулярная двум прямым, лежащим в плоскости, также перпендикулярна плоскости.

Е) Если две прямые параллельны третьей прямой, то эти прямые параллельны.

19.7. Какое из следующих утверждений неверно?

А) Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то эта плоскость также перпендикулярна и второй плоскости.

Б) Прямая, перпендикулярная двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, также перпендикулярна плоскости.

В) Две прямые в пространстве параллельны друг другу, если они перпендикулярны третьей прямой.

Г) Если прямая на плоскости перпендикулярна проекции плоскости, то эта прямая также перпендикулярна проекции плоскости.

Д) Прямые, образованные пересечением двух параллельных плоскостей третьей плоскостью, параллельны друг другу.

19.8. Точка A лежит на расстоянии a от вершин равностороннего треугольника, сторона которого равна a. Найдите расстояние от точки A до плоскости треугольника.

19.9. Три равных угла SA, SB, SC и SO перпендикулярны точке S вне плоскости α. Докажите, что основание перпендикуляра O является центром окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

19.10. Стороны равностороннего треугольника равны 3 m. Найдите расстояние от точки, находящейся на расстоянии 2 m от каждого конца треугольника, до плоскости треугольника.

19.11. Равнобедренный треугольник имеет основание и высоту 4 m. Дана точка, лежащая на расстоянии 6 m от плоскости треугольника и на одинаковом расстоянии от его вершин. Найдите это расстояние.

19.12. Расстояние от точки A до углов квадрата равно a. Если сторона квадрата равна b, найдите расстояние от точки A до плоскости квадрата.

19.13. Найдите геометрическое место оснований наклонных данной длины, проведённых из данной точки к плоскости.

19.14. Из данной точки к плоскости проведены две наклонные длиной 10 cm и 17 cm. Разница в проекции этих линий составляет 9 cm. Найдите проекции наклонных.

19.15. От точки к плоскости проведена наклонная. Найдите длину наклонной, если:
а) одна из них длиннее другой на 26 cm, а проекции сторон равны 12 cm и 40 cm;
б) длины сторон относятся как 1:2, а их проекции равны 1 cm и 7 cm.

19.16. К точке A, лежащей на расстоянии d от плоскости α, проводятся прямые AB и AC, образующие с плоскостью угол 30°. Их проекции на плоскость q образуют угол 120°. Найдите длину отрезка BC.

19.17. Если один из катетов прямоугольного и равнобедренного треугольника принадлежит плоскости, а другой образует с ней угол 45°, докажите, что гипотенуза образует с этой плоскостью угол 30°.

19.18. Отрезок MA проведён перпендикулярно плоскости треугольника ABC. $\angle MBC = 45°$. $\angle ACB = 90°$. $MA = AC$. Найдите $\angle AMB$ (*рис. 16*).

19.19. Наклонная a образует с плоскостью угол 45°, а прямая b плоскости образует угол 45° с проекцией наклонной. Докажите, что угол между прямыми a и b равен 60°.

19.20. Точка P находится на расстоянии a от каждого конца квадрата $ABCD$, равного длине его сторон. Найдите угол между плоскостью квадрата и отрезком AP.

19.21. Все стороны треугольной пирамиды равны друг другу. Найдите угол между ребром пирамиды и её противоположной стороной.

19.22. Размеры прямоугольного параллелепипеда равны a, b и c. Найдите расстояние между диагональю параллелепипеда и диагоналями его катетов.

19.23. Дано, что $AB \perp \alpha$, $CD \perp \alpha$, $AB = CD$ *(рис. 17)*. Определите тип прямоугольника $ABCD$.

19.24. Дан куб $ABCDA_1B_1D_1C_1$. Докажите, что $AD \perp DCC_1$.

19.25. Из точки S к плоскости проведены перпендикулярные отрезки SO, SA и наклонный отрезок SB. Если SA = 20 *см*, AO = 16 *см*, OB = 5 *см*, найдите длину SB.

19.26. Точка S не лежит в плоскости прямоугольника $ABCD$ и равноудалена от его вершин. Если расстояние от точки S до плоскости ABC равно 24 *см*, AB = 12 *см*, BC = 16 *см*, найдите расстояния от точки S до вершин прямоугольника.

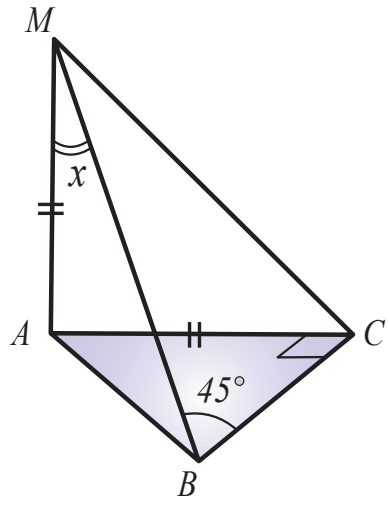
19.27. Из точки на плоскость прямоугольного треугольника с катетами 15 *см* и 20 *см* проведён перпендикуляр длиной 16 *см*. Основание перпендикуляра лежит на прямоугольном конце треугольника. Найдите расстояние от этой точки до гипотенузы.

19.28. Из точки A к плоскости α проведены наклонные AB и AC, образующие с плоскостью угол 60°. Если $BC = AC = 6$, найдите AB.

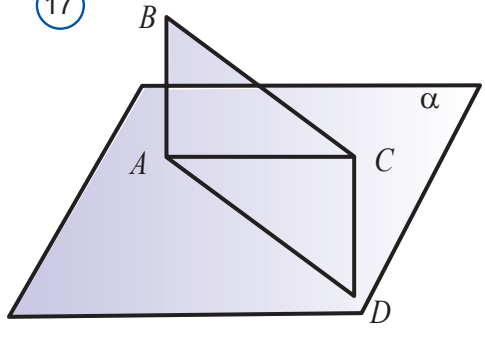
19.29. CD перпендикулярна плоскости β *(рис. 18)*, проведены наклонные AD и BD. BC = 6, AD = 10, AC = 8. Найдите угол DBC.

19.30. На рисунке 19 изображён прямоугольник $ABCD$. MC перпендикулярна плоскости прямоугольника. Угол BAM = 64°. Найдите $\angle AMB$.

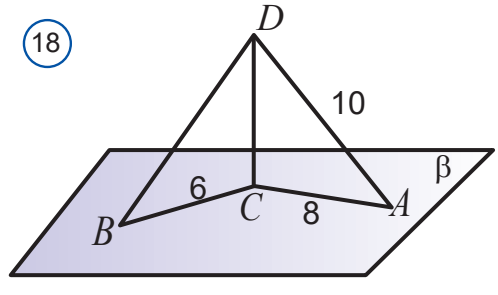
16



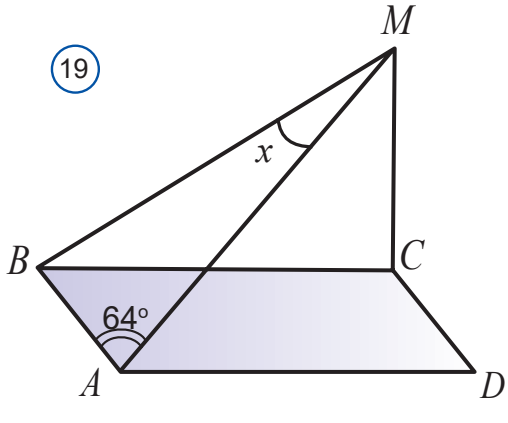
17



18

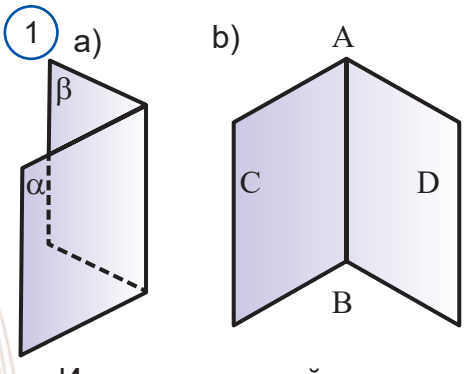


19



20 ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

1

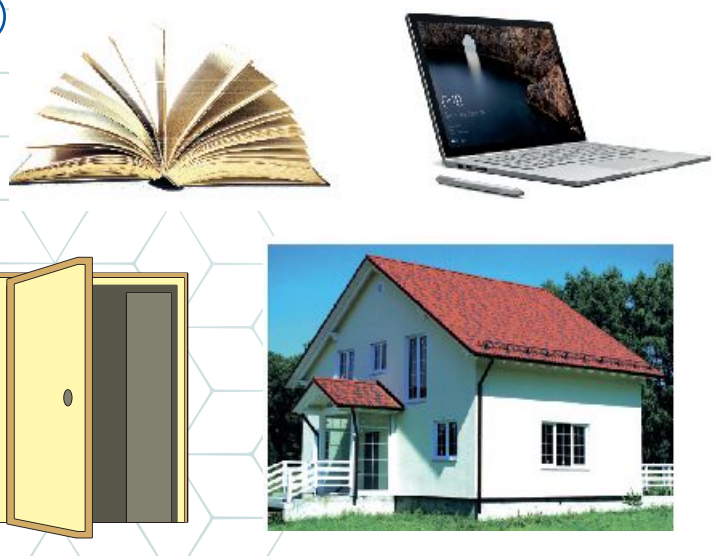


Геометрическая фигура, состоящая из двух полуплоскостей и ограничивающей их общей прямой, называется *двугранным углом (рис. 1)*. Полуплоскости – это грани двугранного угла, а прямая, ограничивающая их, называется ребром двугранного угла. Обозначения: α, β или $CABD$ (*рис. 1*).

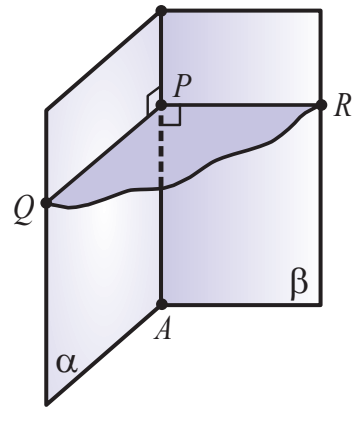
Представление о двугранных углах дают следующие окружающие предметы *(рис. 2)*: книга, ноутбук, открытая дверь, крыша здания.

Из произвольной точки ребра двугранного угла проводим лучи, лежащие на его гранях и перпендикулярные этому ребру. Угол, образованный этими лучами, называется *линейным углом* двугранного угла *(рис. 3)*.

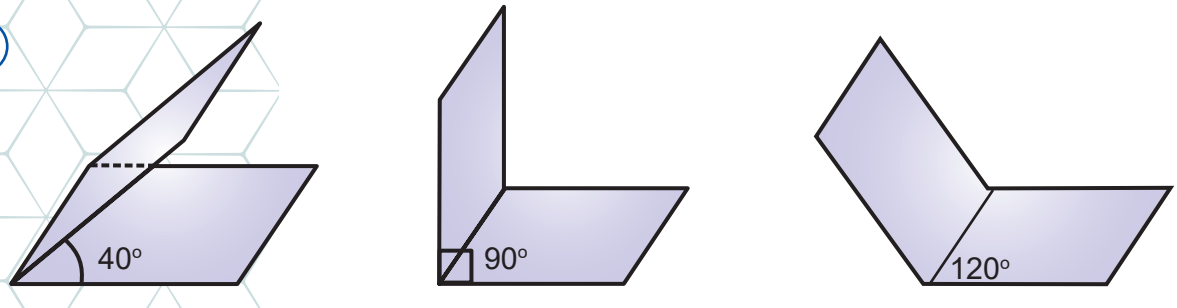
2



3



4



Из определения видно, что линейный угол двугранного угла определяется точкой, выбранной на ребре, и их бесконечно много. Однако величина линейного угла двугранного угла не зависит от точки, выбранной на ребре, то есть все они равны между собой.

Размер двугранного угла определяется размером его линейного угла. Так же как и линейные углы бывают острыми, прямыми и тупыми, двугранные углы делятся на острые, прямые и тупые соответственно. На рис. 4 показаны различные двугранные углы.

Две пересекающиеся плоскости делят всё пространство на четыре двугранных угла с общим ребром *(рис. 5)*. Если один из этих двугранных углов равен α, то величина одного из них также равна α. Значение двух других равно $180° - \alpha$.

Среди этих двугранных углов есть и один, меньший 90°. Величина этого угла принимается за *угол между пересекающимися плоскостями*.

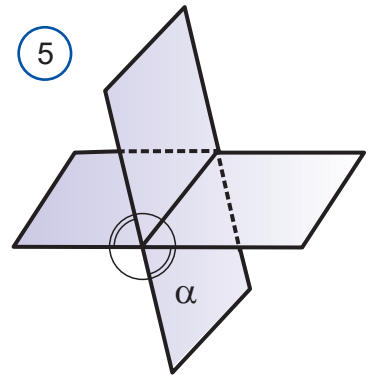
Если один из двугранных углов прямой, т.е. равен 90°, то остальные три также прямые *(рис. 6)*.

Плоскости, пересекающиеся под прямым углом, называются *перпендикулярными плоскостями*.

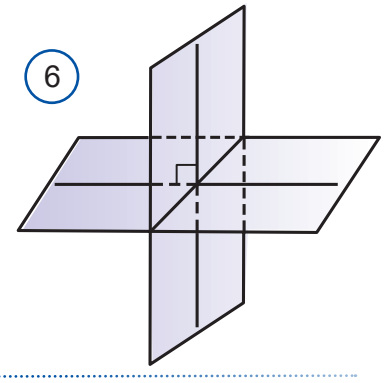
Примеры окружающих перпендикулярных плоскостей включают пол и стены комнаты, стены комнаты с общим ребром, рёбра кубика Рубика с общим ребром, а также уровень земли, стены дома и прилегающие стены многоквартирного дома *(рис. 7)*.

Перпендикулярность плоскостей α и β записывается как $\alpha \perp \beta$ с использованием символа «$\perp$», как в прямых линиях.

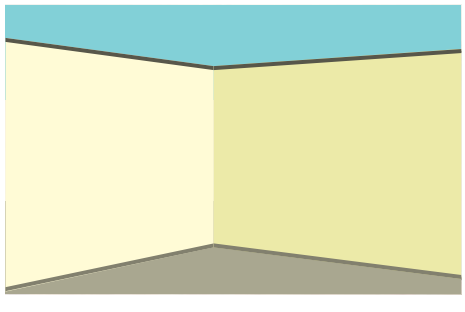
5

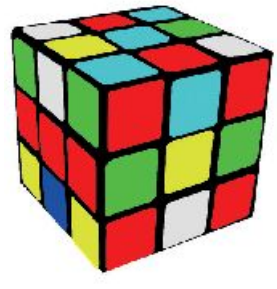


6



7

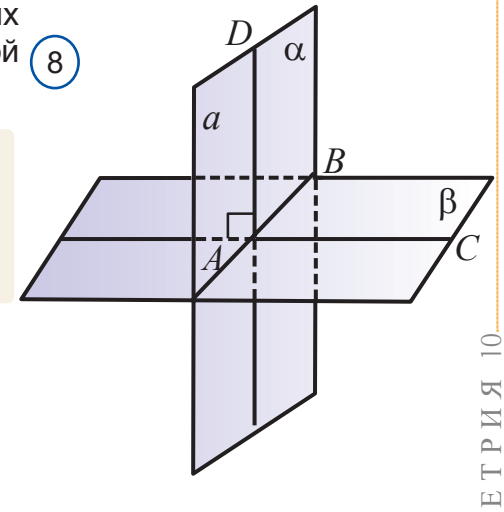






Теперь поговорим о свойствах перпендикулярных плоскостей. Следующая теорема называется теоремой *перпендикулярности плоскостей*.

8



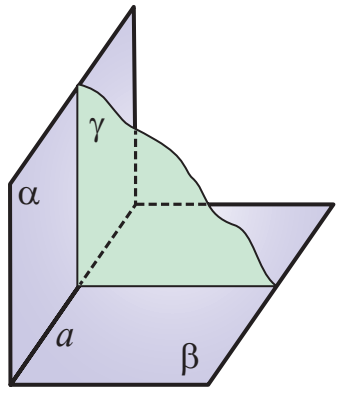
Теорема 4.13. Если одна из плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой, то такие плоскости взаимно перпендикулярны.

Доказательство. Пусть заданы плоскости α и β, причём через плоскость α проходит прямая a, перпендикулярная плоскости β *(рис. 8)*. Пусть A – точка пересечения прямой a с плоскостью β. Докажем, что $\alpha \perp \beta$.

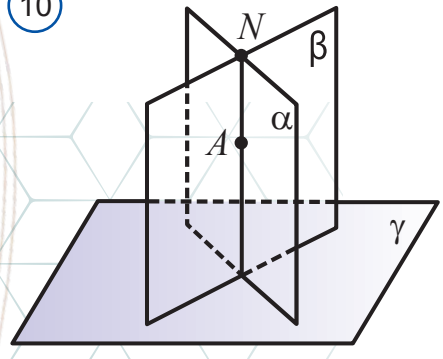
Плоскости α и β пересекаются по прямой AB. Тогда $AB \perp a$, так как по условию $\beta \perp a$. Проведём прямую AC, лежащую в плоскости β и перпендикулярную прямой AB. Полученный треугольник DAC представляет собой линейный угол двугранного угла. По условию $a \perp \beta$. Тогда угол DAC является прямым углом. Следовательно, $\alpha \perp \beta$.

Из этой теоремы следует следующее утверждение.

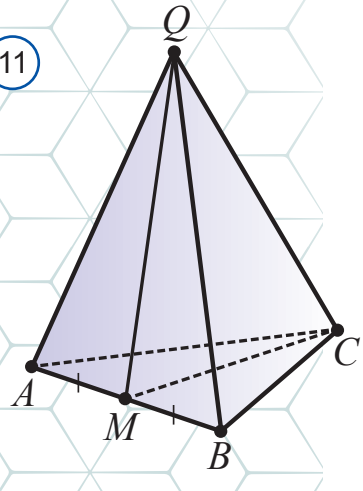
9



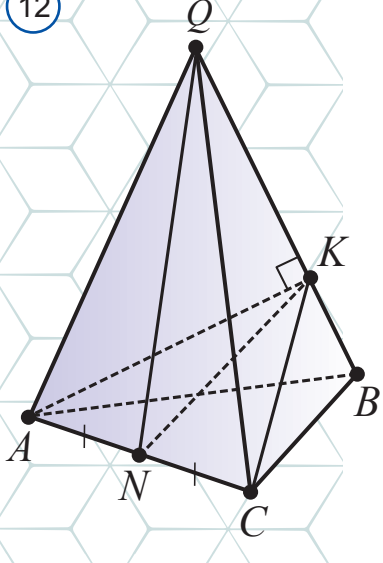
10



11



12



Утверждение. Если плоскость перпендикулярна линии пересечения двух плоскостей, то она перпендикулярна и каждой из этих плоскостей (рис. 9).

Обратное утверждение теоремы 4.11 также справедливо. Мы приводим его без доказательства.

Теорема 4.14. Если из точки одной из двух перпендикулярных плоскостей провести перпендикулярную прямую к другой, то эта прямая лежит в первой плоскости.

Утверждение. Если две перпендикулярные плоскости перпендикулярны третьей плоскости, то линия их пересечения также перпендикулярна этой плоскости (рис. 10).

Пример 1. Если точка M является серединой основания правильной пирамиды $QABC$ *(рис. 11)*, докажите, что плоскость QCM перпендикулярна плоскости основания пирамиды ABC.

Доказательство. Поскольку AB является основанием равносторонних треугольников AQB и ACB, медианы этих треугольников также перпендикулярны QM и CM. В то же время сечение AB также перпендикулярно плоскости QCM. Тогда, согласно теореме 4.12, плоскость ABC перпендикулярна плоскости QCM.

Пример 2. Плоский угол AQB при вершине правильной пирамиды $QABC$ равен α. Найдите его двугранный угол на боковом ребре *(рис. 12)*.

Решение. Пусть N – середина ребра AC, а AK – перпендикуляр, проведённый из A на ребро BQ.

Из равенства треугольников ABQ и CBQ следует, что $CK \perp BQ$. Следовательно, угол AKC является линейным углом двугранного угла BQ. Из прямоугольных треугольников AKQ и ANQ находим, что $AK = \sin\alpha$, $AN = AQ \sin\frac{\alpha}{2}$.

А из прямоугольных треугольников AKN:

$$\sin\left(\frac{\angle AKC}{2}\right) = \frac{AN}{AK} = \frac{1}{2\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

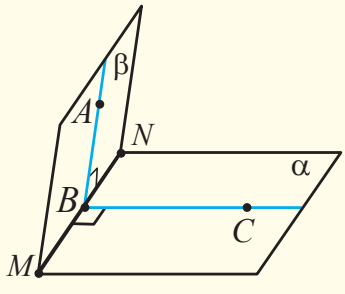
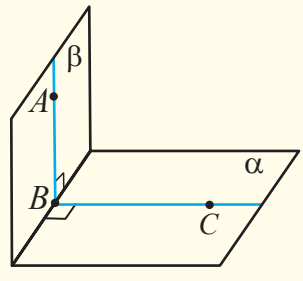
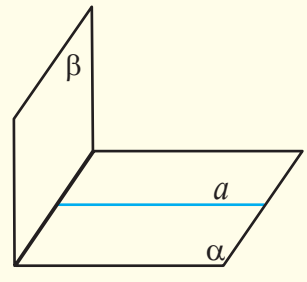
Отсюда: $\angle AKC = 2\arcsin\frac{1}{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$.

Вопросы и упражнения по теме

1. *Что такое двугранный угол?*
2. *Какой угол называют «углом между плоскостями»?*
3. *Как называются пересекающиеся под прямым углом плоскости?*
4. *Назовите признаки перпендикулярности плоскостей.*
5. *Назовите и объясните свойства перпендикулярных плоскостей.*

Практические упражнения

20.1. В таблице содержится основная информация 20-й темы. Внимательно изучите её и объясните.

Перпендикулярность плоскостей		
Угол между плоскостями	**Перпендикулярность плоскостей**	**Свойства перпендикулярности плоскостей**
 Если $AB \perp MN$ и $CB \perp MN$, то $\angle ABC$ – угол плоскостей α и β.	 Если $\angle ABC = 90^0$, α и β *перпендикулярны*.	 Если $a \subset \alpha$ и $a \perp \beta$, то $\alpha \perp \beta$.

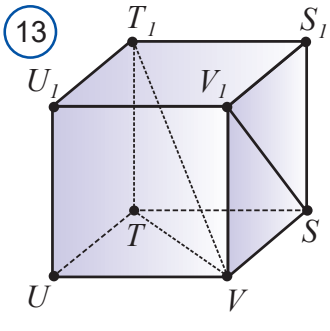
20.2. Определите перпендикулярные стороны и укажите прямые двугранные углы: а) прямоугольного параллелепипеда; б) прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

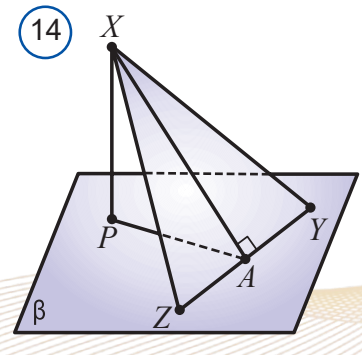
20.3. Являются ли: а) угол T_1ST; б) угол T_1SVT – двугранными углами в кубе $STUVS_1T_1U_1V_1$ *(рис. 13)*? Найдите значение двугранного угла V_1UTS.

20.4. Два двугранных угла имеют одну общую грань, а остальные грани вместе образуют плоскость. Докажите, что сумма этих двух углов равна 180°.

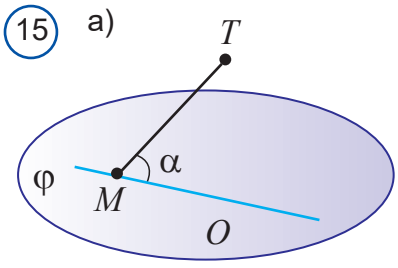
20.5. Сторона YZ треугольника XYZ лежит в плоскости β. С его конца X опускаются высоты XA и XP перпендикулярно плоскости β (*рис. 14*). Докажите, что угол XAP является линейным углом двугранного угла $XYZP$.

20.6. Ребро CD треугольной пирамиды $ABCD$ перпендикулярно плоскости ABC. Если $AB = BC = AC = 6$ и $BD = 3\sqrt{7}$, найдите двугранные углы $DACB$, $DABC$, $BDCA$.

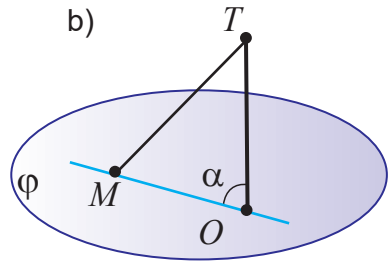
13


14


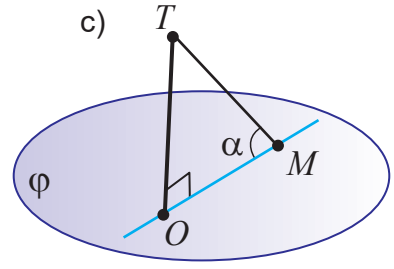
15 a)



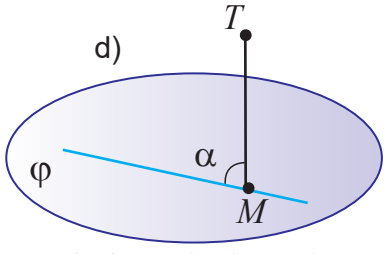
b)



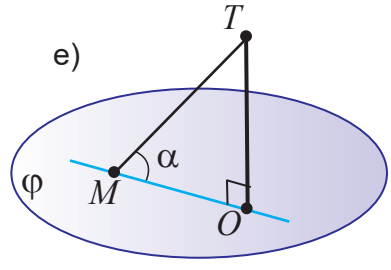
c)



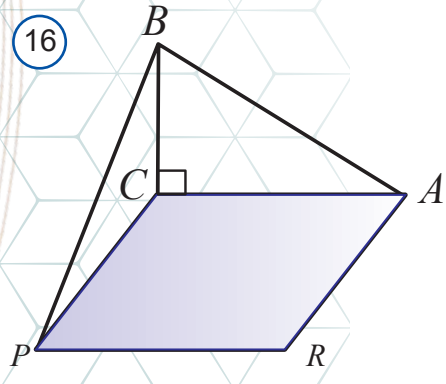
d)



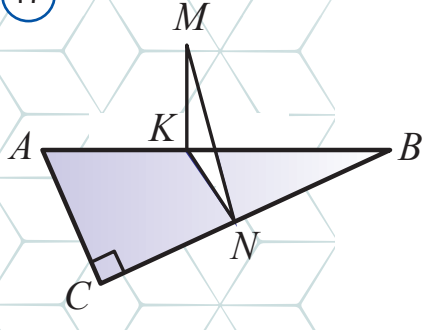
e)



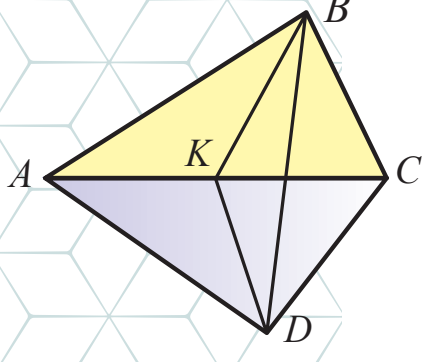
16



17



18



20.7. Докажите, что диагональные сечения AA_1C_1C и BB_1D_1D правильного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взаимно перпендикулярны.

20.8. Из точки T проходит наклонная в плоскости φ *(рис. 15)*. На каком из рисунков правильно определён угол α между плоскостью и наклоном?

20.9. Если треугольная пирамида $ABCD$ имеет прямые углы DAB, DAC, ACB, $AC = CB = 5$ и $DB = 5\sqrt{5}$, найдите двугранный угол $ABCD$.

20.10. Докажите, что плоскость линейного угла двугранного угла перпендикулярна в каждом его сечении.

20.11. Две точки, лежащие на одной гипотенузе двустороннего угла, удалены от его ребра на 51 cm и 34 cm соответственно. Если известно, что первая из этих точек лежит на расстоянии 15 cm от другой точки, найдите расстояние от этой стороны до второй точки.

20.12. Прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) и квадратная плоскость $ACPR$ взаимно перпендикулярны *(рис. 16)*. Сторона квадрата 6 cm, гипотенуза треугольника 10 cm. Найдите длину участка BP.

20.13. Отрезок MK перпендикулярен плоскости прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) *(рис. 17)*. Если $KN \parallel AC$, $AK = KB$, $AC = 12$ cm, $MK = 8$ cm, найдите длину отрезка MN.

20.14. Плоскости равносторонних треугольников ABC и ADC перпендикулярны *(рис. 18)*. AC – общая прямая. BK – медиана треугольника ABC. Если $BK = 8$ cm, $DK = 15$ cm, найдите длину отрезка BD.

20.15. Через сторону основания правильной прямоугольной пирамиды была проведена перпендикулярная плоскость к противоположной стороне. Сторона основания $a = 30$ cm, высота пирамиды $h = 20$ cm. Определите площадь полученного сечения.

При поддержке GeoGebra

Определение расстояния от точки до плоскости с помощью 3D калькулятора.

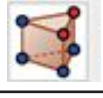
Правильная шестиугольная призма, все рёбра которой равны 1, опущена перпендикулярно плоскости CC_1E_1 с вершины A. Найдите расстояние от вершины A призмы до этой плоскости.

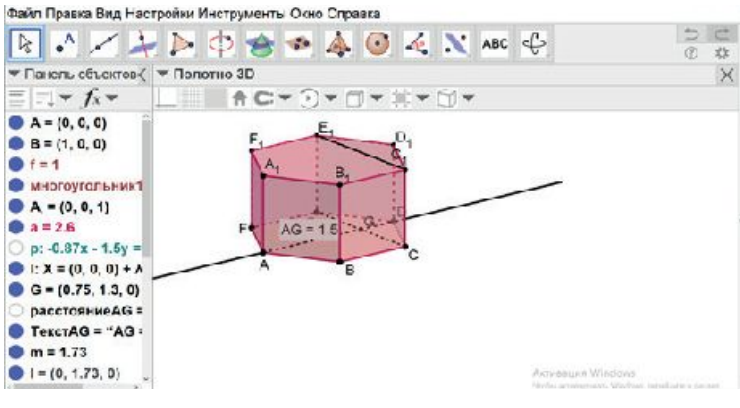
Выполнение:

• Откройте новое окно в GeoGebra.

• Переключите интерфейс GeoGebra в режим «Настроить» – «3D-графика».

Этапы определения расстояния:

1		**Ввод**	Создаётся точка A=(0,0,0).
2		**Ввод**	Создаётся точка B=(1,0,0).
3		**Правильный многоугольник**	Образуется правильный шестиугольник со стороной 1.
4		**Призма**	Построена правильная шестиугольная призма с ребром, равным 1.
5		**Переименовать**	Соответствующие точки переименовываются как A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 соответственно.
6		**Плоскость через 3 точки**	Создаётся плоскость CC_1E_1.
7		**Перпендикуляр-ная прямая**	От вершины A призмы CC_1E_1 на плоскость опускается перпендикулярная призма.
8		**Пересечение**	Определяется точка G – точка пересечения точки A и плоскости CC_1E_1.
9		**Расстояние или длина**	Расстояние между вершиной A призмы и точкой G определяется: AG = 1,5.

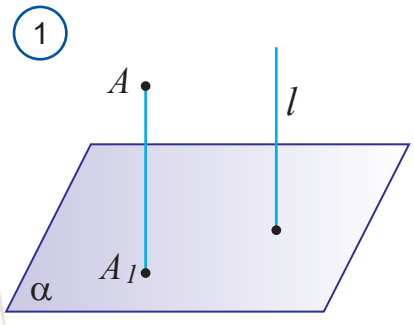


Задания для самостоятельного выполнения

1. Найдите длину перпендикуляра от вершины A к плоскости CC_1D_1 правильной шестиугольной призмы, все стороны которой равны 1.

2. Найдите длину перпендикуляра к плоскости AB_1C_1 из конца A_1 прямоугольной треугольной призмы, все стороны которой равны 1.

21 ОРТОГОНАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ И ЕЁ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ТЕХНИКЕ



Если направление проецирования l перпендикулярно плоскости проецирования α, такое параллельное проецирование называется *ортогональным проецированием*.

На рис. 1 показана ортогональная проекция точки A на плоскость — точка A_l, где $l \perp \alpha$.

Форма, созданная ортогональной проекцией, называется *ортогональной проекцией* или короткой *проекцией* данной формы.

На рис. 2 показаны ортогональные проекции различных пространственных форм на плоскость α.

Поскольку ортогональная проекция является частным случаем параллельной проекции, все свойства параллельной проекции справедливы и для ортогональной проекции.

В ортогональной проекции:

а) точка к точке, отрезок к отрезку, прямая к прямой;

б) проекции параллельных прямых параллельны или совпадают;

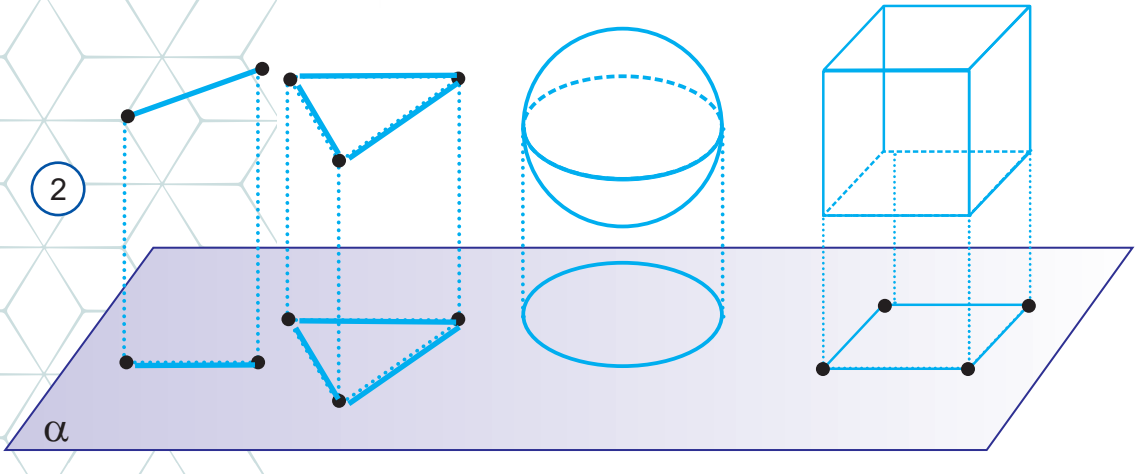
в) проекция линейных отрезков фигур также состоят из отрезков;

г) проекция параллельных участков фигуры также состоит из параллельных участков;

д) отношение длин участков, лежащих на одной прямой или параллельных прямых, равно отношению длин их проекций, соотношение длин участков сохраняется.

Разумеется, эти свойства справедливы для не параллельных отрезков и прямых линий, не параллельных направлению проекции.

По словам великого итальянского учёного Галилео Галилея, «геометрия – мощнейший инструмент для оттачивания наших умственных способностей, дающий нам возможность правильно мыслить и рассуждать».



Ниже мы докажем важное свойство, применимое только к ортогональной проекции.

Теорема 4.15. Грань ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению косинуса угла между гранью многоугольника и его плоскостью на плоскость проекции.

Доказательство. Сначала рассмотрим свойство треугольника и его проекцию на плоскость, проходящую через одну из его сторон. Допустим, что проекцией треугольника ABC на плоскость α является треугольник AB_1C (рис. 3).

Вычитаем высоту BK треугольника ABC. По теореме о трёх перпендикулярах сечение B_1K является высотой треугольника KBB_1.

Угол BKB_1 – это угол φ между плоскостью треугольника и плоскостью проекции. В треугольнике BKB_1:

в этом случае $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot KB$,

$$S_{\triangle AB_1C} = \frac{1}{2} AC \cdot KB_1 = \frac{1}{2} AC \cdot KB \cdot \cos\varphi = S_{\triangle ABC} \cdot \cos\varphi.$$

Как результат, имеем $S_{\triangle AB_1C} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos\varphi$.

2. Теорема верна и тогда, когда вместо плоскости α берётся другая плоскость β, параллельная α (*рис.4*). Это доказывается с помощью свойства параллельной проекции.

3. Теперь перейдём к общему многоугольнику (*рис.5*). В этом случае теорема доказана путём деления многоугольника на треугольники по диагоналям, выше показан частный случай.

Эти проекции также называют *вертикальными*, *горизонтальными* и *фронтальными проекциями*, в зависимости от того, в каком направлении они проецируются.

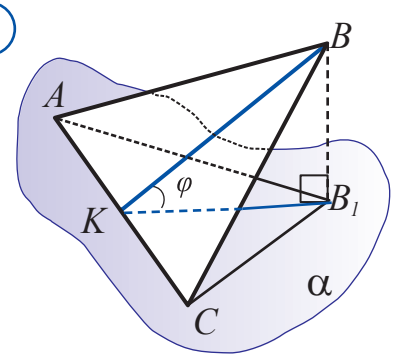
Ортогональная проекция используется для проектирования различных деталей в техническом чертеже. Чертежи различных деталей машин создаются ортогональным проецированием на одну, две или три взаимно перпендикулярные плоскости проекций.

Пример. Ортогональная проекция треугольника ABC состоит из треугольника ACB_1 со сторонами 13 cm, 14 cm и 15 cm (рис. 3). Плоскость треугольника образует с плоскостью проекции угол 60°. Найдите сторону треугольника ABC.

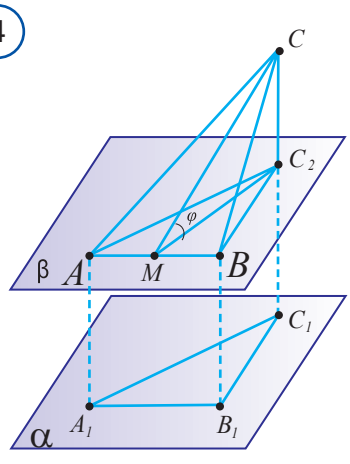
Решение. Известно, что, согласно теореме 4.15, поверхность треугольной проекции находится по формуле $S_{\triangle AB_1C} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos\varphi$.

Здесь φ – угол между плоскостью треугольника и плоскостью проекции.

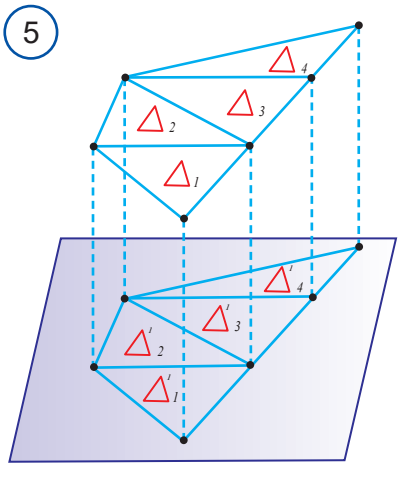
3



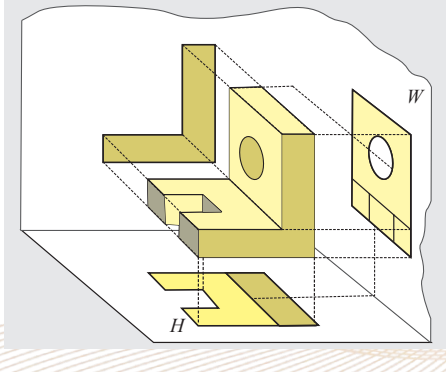
4



5



6



Вычислим площадь треугольника ACB_1 по формуле Герона:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21$$

$$S_{\triangle AB_1C} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= \sqrt{21\cdot(21-13)\cdot(21-14)\cdot(21-15)} = 84$$

$$S_{\triangle AB_1C} = \frac{S_{\triangle ABC}}{\cos\varphi} = \frac{84}{\cos 60^\circ} = 84 : \frac{1}{2} = 168$$

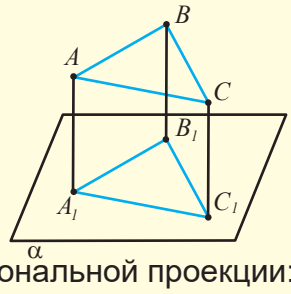
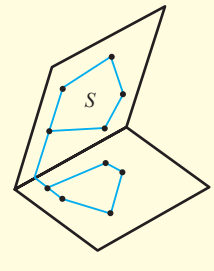
Ответ: 168 cm^2.

Вопросы и упражнения по теме

1. *Что такое ортогональная проекция?*
2. *Перечислите свойства ортогональной проекции.*
3. *Как найти поверхность ортогональной проекции многоугольника на плоскость?*
4. *Как ортогональная проекция используется в технике?*

Практические упражнения

21.1. В таблице содержится основная информация 21-й темы. Внимательно изучите её и объясните.

Ортогональная проекция в пространстве	Грань многоугольной проекции
 В ортогональной проекции: $l \perp \alpha$. l – направление проекции; α – плоскость проекции.	 $S_1 = S \cdot \cos\varphi$ S – площадь многоугольника; S_1 – площадь многоугольной ортогональной проекции; φ – угол между многоугольником и плоскостями проекций.

21.2. Может ли ортогональная проекция трапеции быть а) квадратом; б) отрезком; в) прямоугольником; г) параллелограммом; д) трапецией?

21.3. Назовите геометрические фигуры, ортогональной проекцией которых является правильный четырёхугольник согласно рисунку 7.

21.4. Отрезок A_1B_1 является ортогональной проекцией отрезка AB на плоскость α (*рис. 8*). Найдите длину отрезка B_1C_1 при условии, что AB = 20 $см$, AC = 10 $см$, A_1B_1 = 12 $см$.

21.5. Ортогональная проекция отрезка AB длиной 5 $см$ на плоскость ω состоит из отрезка AC длиной 3 $см$ (*рис. 9*). Найдите косинус угла отклонения сечения AB от плоскости ω.

21.6. Дан правильный треугольник со стороной a. Найдите поверхность его ортогональной проекции на плоскость, составляющую угол: а) 30°; б) 45°; в) 60° с плоскостью треугольника.

21.7. Равносторонние треугольники ABC и ABD с общей стороной AB лежат в разных плоскостях.

Найдите сторону ортогональной проекции треугольника ABC на треугольник ABD, если а) AB = 24 $см$, AC = 13 $см$, AD = 27 $см$, CD = 35 $см$; б) AB = 32 $см$, AC = 65 $см$, AD = 20 $см$, CD = 63 $см$. Найдите также сторону ортогональной проекции треугольника ABD на треугольник ABC.

21.8. Если расстояние от прямой AB до точки C *(рис. 10)* вдвое больше расстояния от точки C до плоскости ABD, найдите угол между плоскостями ABC и ABD.

21.9. Площадь треугольника ABC равна 18 $см^2$ (рис. 11). $KC \perp ABC$. Найдите сторону треугольника ABK, если угол между плоскостями треугольников ABK и ABC равен а) 30°; б) 45°; в) 60°.

21.10. Угол между плоскостями треугольников ABC и ABD равен 60°. Если AB = 4, найдите длину CD.

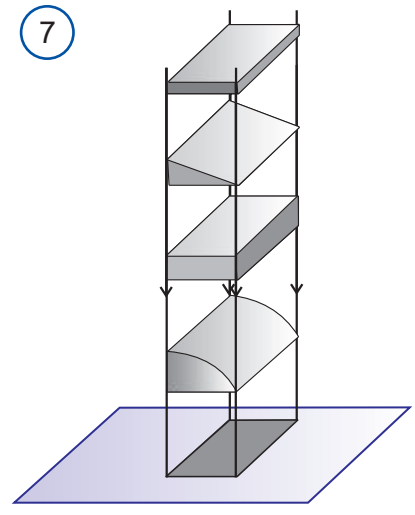
21.11. Площадь прямоугольника равна 72. Его ортогональная проекция на плоскости – квадрат. Плоскость прямоугольника составляет с плоскостью проекции угол в 60°. Найдите периметр квадрата.

21.12. Ортогональная проекция треугольника площадью 48 $см^2$ построена из треугольника со сторонами 14 $см$, 16 $см$ и 6 $см$. Вычислите угол между плоскостью этого треугольника и его проекцией.

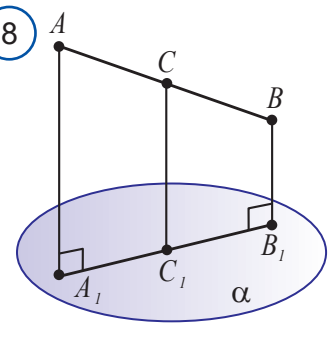
21.13. Ортогональная проекция треугольника площадью 12 $см^2$ построена из треугольника со сторонами 13 $см$, 14 $см$ и 15 $см$. Вычислите угол между плоскостью этого треугольника и его проекцией.

21.14. Ортогональная проекция равностороннего треугольника с основанием 8 $см$ и стороной 12 $см$ состоит из треугольника со сторонами 8 $см$, 6 $см$ и 6 $см$. Найдите угол между плоскостью этого треугольника и его проекцией.

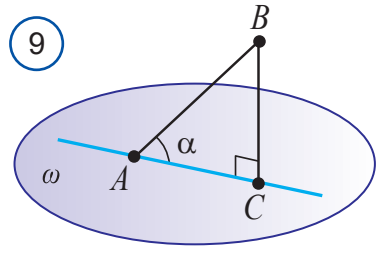
7



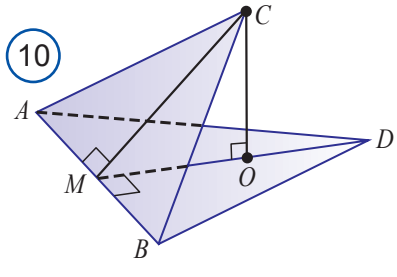
8



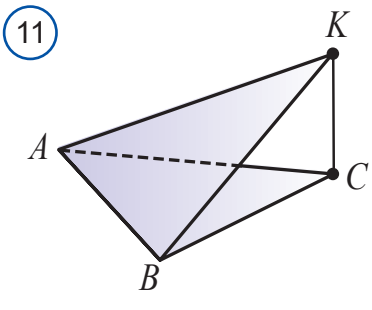
9



10



11



22 ПРАКТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ НА ПОВТОРЕНИЕ ГЛАВЫ

22.1. Какой из полученных выводов неверный?

А) Если две прямые, лежащие в одной плоскости, параллельны двум прямым, лежащим в одной плоскости, то эти плоскости параллельны.

Б) Если две прямые параллельны прямой, то они взаимно параллельны.

В) Если прямая, лежащая на плоскости, перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна и самой прямой.

Г) Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то эта прямая также перпендикулярна плоскости.

Д) Наклонная и её проекция на плоскость на наименьший из внешних углов и плоскостей называются *внешними углами*.

22.2. Какое из следующих утверждений неверно?

А) Если две прямые в пространстве параллельны третьей прямой, то они параллельны друг другу.

Б) Прямая, проведённая перпендикулярно от основания плоскости к её проекции, также перпендикулярна самой плоскости.

В) Через три точки пространства может пройти только одна плоскость.

Г) Соотношение отрезков прямой или параллельных прямых не меняется при параллельной проекции (проецируемые отрезки не параллельны направлению проекции).

Д) Если прямая, лежащая вне плоскости, параллельна прямой в этой плоскости, то эта прямая и плоскость параллельны друг другу.

22.3. Из вершины BM правильного четырёхугольника опущен отрезок BM, перпендикулярный плоскости. Докажите, что а) прямая AD перпендикулярна плоскости, на которой лежат прямые AB и BM; б) прямая CD перпендикулярна плоскости, на которой лежат прямые BC и BM.

22.4. Из точек A и B проведены прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие её в точках C и D соответственно. Если AC = 3 m, BD = 2 m, CD = 2,4 m и прямая AB не пересекает плоскость α, найдите расстояние между точками A и B.

22.5. Найдите длину диагонали прямоугольного параллелепипеда по трём его измерениям: а) 1, 2, 2; б) 2, 3, 6; в) 6, 6, 7.

22.6. Ребро куба равно a. Найдите расстояние от одного конца куба до диагонали, соединяющей два других его конца.

22.7. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 7 cm и 24 cm, а высота 8 cm. Найдите площадь диагонального сечения параллелепипеда.

22.8. Найдите площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда в трёх измерениях: 10 $см$, 22 $см$, 16 $см$.

22.9. Найдите боковую поверхность прямоугольного параллелепипеда, если его высота h, площадь основания Q, а площадь диагонального сечения M.

22.10. Диагонали сторон, сходящихся на одной вершине прямоугольного параллелепипеда, равны a, b, c (*рис. 1*). Найдите длины трёх измерений параллелепипеда.

22.11. Угол между перпендикуляром и наклонной равен 60°. Длина перпендикуляра равна 20. Найдите длину наклонной.

22.12. Угол между наклонной и перпендикуляром плоскости равен 60°, длина линии $20\sqrt{3}$ Найдите длину перпендикуляра.

22.13. Угол между перпендикуляром к плоскости и наклонной равен 30°, а длина перпендикуляра равна 10°. Найдите длину линии.

22.14. От точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длину наклонных, если их соотношения равны 1:2, а их проекции равны 1 и 7.

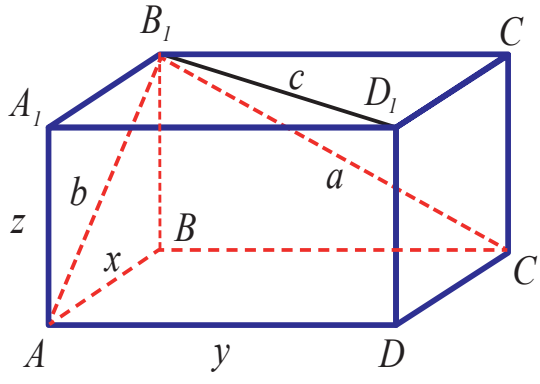
22.15. Через вершину B прямого угла треугольника ABC проведена прямая b, перпендикулярная плоскости треугольника. Найти расстояние между прямой b и AC, если AB = 3 и BC = 4.

22.16. Вершины двух отрезков длиной 10 $см$ и 15 $см$ лежат в параллельных плоскостях. Если проекция первого отрезка на плоскость равна $\sqrt{19}$ $см$, то сколько $см$ будет проекция второго отрезка?

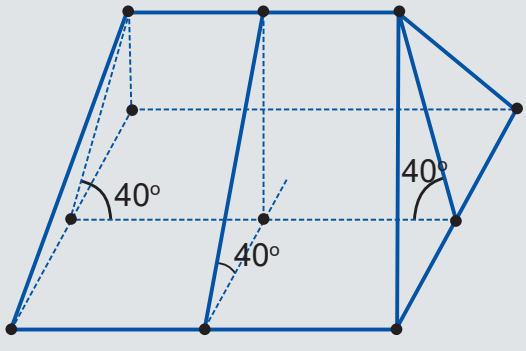
22.17. Крыша дома размерами 12,5 $м$ на 7,2 $м$ закрыта с четырёх наклонных сторон, как показано на рисунке 2. Каждая сторона образует угол 40° с плоскостью крыши.
а) найдите площадь каждой наклонной стороны; б) найдите общую площадь всех скатов крыши; в) сколько олова потребуется для покрытия всей крыши, если известно, что 6% его уходит впустую при покрытии?

22.18. AB и CD – параллельные отрезки, лежащие в двух плоскостях, пересекающихся под углом 60°. Точки A и D находятся на расстоянии 8 $см$ и 6,3 $см$ от линии пересечения плоскостей. Найдите расстояние между AB и CD.

1



2 a)



b)



Вопросы, связанные с формированием практических компетенций

1. Как проверить перпендикулярность к полу линии соединения стен двух смежных комнат с помощью замеров?

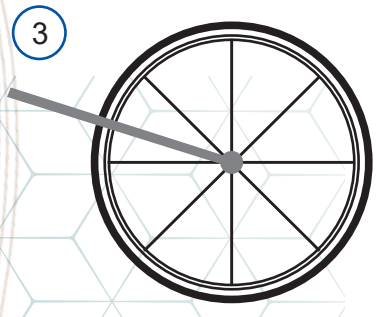
2. Как проверить вертикальность колонны с помощью прибора для измерения длины – рулетки?

3. Как проверить, что плоскость оси колеса перпендикулярна плоскости, по которой оно катится?

4. Почему можно сказать, что сосульки, свисающие зимой с крыши, параллельны друг другу, независимо от их толщины?

5. Студент выполнил практическую работу. Для проверки вертикальности нескольких установленных стоек проверил только одну из них. Вертикальность остальных колонн проверял следующим образом: принимал решение, измеряя высоту всех колонн, расстояния между их нижними основаниями и верхними концами. Правильно ли он сделал?

3

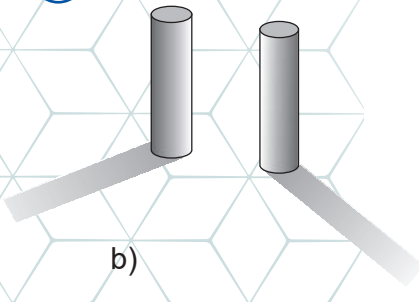


6. Почему дверь перпендикулярна полу независимо от того, открыта она или закрыта?

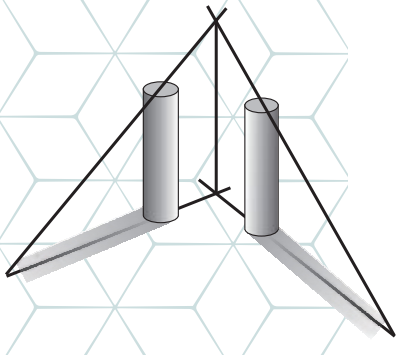
7. В качестве наглядного примера перпендикулярности прямой к плоскости можно привести расположение плоскости, на которой лежат спицы колеса относительно его оси *(рис. 3)*. Ось перпендикулярна каждой спице колеса. Во время движения спицы колеса образуют круговую плоскость, состоящую из поперечных сечений, пересекающихся в каждой точке. В какой плоскости вращается колесо, если ось расположена горизонтально? Почему?

4

a)



b)



Подсказка: перпендикуляр к оси колеса перпендикулярен плоскости.

8. Выполняется упражнение по прыжкам в высоту. Для установки барьерного стержня на заданную высоту используются куб со стороной 25 $см$ и прямоугольные параллелепипеды размером 25 $см$ x 25 $см$ x 50 $см$. Как организовать прыжковые упражнения на рост: 1) 125 $см$; 2) 150 $см$; 3) 175 $см$.

9. На рисунке 4 изображены два вертикальных столба и их тень. Используя эти данные, найдите точку, в которой находится источник света (лампа), и его проекцию на горизонтальную плоскость, и ответьте на следующие вопросы.

1) имеет ли значение вертикальность столбцов? 2) имеет ли значение горизонтальность плоскости, на которую падает тень? 3) Все ли данные, представленные на рисунке, верны?

Решение. На рис. 4 показана соответствующая конструкция. Ориентация столбов не важна для определения источника света, но важна их вертикальность. Если

столбцы вертикальны и тень падает на горизонтальную плоскость, для решения задачи достаточно знать тень одного столбца на картинке и направление падения тени от второго столбца *(рис. 4б)*.

10. Квадратная стальная платформа толщиной 5 m и площадью поверхности 4 m^2 подвешена горизонтально за четыре конца на тросе. Длина каждого троса 2 метра. Найдите угол наклона тросов относительно платформы. Можно ли разместить на этой платформе цилиндрический резервуар высотой 0,9 m и диаметром основания 0,6 m?

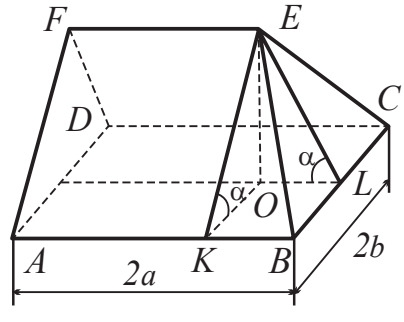
Ответ: 45°, бак можно поставить.

11. Вода проецируется ортогонально на основание крыши и течёт со всех четырёх сторон. Докажите, что проекция рёбер крыши является биссектрисой угла основания прямоугольной крыши.

12. На дом, основание которого представляет собой прямоугольник $ABCD$, следует установить крышу с четырьмя сторонами водостока *(рис. 5)*. $AB = 2a$ m, $BC = 2b$ m. Все стороны крыши образуют угол a с плоскостью основания. Сколько кровельных листов потребуется, чтобы покрыть эту крышу? Учтите, что k процентов поверхности крыши тратится впустую.

Ответ: $4ab\,(1 + 0{,}01k) / \cos\alpha$.

5



13. В безветренную погоду идет дождь. Как определить наклон дождя относительно горизонтальной плоскости с помощью прямоугольного куска фанеры? Нарисуйте подходящую схему.

Инструкция. Кусок фанеры должен располагаться таким образом, чтобы его плоскость была примерно перпендикулярна плоскости, определяемой траекторией капель дождя и их проекцией на горизонтальную плоскость. Затем на горизонтальной плоскости образуется правильный прямоугольник, куда не попадает дождь. Затем измеряют длины соответствующих участков и вычисляют тангенс угла между ними.

14. Детскую люльку площадью S_1 и длиной n снаружи нужно накрыть двумя одинаковыми покрывалами. Площадь каждого покрывала равна S_2, а длина равна длине люльки. Оба покрывала крепятся к натянутой на определённой высоте проволоке параллельно основанию, равному длине люльки. Найдите высоту, на которой натянута проволока.

Решите задачу в следующих числовых условиях: $n = 1$ m 20 cm, $S_1 = 6000$ cm^2, $S_2 = 7800$ cm^2. Нарисуйте соответствующий чертёж.

Подсказка $\dfrac{\sqrt{4S_2^2 - S_1^2}}{2n}$. **Ответ:** 0,5 m.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Тесты

1. Какое утверждение верно?

А. Если одна из двух прямых перпендикулярна третьей прямой, то вторая прямая также перпендикулярна этой прямой.

Б. Две прямые параллельны, если они перпендикулярны третьей прямой.

В. Если две прямые перпендикулярны плоскости, то они параллельны.

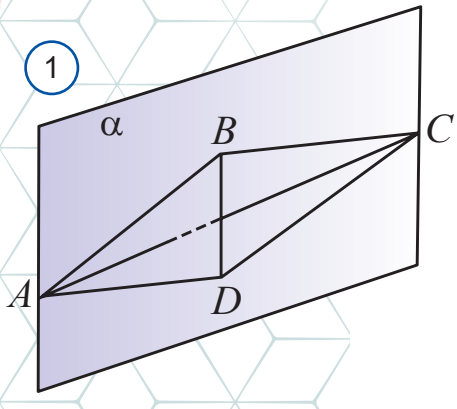
2. Прямая m перпендикулярна прямым a и b, лежащим в плоскости α, но прямая m не перпендикулярна плоскости a. Что можно сказать о прямых a и b? Они:

А) параллельны

Б) пересекаются

В) скрещиваются

1



3. Через вершину A ромба $ABCD$ проходит плоскость α, перпендикулярная диагонали AC. Таким образом, отрезок диагонали BD…

А) перпендикулярен плоскости α

Б) параллелен плоскости α

В) лежит на плоскости α

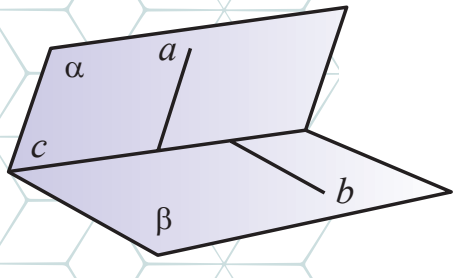
4. $a \parallel \alpha$, $b \perp \alpha$. Какими в этом случае не могут быть прямые a и b?

А) пересекающимися прямыми

Б) перпендикулярными прямыми

В) параллельными прямыми.

2



5. $ABCD$ – параллелограмм, $BD \perp \alpha$, $AC \perp \alpha$ (рис. 1). Тогда чем не может быть $ABCD$?

А) прямоугольником

Б) квадратом

В) ромбом.

6. Прямая перпендикулярна плоскости окружности, если она...

А) если она перпендикулярна двум радиусам;

Б) если она перпендикулярна двум диаметрам;

В) если она перпендикулярна двум прямым.

7. $\alpha \cap \beta = c$, $a \in \alpha$, $b \in \beta$ (*рис. 2*). При каком условии угол $\angle(ab)$ – α и β будет линейным углом двугранного угла между плоскостями?

A) $b \perp \alpha$

B) $a \perp c$

C) $a \perp c,\ b \perp c$

8. Какое утверждение верно?

А) Ребро двустороннего угла не может быть перпендикулярно плоскости его линейного угла.

Б) Две плоскости, перпендикулярные одной и той же плоскости, не могут быть параллельны.

В) Две плоскости, перпендикулярные одной прямой, не могут быть параллельны.

9. $ABC \perp ABD$ *(рис. 3)*. Основание перпендикуляра, проведённого из точки D к плоскости ABC ...

А) лежит вне треугольника ABC;

Б) лежит на стороне AB;

В) лежит внутри треугольника ABC.

10. Какое утверждение неверно?

1) Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

2) Если плоскости перпендикулярны, то линия их пересечения перпендикулярна любой прямой, лежащей в одной из этих плоскостей.

3) Плоскость, перпендикулярная линии пересечения двух данных плоскостей, перпендикулярна каждой из этих плоскостей.

11. Сколько двусторонних углов у параллелепипеда?

A) 18

B) 12

C) 24

12. В треугольнике ABC AN и CM – высоты *(рис. 4)*. $DO \perp ABC$. Какому линейному углу равен двугранный угол $ABCD$?

А) ABD

В) AND

С) ACD

13. $AF \perp \alpha$ *(рис. 5)*. Какое неравенство неуместно?

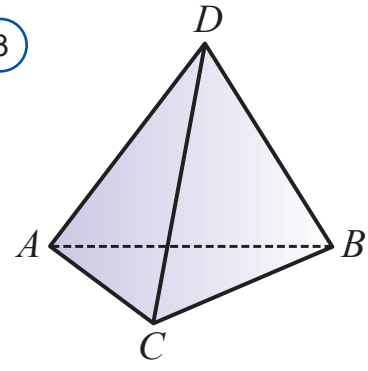
А) $FM > AF$

В) $FA > FK$

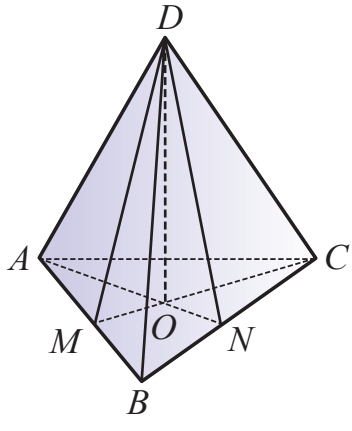
С) $AK < FK$

14. $BF \perp ABC$ *(рис. 6)*. Каким должен быть $ABCD$, чтобы CD и CF были перпендикулярны?

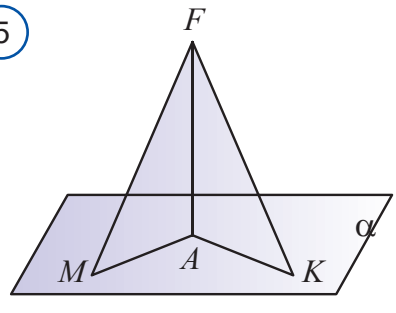
3



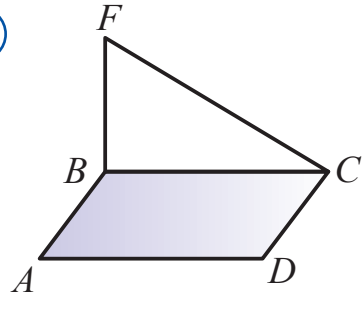
4



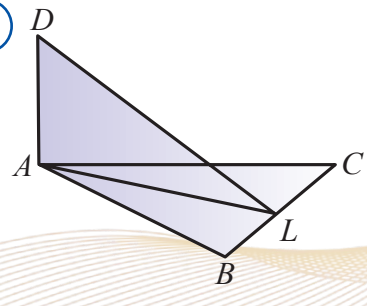
5



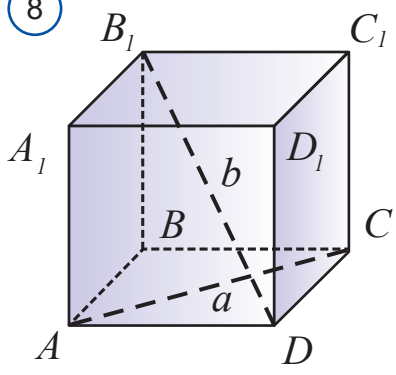
6

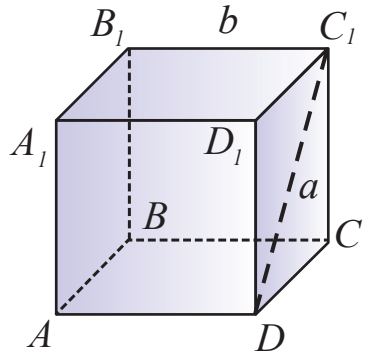


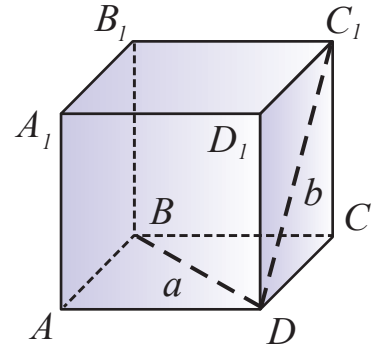
7



8





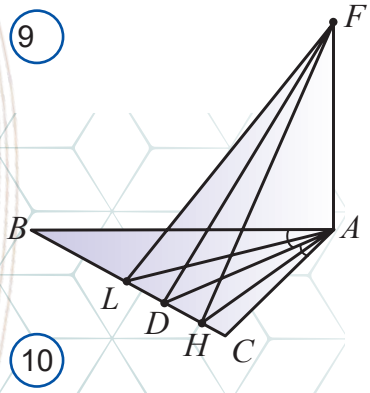


А) прямоугольник

Б) ромб

В) квадрат

9



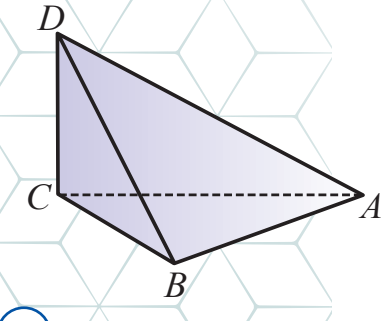
15. Чем должен быть LA, чтобы DL и BC были перпендикулярны *(рис. 7)?*

А) биссектриса

Б) медиана

В) высота

10



16. Точка M равноудалена от вершин треугольника ABC. Из какой точки пересечения отрезков будет состоять проекция точки M на плоскость ABC?

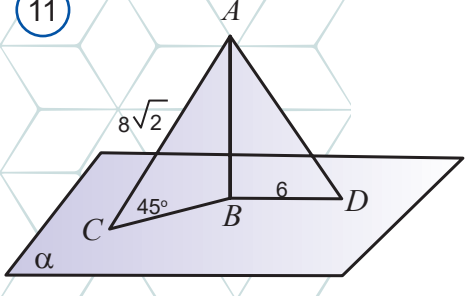
А) высоты треугольника

Б) биссектрисы треугольника

В) средних перпендикуляров, опущенных к сторонам треугольника

17. На рис. 8 показан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На каком рисунке прямые a и b не перпендикулярны?

11



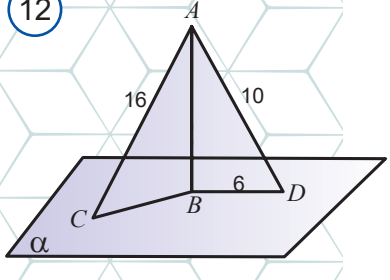
18. В треугольнике ABC медиана AL, биссектриса AD, высота AH (*рис. 9*). $AF \perp ABC$. Расстояние от точки F до прямой BC равно длине какого отрезка?

А) FM

Б) FD

В) FH

12



19. В тетраэдре $ABCD$ (*рис. 10*) $\angle BCD = \angle ACD = 90°$. Перечислите все рёбра, перпендикулярные CD.

А) AB, CB, CA Б) AB, BD, AD

В) CB, CA Г) AB

20. Перпендикуляры AB, AC и AD проведены из точки A в плоскость α (*рис. 11*). $\angle ACB = 45°$, $AC = 8\sqrt{2}$, $BD = 6$. Найдите AD.

А) $2\sqrt{13}$;

Б) 10;

В) 14

Г) 4

21. Отрезок AB перпендикулярен плоскости α (рис. 12). Построены наклонные AD и AC. $BD = 6$, $AD = 10$, $AC = 16$. Найдите $\angle ACB$.

А) 45°

Б) 30°

В) 60°

Г) 90°

Примеры

1. Отрезок KC перпендикулярен плоскости треугольника ABC, отрезок KB перпендикулярен AB.

1) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

2) Докажите, что плоскости KAC и ABC перпендикулярны.

3) Если $AC = 14$, $BC = 6$ и $\angle KBC = 45°$, найдите длину отрезка KB.

2. Из точки A к плоскости α проведены линии AB и AC, образующие с плоскостью угол 60°. Если $BC = AC = 6$, найдите AB.

3. Отрезок KA перпендикулярен плоскости ABC. Точка M является серединой отрезка BC. Прямая KM перпендикулярна отрезкам BC и $AB = BC$.

1) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

2) Докажите, что плоскости KBC и KAM перпендикулярны.

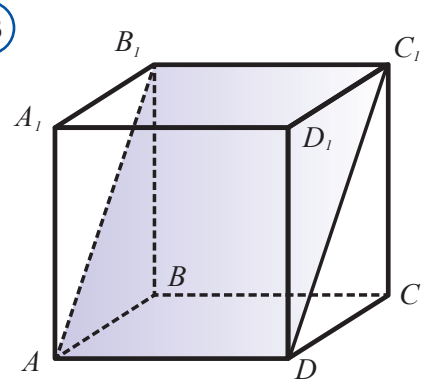
4. Если в задаче $BK = 8$, $KA = 39$, $BC = 6$, найдите площадь треугольника ABC.

5. Точка S находится на расстоянии 3 *см* от вершин прямоугольного треугольника. Найдите двугранный угол $SABC$, если $AB = 9$.

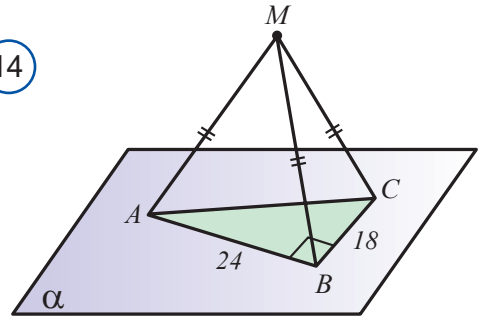
6. Точка O лежит на биссектрисе угла ABC, равного 60°. Отрезок DO перпендикулярен плоскости ABC, $AB = AC$.

1) Докажите, что точка D равноудалена от точек A и C.

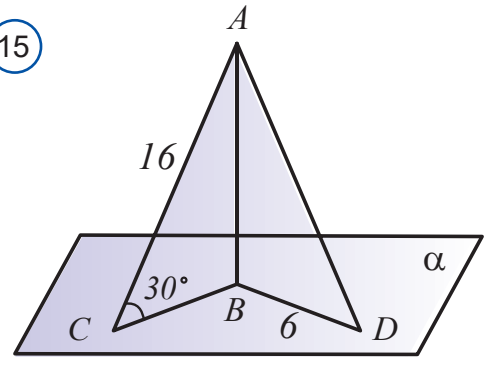
13



14



15



2) Докажите, что плоскости DAC и DOB перпендикулярны.

3) Найдите DB, если $AC = 12$ и $DO = 8$.

7. На рис. 13 показан куб. $AD = 42$. Найдите расстояние между плоскостью AB_1C_1D и прямой A_1D_1.

8. Равносторонние треугольники ABC и ADC имеют общее основание AC. $BASD$ – прямой угол. Если $\angle ACD = 45°$ и $\angle CAB = 60°$, найдите двугранный угол $DCBA$.

9. На рис. 14 $\angle ABC = 90°$, $MA = MB = MC$. Расстояние между плоскостью треугольника ABC и точкой M равно 8. Найдите длину отрезка MA.

10. Прямая SA проходит через вершины прямоугольника $ABCD$ и перпендикулярна его сторонам AB и AD. Докажите, что плоскости SAD и ABC перпендикулярны.

11. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 4. Найдите расстояние между прямыми AB и CC_1.

12. Плоскости равносторонних треугольников ABD и ABC с общим основанием взаимно перпендикулярны. Если $AD = \sqrt{31}$ cm, $AB = 6$ cm, $\angle ACB = 60°$, найдите CD.

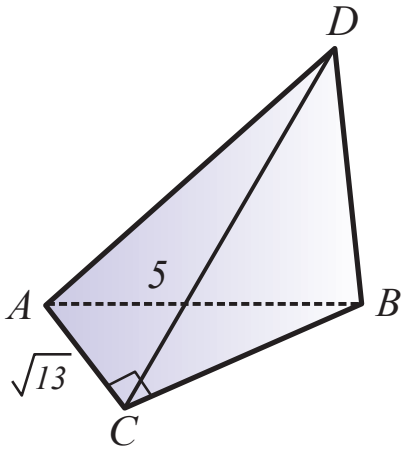
13. Перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой l. Отрезки OA и OB, лежащие в плоскостях α и β, соответственно перпендикулярны прямой l, а их общая вершина — точка O – лежит на прямой l. Если $OA = 20$ cm, $OB : AB = 12:13$, найдите AB.

14. Через вершину B равностороннего треугольника ABC проведена плоскость, параллельная основанию AC. Площадь треугольника – 48 cm^2. Если основание $AC = 12$ cm, и оно находится на расстоянии 5 cm от плоскости, найдите углы наклона сторон треугольника к этой плоскости.

15. $AB \perp \alpha$, $\angle ACB = 30°$, $AC = 16$ cm, $BD = 6$ cm. Найдите AD.

16. В треугольнике ABC гипотенуза $ACB = 90°$, $AB = 5$ cm, $AC = \sqrt{13}$ cm (*рис. 16*). $BD \perp ABC$, $\angle(CD, ABC) = 30°$. Найдите длину перпендикуляра BD.

16



С древних времен геометрия помогала людям познавать мир. Например, окружность Земли точно вычислил древнегреческий ученый Эратосфен за несколько столетий до того, как люди признали, что Земля имеет сферическую форму. Эратосфен использовал для этого геометрические правила. Современные измерения показывают, что он почти не ошибался — разница между старыми и новыми измерениями оказалась незначительной. Он обнаружил, что когда Солнце находится над Сиеной (город в Африке), оно отклоняется от вертикали на 70 градусов по сравнению с Александрией, которая находится в 800 км. Эратосфен пришел к выводу, что Солнце видно под углом 70° от центра Земли, и поэтому окружность Земли равна 360 : 7 x 800 = 41140 km.



ГЛАВА V

ПОВТОРЕНИЕ

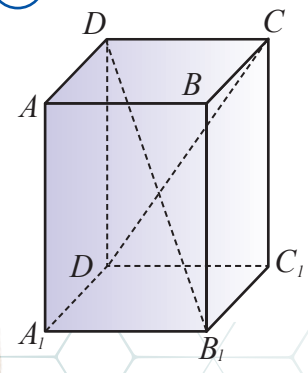
В результате изучения данной главы вы закрепите навыки, сформированные в 10 классе:

– перпендикуляры к плоскости и наклонные;
– угол между прямой и плоскостью;
– параллельные прямые и плоскости;
– прямая, параллельная плоскости;
– параллельные плоскости;
– перпендикулярные плоскости.

23 ПОВТОРЕНИЕ

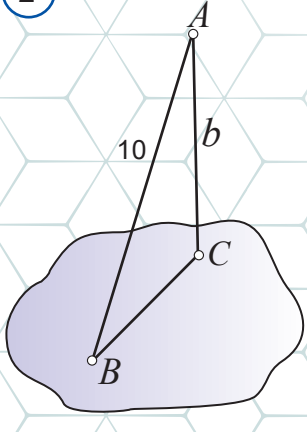
1. Перпендикуляры и наклонные к плоскости

1



1. На рис. 1 изображён прямоугольный параллелепипед. 1) Пересекаются ли прямые DB_1 и D_1C? Являются ли BB_1 и D_1C прямыми? 2) Можно ли провести плоскость через прямые AO и B_1C_1? DC и DB_1? BC и AA_1?
2. Стороны прямоугольного параллелепипеда равны 3 cm, 4 cm и 7 cm. Найдите площадь сечения, проведённого через концы трёх рёбер, исходящих из одного конца.
3. Основание правильной призмы состоит из треугольника, сторона которого равна a. Высота призмы b. Проведите плоскость через одну из сторон нижнего основания и противоположный конец верхнего основания. Вычислите площадь полученного сечения.
4. Из точки, взятой на прямой, проведите плоскость, перпендикулярную этой прямой.
5. Из точки, взятой за пределами прямой, проведите перпендикулярную к этой прямой плоскость.

2



6. Из точки A, находящейся на расстоянии b cm от плоскости, к этой плоскости проводится линия AB длиной 10 cm. Найдите её проекцию BC, опущенную в эту плоскость (*рис.* 2).
7. Найдите геометрическое положение точек на данной плоскости, стоящих на заданном расстоянии от точки, лежащей вне плоскости.
8. Из центра окружности проведён перпендикуляр к его плоскости. Если длина перпендикуляра равна a, а площадь круга – Q, определите расстояние от его вершины до точки на окружности.
9. Найдите геометрическое положение точек, равноудалённых от двух данных точек.
10. Прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, его боковое ребро AA_1 = 56 cm, стороны основания: AB = 33 cm и AO = 40 cm. Определите площадь поперечного сечения, проходящего через вершины AD и B_1C_1.
11. Точка O – центр квадрата со стороной a, OA – прямая, перпендикулярная плоскости квадрата, длина которой равна b. Найдите расстояние от точки A до углов квадрата.
12. Из точки M, находящейся на расстоянии d = 4 от плоскости α, к этой плоскости проведены отрезки MA, MB и MC. Углы между этими наклонными и прямой MO, перпендикулярной плоскости α, составляют: 30°, 45°, 60°. Определите длины прямых MA, MB и MC.

13. Три равные наклонные MA, MB и MC проведены из точки M в плоскость α. $MA = MB$, а точка O является проекцией точки М. Покажите, что точки A, B и C (основания наклонных в плоскости α) лежат на окружности с центром в точке O.

14. Две наклонные длиной 20 cm и 15 cm проведены в плоскость из точки пространства. Проекция первой наклонной на плоскость равна 16 cm. Найдите проекцию второй наклонной.

15. К плоскости из точки пространства проведены перпендикуляр и наклонная. Длина перпендикуляра 6 cm, длина наклонной – 9 cm. Найдите проекцию перпендикуляра к наклонной.

16. Из точки A в плоскость α (*рис. 3*) проведены перпендикуляр AO и равные друг другу наклонные AB и AC. Наклонные с перпендикуляром образуют $\angle BAO = CAO = 60°$, $CAB = 90°$. $AO = 1$ cm. Найдите расстояние BC между основаниями наклонных.

17. Основание и высота равностороннего треугольника равны 4 cm. Данная точка находится на расстоянии b cm от плоскости треугольника и на расстоянии, равном его вершинам. Найдите это расстояние.

18. Дан равносторонний треугольник ABC, его основание $b = 6$ cm, а сторона $a = 5$ cm. Из центра O окружности, вписанной в треугольник, перпендикулярно плоскости треугольника проходит перпендикуляр $OK = 2$ cm. Найдите расстояние от точки K до сторон треугольника и до точки B.

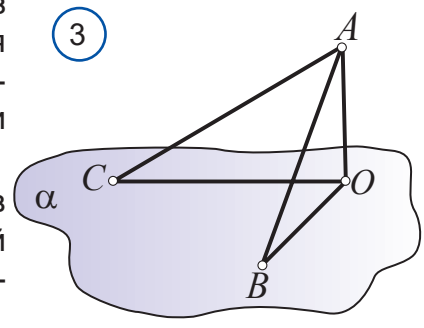
19. В треугольнике ABC угол B – прямой, катет $BC = a$. D перпендикулярен плоскости треугольника от вершины A. Если расстояние между точками D и C равно f, найдите расстояние от точки D до катета BC.

20. В треугольнике ABC угол C прямой. CD – перпендикуляр к плоскости этого треугольника. Точка D соединена с точками A и B. Если $CA = 3$ dm, $BC = 2$ dm и $CD = 1$ dm, определите площадь треугольника ABD.

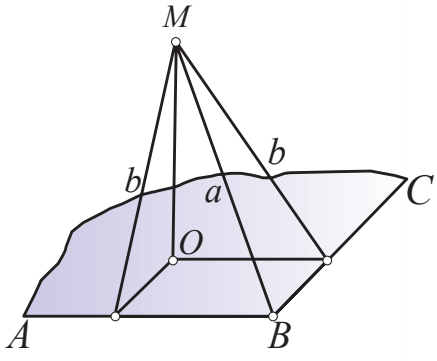
21. Из вершины A прямоугольника $ABCD$ проведён перпендикуляр AK к его плоскости, его вершина K лежит на расстоянии 6 cm, 7 cm и 9 cm от других концов прямоугольника. Найдите длину перпендикуляра AK.

22. Точки A и B лежат в плоскости α. AC и BD – перпендикуляры, опущенные на эту плоскость. Если: $AC = a$ и $BD = b$, докажите, что прямые AD и BC пересекаются, и найдите расстояние от точки их пересечения до плоскости α.

3



4



23. Точка M, не лежащая на плоскости прямоугольника, находится на расстоянии a от его вершины B, и на расстоянии b от каждой стороны прямоугольника. Каково расстояние отрезка MO от плоскости прямоугольника до точки M (*рис. 4*)?

24. AB и CD – параллельные прямые в плоскости α, расстояние между ними равно a. Вне плоскости α дана точка S на расстоянии b от отрезков AB и CD. Определите расстояние от точки S до плоскости α, если: а) $a = 66$, $b = c = 65$; б) $a = 6$, $b = 25$, $c = 29$.

25. Из вершины угла к его плоскости проведена наклонная, которая составляет со сторонами угла равные углы. Докажите, что проекцией этой наклонной является биссектриса данного угла.

2. Угол между прямой и плоскостью

1. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 4 $см$ и 3 $см$, а высота параллелепипеда 5 $см$. Найдите его диагональ и угол, который диагональ образует с плоскостью основания.

2. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с плоскостью основания параллелепипеда угол 45°. Стороны основания 120 $см$ и 209 $см$. Определите высоту параллелепипеда.

3. Высота правильной прямоугольной пирамиды равна h, угол отклонения апофемы к плоскости основания 60°. Найдите стороны пирамиды.

4. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно b и образует с основанием пирамиды угол 30°. Найдите сторону основания пирамиды.

5. Наклонная равна a. Если наклонная образует с плоскостью проекций угол: 1) 45°; 2) 60°; 3) 30°, найдите длину проекции этой прямой на плоскость.

6. Точка лежит на расстоянии h от плоскости. Найдите длину прямой, проведённой из этой точки к плоскости и составляющей с ней угол: а) 30°; б), 45°; в) 60°.

7. Под каким углом сечение должно быть наклонено к плоскости, чтобы проекция сечения на плоскость была вдвое меньше её?

8. Из точки, удалённой от плоскости, проведены две наклонные. Эти кривые образуют угол 45° с плоскостью и угол 60° друг с другом. Определите расстояние между концами наклонных.

9. Из точки, удалённой от плоскости, проводят две наклонные, образующие с плоскостью угол 30°. Их проекции на плоскость образуют угол 120°. Определите расстояние между концами наклонных.

Геометрия является одним из разделов математики. А ведь в Древней Греции между словами «математика» и «геометрия» ставился знак равенства, и даже вход в знаменитую школу Платона гласил: «Пусть сюда не входит тот, кто не знает геометрии!»

10. Прямая AB лежит в плоскости α. Из точки B проведены прямые BC и BD, перпендикулярные AB. Они находятся по одну сторону от плоскости α и наклонены к ней на 50° и 15°. Найдите угол CBD.
11. Один катет равностороннего прямоугольного треугольника лежит в плоскости α, а другой катет образует с плоскостью α угол 45°. В этом случае докажите, что гипотенуза α образует с плоскостью угол 30°.
12. Если наклонная AB образует с плоскостью α угол 45°, то прямая AC, лежащая в плоскости α, образует с проекцией диагонали AB угол 45°. Затем докажите, что $\angle BAC = 60°$.
13. Если высота правильной треугольной пирамиды равна стороне основания, докажите, что стороны образуют угол 60° с плоскостью основания.

3. Параллельные прямые и плоскости

1. Точки A и B лежат вне плоскости α. AC и BD перпендикулярны этой плоскости. $AC = 3\ m$, $BD = 2\ m$, $CD = 24\ dm$. Определите расстояние между точками A и B.
2. Вершины отрезка длиной 125 cm находятся на расстоянии 100 cm и 56 cm от плоскости. Найдите длину проекции отрезка.
3. Из точки A плоскости α проводят прямую, на ней берутся точки B и C. $AB = 8\ cm$ и $AC = 14\ cm$. Точка B находится на расстоянии 6 cm от плоскости α. Найдите расстояние от плоскости α до точки C.
4. Отрезок длиной 10 cm проходит через плоскость. Его вершины находятся на расстоянии 5 cm и 3 cm от плоскости. Найдите длину проекции отрезка на плоскость.
5. Отрезок проходит через плоскость. Его концы отстоят от плоскости на 8 cm и 2 cm. Найдите расстояние от центра отрезка до плоскости.
6. Вершины отрезка, не пересекающегося с плоскостью, удалены от плоскости на 30 cm и 50 cm. На каком расстоянии от плоскости находится точка, которая делит этот отрезок в отношении 3:7? (рассмотрите два случая)
7. На плоскость спроецирован правильный треугольник. Его вершины удалены от плоскости на 10 dm, 15 dm и 17 dm. Найдите расстояние от центра треугольника до плоскости проекций.
8. Дан отрезок AB, параллельный плоскости, его длина равна a. Отрезок BA_1, соединяющий вершину B отрезка с вершиной проекции A_1, образует угол 60° с плоскостью. Определите длину участка BA_1.
9. Из точек A и B плоскости α проводят параллельные друг другу отрезки: $AC = 8\ cm$ и $BD = 6\ cm$. Прямая, проведённая через точки C и D, пересекает плоскость α в точке E. Найдите расстояние BE, если $AB = 4\ cm$.
10. Отрезок AB, равный a, лежит на плоскости α. Отрезки AC и BF, равные b, не лежат в плоскости α. Отрезок AC перпендикулярен плоскости α, а отрезок BD образует с плоскостью α угол 30°. Определите длину CD.

4. Прямая, параллельная плоскости

1. а) Проведите из данной точки прямую, параллельную данной плоскости.
   б) Проведите из данной точки такой отрезок, чтобы его проекция на данную плоскость была равна самой себе.
2. Найдите площадь сечения, проведённого через боковое ребро и ось призмы, исходя из ребра a и бокового ребра b основания правильной треугольной призмы.
3. Из внешней точки A в плоскость α был опущен отрезок AB. Это отрезок был разделён в точке C (от A до B) в соотношении 3:4, и из него был проведён отрезок $CD = 2\ cm$, параллельный плоскости α. Через точку D к плоскости α был опущен отрезок. Найдите расстояние между точками B и E.

4. AB и CD – параллельные отрезки в двух пересекающихся плоскостях. AE и DF – перпендикуляры, проведённые к линии пересечения плоскостей. Если $AD = 5\ cm$ и $EF = 4\ cm$, найдите расстояние между отрезками AB и CD.

5. Вершины A и D параллелограмма $ABCD$ лежат в плоскости M, вершины B и C – вне её, $AD = 10\ cm$, $AB = 15\ cm$, проекции диагоналей AC и BD на плоскость M равны 13,5 cm и 10,5 cm соответственно. Определите диагонали.

6. Через одну сторону ромба проведена плоскость на расстоянии 4 cm от противолежащей стороны. Проекции диагоналей на эту плоскость равны 8 cm и 2 cm. Найдите проекции сторон ромба.

7. Через вершину прямого угла C прямоугольного треугольника ABC проведена плоскость, параллельная гипотенузе, на расстоянии 1 dm от неё (*рис.5*). Проекции катетов на эту плоскость равны 3 dm и 5 dm. Найдите гипотенузу.

8. Пусть AB и CD – две параллельные прямые, лежащие в плоскости α, на расстоянии 28 cm одна от другой, EF – прямая, параллельная AB и удалённая от AB на 17 cm, а от плоскости α – на 15 cm. Найдите расстояние между EF и CD (рассмотрите два случая).

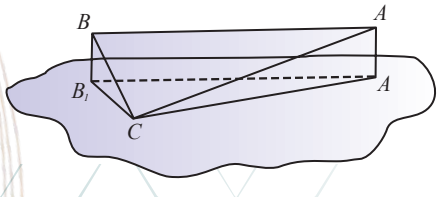
9. Из концов отрезка AB, параллельного плоскости α, проведены перпендикуляр AC и наклонная BD, перпендикулярная отрезку AC, $BD \perp AB$. Чему равно расстояние CD, если $AB = a$, $AC = b$ и $BD = c$ (*рис. 6*)?

10. Проведите плоскость, параллельную боковому ребру правильной прямоугольной пирамиды через диагональ её основания. Сторона основания равна a, а боковое ребро равно b. Определите площадь получившегося сечения.

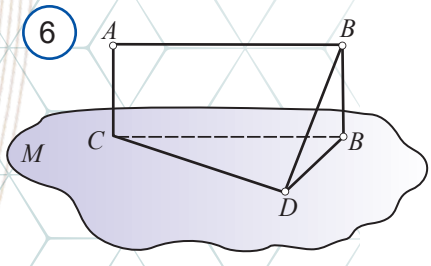
11. Сторона основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ равна a, а боковое ребро – b. Проведите плоскость, параллельную ребру SB, между ребрами AB и BC этой пирамиды. Определите площадь получившегося сечения (*рис. 7*).

12. Каждое ребро правильной прямоугольной пирамиды равно a. Проведите плоскость через середину двух соседних сторон основания и середину его высоты (*рис. 8*) и найдите её площадь.

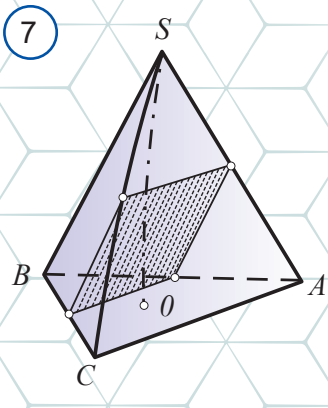
5



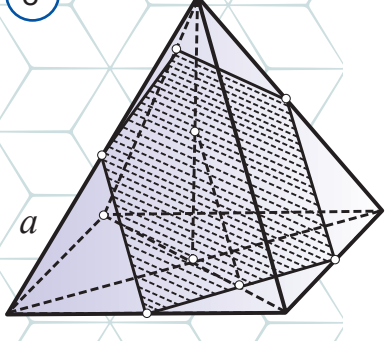
6



7



8



5. Параллельные плоскости

1. Проведите из данной точки плоскость, параллельную заданной плоскости.

2. К кубу, ребро которого равно a, проведена плоскость, проходящая через центры двух смежных сторон верхнего основания и центр нижнего основания. Вычислите периметр сечения.
3. Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно 8 dm. К ним проведён отрезок длиной 10 dm, вершины отрезка лежат на двух плоскостях. Определите проекцию отрезка на каждую плоскость.
4. Плоскости α и β параллельны. Отрезки AC = 37 cm и BD = 125 cm опущены из точек A и B плоскости α в плоскость β. Проекция наклонной AC на одну из плоскостей равна 12 cm. Найдите длину проекции прямой BD.
5. Между двумя параллельными плоскостями проведены перпендикуляр длиной 4 m и наклонная длиной 6 m. В каждой плоскости расстояние между их вершинами равно 3 m. Найдите расстояние между серединами перпендикуляра и наклонной.
6. Вершины двух отрезков, сумма длины которых равна c, лежат на двух параллельных плоскостях. Найдите длины отрезков, если их проекции равны a и b.
7. Отрезки AC и BD лежат между двумя параллельными плоскостями α и β (точки A и B лежат в плоскости α). AC = 13 cm, BD = 15 cm, сумма длин проекций AC и BD на одну из данных плоскостей равна 14 cm. Найдите длины этих проекций и расстояние между плоскостями.
8. Точки K и L, лежащие посередине противоположных рёбер AA_1 и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соединены прямыми линиями с концами B и D_1 куба. Ребро куба равно a. Найдите стороны и диагонали получившегося четырёхугольника $KBLD_1$ и определите его форму.
9. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, соедините середины следующих рёбер по порядку: AA_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1C, CD, DA и AA_1. Докажите, что получившаяся фигура является правильным шестиугольником. Если сторона куба равна a, найдите грань шестиугольника.
10. Основание правильной призмы состоит из шестиугольника со стороной 3 dm. Высота призмы 13 dm. Определите площадь сечения через две противоположные стороны верхнего и нижнего оснований призмы.

6. Перпендикулярные плоскости

1. Основанием прямой призмы является равносторонний треугольник ABC, его стороны AB и BC равны 7 cm каждая, а третья сторона AC равна 2 cm. Через сторону AC проходит плоскость сечения в точке D с противоположным боковым краем, образуя угол 30° с плоскостью основания. Определите площадь полученного сечения и отрезок BD боковой грани.
2. Два равносторонних треугольника имеют общее основание, а их плоскости отклоняются друг от друга на 60°. Общее основание равно 16 cm. Сторона одного треугольника равна 17 cm, а стороны другого перпендикулярны друг другу. Определите расстояние между вершинами треугольников.
3. Стороны прямоугольного треугольника равны 7 cm и 24 cm. Проведена плоскость, проходящая через гипотенузу и образующая угол 30° с плоскостью треугольника. Найдите расстояние от этой плоскости до вершины прямого угла.
4. Отрезок AB параллелен плоскости α и лежит на некотором расстоянии от неё. Плоскость β проходит через AB, и эта плоскость образует с плоскостью α угол 45°. На плоскости β проведена прямая, образующая с AB угол 45°. Определите пересечение этой прямой между плоскостью AB и α.
5. Найдите геометрическое положение прямых, перпендикулярных данной плоскости и пересекающихся с данной прямой в этой плоскости.

6. Проведите из данной точки плоскость, перпендикулярную другой плоскости.

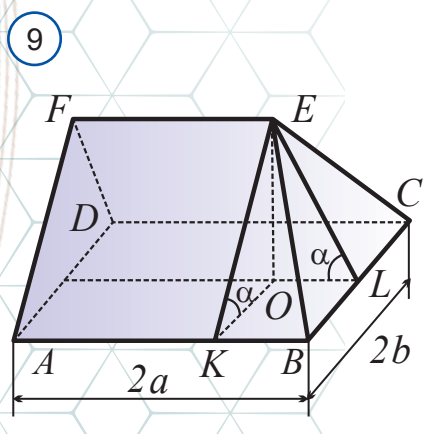
7. AB – прямая, пересекающая взаимно перпендикулярные плоскости α и β. CD – это отрезок в плоскости α, параллельный отрезку AB и находящийся на расстоянии 60 cm от него. Точка E на плоскости β находится на расстоянии 91 cm от AB. Найдите расстояние от E до CD.

8. Отрезок AB соединяет точки A и B на взаимно перпендикулярных плоскостях. Перпендикуляры, проведённые из точек A и B к линии пересечения плоскостей, равны соответственно a и b. Расстояние между их основаниями равно c. Определите длину отрезка AB и длины его проекций на заданные плоскости.

9. Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды равно 8 cm, а сторона основания 4 cm. Через середины двух соседних сторон основания проведена плоскость, перпендикулярная основанию. Найдите площадь сечения.

10. На дом, основание которого имеет форму прямоугольника $ABCD$, нужно установить крышу, с которой дождевая вода стекает с четырёх сторон (*рис. 9*). AB = 18 cm, BC = 12 cm. Все грани крыши с плоскостью основания образуют угол 40°. Сколько плиток черепицы потребуется для покрытия крыши, если на 1 m^2 нужно 15 плиток?

9



Вопросы, связанные с формированием практических компетенций

1. С помощью шестигранного карандаша и перевёрнутой книги покажите углы между прямыми линиями, между прямой линией и плоскостью, между плоскостями.

2. Определите, в каких направлениях стекает дождевая вода с крыши, показанной на рисунке 9, имеющей две оси симметрии.

3. Какие измерения необходимо произвести для определения высоты неприступной башни?

4. Какие измерения надо произвести, чтобы найти расстояние до здания, высота которого известна, но к которому нельзя подойти?

5. Почему тени исчезают в полдень?

6. Как можно измерить высоту дерева, не взбираясь на него?

7. На круглый стол кладут большую квадратную скатерть со стороной, равной a. Центр круга пересека-

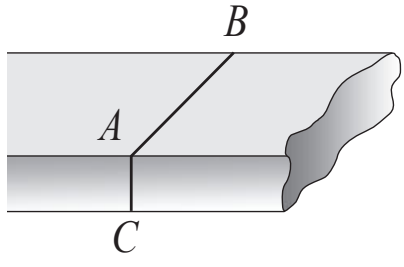
ется с центром квадрата. Насколько близко края стола к полу по сравнению с серединой его сторон?

Ответ: $\frac{a \cdot (\sqrt{2}-1)}{2} \approx 0{,}207\ a.$

8. Вертикальность стен проверяют отвесом (ниткой с камнем, прикреплённым к одному концу). Было принято решение, что стена вертикальна до тех пор, пока нить молотка прилегает к стене и параллельна ей. Насколько правильно это решение? На чём основан этот метод проверки?

9. Как разметить линии пропила на поверхности доски, чтобы поверхность пропила была перпендикулярна всем кромкам распиливаемой доски (рис. 10)?

10



10. Как с помощью теоремы Пифагора проверить взаимную перпендикулярность смежных стен комнаты?

11. Вертикальность колонны проверяют наблюдением из двух точек, не лежащих на одной прямой с основанием колонны. Обоснуйте этот способ проверки.

Подсказка: *Используйте знак перпендикулярности прямой и плоскости.*

12. В точке на труднодоступном холме установлен высокий столб. Как проверить его вертикальность с помощью отвеса?

Решение. Достаточно будет показать, что столб стоит в одной плоскости с вертикальной прямой и в ещё одной (другой) плоскости с другой вертикальной прямой. Мы кладём отвес перед собой так, чтобы вершины его и столба лежали на одной прямой, а нить отвеса и столба лежали на другой прямой. Этот метод основан на следующем: 1) вертикальный столб должен лежать в одной плоскости с произвольной вертикальной прямой; 2) если две параллельные прямые лежат на двух пересекающихся плоскостях, то эти прямые также параллельны линии пересечения плоскостей.

13. Даны два вертикально расположенных плоских зеркала. Одно из зеркал расположено параллельно поверхности, а горизонтальный луч возвращается от второго луча по прямой линии, перпендикулярной поверхности первого зеркала. Найдите угол между зеркалами.

Инструкция. *Используйте закон преломления света.*

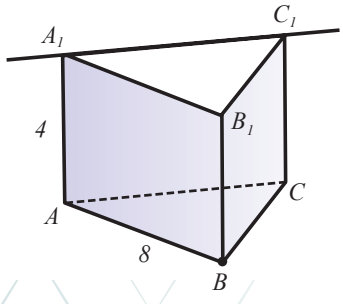
Ответ: *45°.*

14. Горизонтальный луч отражается от двух вертикально расположенных плоских зеркал. Первоначально луч был параллелен поверхности первого зеркала, но в результате двойного отражения остаётся параллельным плоскости второго зеркала. Найдите угол между зеркалами.

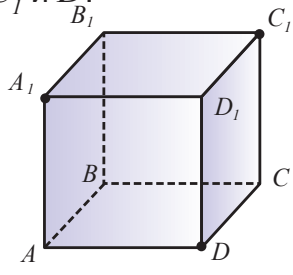
Ответ: 60°.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

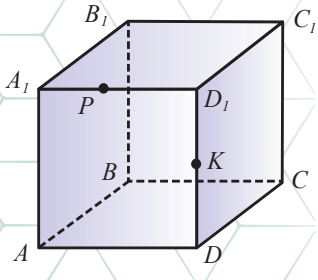
1. Дана правильная треугольная призма. Найдите площадь её поперечного сечения через ребро A_1C_1 и вершину B.



2. Площадь полной поверхности куба равна 12. Найдите площадь его поперечного сечения, проходящего через A_1, C_1 и D.

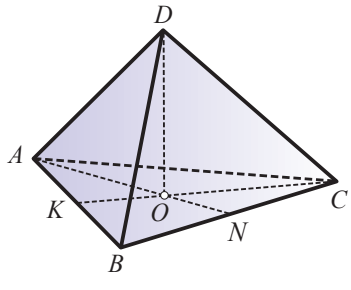


3. Какие отрезки пересекают отрезок PK?



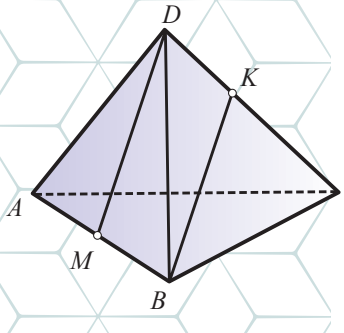
A) A_1B_1 и DC
B) A_1A_1 и AD
C) A_1B_1 и AD
D) D_1C_1

4. По какой прямой плоскость AOD пересекает плоскость BDC?



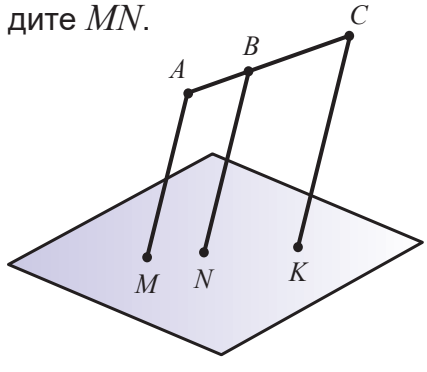
A. DO
B. AN
C. DN
D. DC

5. Укажите верные суждения: отрезок MD ...

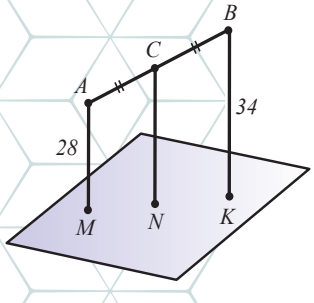


A) пересекает отрезок BK
B) параллелен отрезку BK
C) скрещивается с отрезком BK
D) не пересекает плоскость BKC

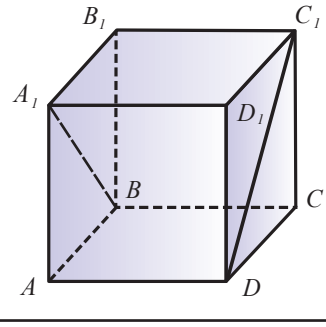
6. На рисунке AM // BN // CK, AB = 18, BC = 36, NK = 24. Найдите MN.



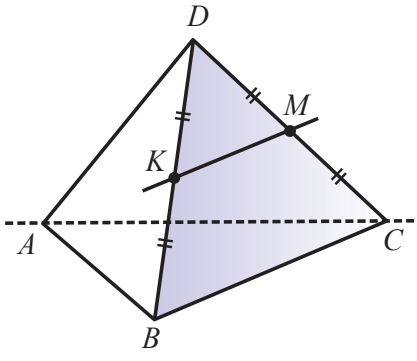
7. На рисунке AM // CN // BK, AM = 28, BK = 34. Найдите CN.



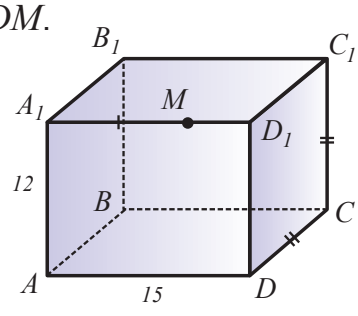
8. Дан куб. Найдите угол между прямыми BA_1 и DC_1.



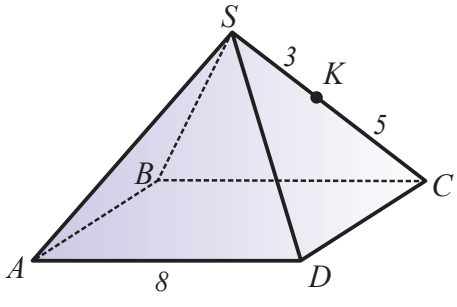
9. Дан правильный тетраэдр. Найдите угол между прямыми KM и AC.



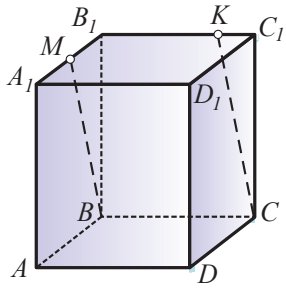
10. Дан прямоугольный параллелепипед. $DC = CC_1$, $A_1M : MD_1 = 2 : 1$, $AA_1 = 12$, $AD = 15$. Найдите периметр сечения параллелепипеда плоскостью CDM.



11. $SABCD$ – правильная пирамида. $KC = 5$, $KS = 3$, $AD = 8$. Найдите периметр сечения ADK с плоскостью пирамиды.

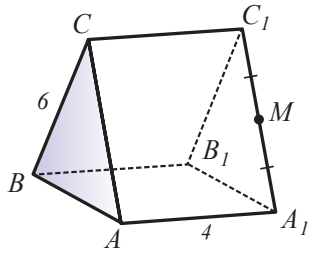


12. Что можно сказать о прямой KC?

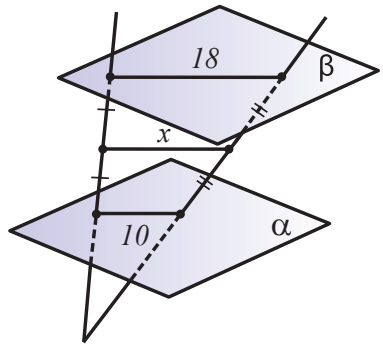


A) пересекает плоскость AA_1D_1
B) параллельна прямой BM
C) параллельна плоскости AA_1B_1
D) пересекает прямую AA_1.

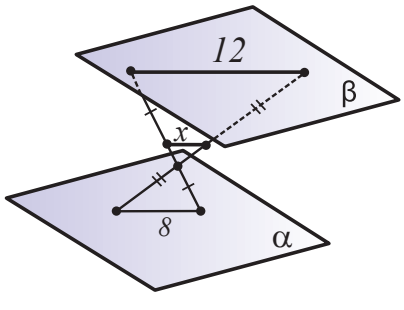
13. Дана правильная призма. $BC = 6$, $AA_1 = 4$. Найдите периметр пересечения призмы BMC с плоскостью.



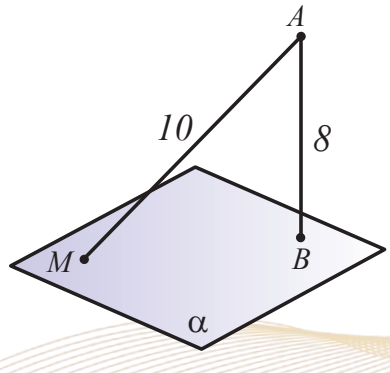
14. $\alpha \parallel \beta$. x = ?



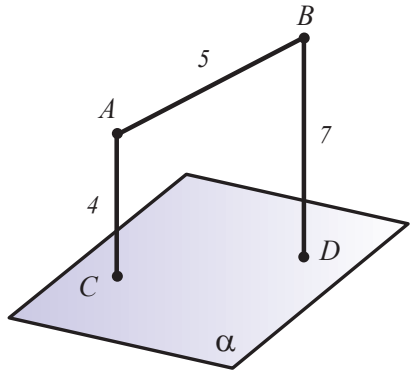
15. $\alpha \parallel \beta$. x = ?



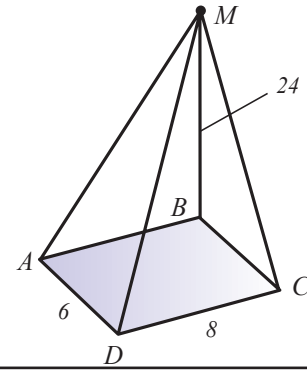
16. $AB \perp \alpha$. MB = ?



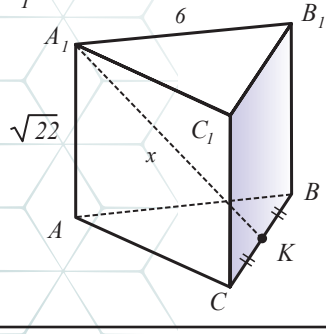
17. $AC \perp \alpha$, $BD \perp \alpha$. CD = ?



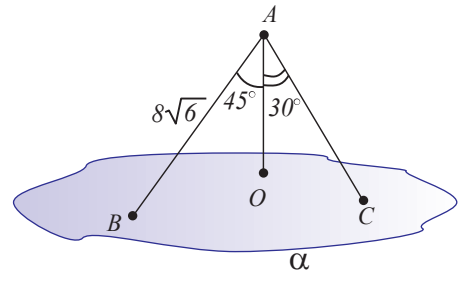
18. $ABCD$ – правильный четырёхугольник.
$MB \perp AB$, $MB \perp BC$. MD = ?



19. Дана правильная пирамида. Найдите A_1K.



20. $AO \perp \alpha$, $AB = 8\sqrt{6}$, $\angle BAO = 45°$. $\angle CAO = 30°$. OC = ?



21. Проведите плоскость, проходящую через концы трёх рёбер куба. Ребро куба равно a. Вычислите площадь сечения.

22. Сторона равностороннего треугольника равна 3 cm. Найдите расстояние между точкой, находящейся на расстоянии 2 cm от каждого конца треугольника, и его плоскостью.

23. Основание AC равностороннего треугольника лежит в плоскости α. Если $AB = 5$, $AC = 6$ и двугранный угол между плоскостью треугольника и плоскостью α равен 60°, найдите расстояние от точки b до плоскости α.

24. Отрезок длиной 10 cm проходит через плоскость. Его вершины находятся на расстоянии 3 cm и 2 cm от плоскости. Найдите угол между данным отрезком и плоскостью.

25. Основание DA трапеции $ABCD$ лежит в плоскости α, а основание CB удалено от неё на 5 cm. Если $DA : CB = 7:3$, найдите расстояние от плоскости P до точки M, в которой пересекаются диагонали этой трапеции.

26. Отрезок AB параллелен плоскости α. AC и BD – два равных отрезка, опущенных в плоскость α, причём AB перпендикулярен отрезку и лежит по обеим сторонам от него. $AB = 2$ cm и находится на расстоянии 7 cm от плоскости α, AC и BD равны 8 cm. Определите длину CD.

27. Прямая AB является ребром двустороннего угла, равного 90°. Прямые AA_1 и BB_1 являются лежат на противоположных гранях этого угла. $AA_1 \parallel BB_1$, BB_1 перпендикулярен AB.

Докажите, что прямые AA_1 и BB_1 пересекаются. Найдите угол между этими прямыми.

28. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ постройте линейный угол между плоскостями сечений AB_1C_1D и A_1D_1CB и найдите его градусную величину.

29. Ребро правильного тетраэдра равно a. Постройте сечение, проходящее через ребро AB, делящее его в отношении 1:3 и образованное при разделении BC плоскостью, параллельной ребру. Найдите площадь сечения.

30. Основание прямого параллелепипеда состоит из ромба с диагоналями 48 cm и 20 cm. Большая диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь его полной поверхности.

31. Основание пирамиды состоит из прямоугольного треугольника, равного его боковым граням. Две стороны перпендикулярны плоскости основания, а третья образует с основанием угол 45°. Найдите длину сторон пирамиды и площадь боковой поверхности.

32. Основание прямоугольной призмы состоит из прямоугольного треугольника с катетами 12 cm и 9 cm. Если наименьший отрезок, проходящий через боковое ребро призмы, представляет собой квадрат, найдите площадь его боковой поверхности.

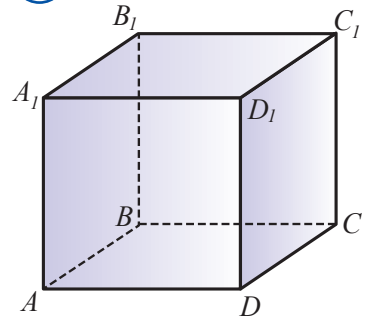
33. Основание пирамиды состоит из ромба с малой диагональю d и тупым углом α. Все двугранные углы при основании пирамиды равны β. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

34. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Постройте сечение, образованное разрезанием куба плоскостью, проходящей через середины рёбер AA_1, AD, A_1B_1.

35. По рисунку 1 определите, как данные прямые расположены между собой и поставьте между ними соответствующие символы ($\otimes$ – пересечение, // – параллельность, $\div$ – скрещивание).

Прямые	AA_1	BC_1	CC_1	CB_1	AB_1
AD					
A_1B_1					
AB					
A_1D					
BD					

1



36. Определите, как расположены прямая и плоскость на рис. 1 по отношению друг к другу и поставьте между ними соответствующие символы ($\otimes$ – пересечение, // – параллельность, $\div$ – скрещивание и $\subset$ – соответствие).

Прямая / Плоскость	AA_1	BC_1	CC_1	CB_1	AB_1
ADD_1					
AA_1B_1					
ABD					
AA_1D					
BCD					

37. Из одной точки к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная. Угол между ними равен 45°. Длина перпендикуляра равна a. Найдите длину наклонной.
38. Из данной точки к плоскости проведены две наклонные длиной 2 m. Найдите расстояние от точки до плоскости, если наклонные образуют угол 60°, а их проекции перпендикулярны.
39. Из одной точки к данной плоскости проведены две равные наклонные. Угол между ними 60°, угол между их проекциями прямой. Найдите углы между каждой наклонной и её проекцией.
40. Катеты прямоугольного треугольника ABC равны 15 m и 20 m. Отрезок CD = 35 m проведён перпендикулярно плоскости этого треугольника от вершины прямого угла C. Найдите расстояние от точки D до гипотенузы AB.
41. Стороны треугольника равны 10 cm, 17 cm и 21 cm. Из вершины большого угла этого треугольника к его плоскости проведён перпендикуляр длиной 16 cm. Определите расстояние от его вершин до большей стороны треугольника.
42. Из вершины A треугольника ABC проведена вне его плоскости прямая AD, образующая со сторонами AB и AC равные острые углы. На какие части проекция прямой AD на плоскость треугольника делит сторону BC, если AB = 51 m, AC = 34 m и BC = 30 m?
43. Из точки, удалённой от плоскости, проведены две наклонные, и они образуют с плоскостью углы 45° и 30°, а друг с другом – прямой угол. Определите расстояние между вершинами наклонных.
44. Проведите плоскость, параллельную данной прямой из заданной точки. Сколько таких плоскостей можно провести?
45. Дана плоскость и параллельная ей прямая. Проведите прямую линию в этой плоскости параллельно данной прямой через точку на плоскости.
46. Длины отрезков двух прямых между двумя параллельными плоскостями равны 51 cm и 53 cm. Отношение их проекций на одну из этих плоскостей примерно 6:7. Определите расстояние между заданными плоскостями.
47. В пространстве два прямых угла расположены так, что их соответствующие стороны параллельны и одинаково направлены друг к другу и перпендикулярны отрезку, соединяющему их концы. Длина этого отрезка равна a. На одной стороне угла продолжен отрезок b. Из второго угла продолжен не параллельный ему отрезок c. Определите расстояние между этими отрезками.
48. Правильная шестиугольная призма с квадратными сторонами разрезана плоскостью через одну сторону нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания. Сторона основания равна a. Определите площадь получившегося сечения.
49. Стороны треугольника ABC: AB = 9, BC= 6 и AC = 5. Через отрезок AC проходит плоскость α, образующая с плоскостью треугольника угол 45°. Найдите расстояние между плоскостью α и вершиной B.
50. Проведите плоскость, перпендикулярную второй плоскости от данной прямой. Сколько таких плоскостей можно нарисовать?

I. Планиметрия

1.1. Углы и прямые

Параллельные и пересекающиеся прямые

Плоскость может иметь две параллельные *(рис. 1)* или пересекающиеся *(рис. 2)* прямые.

Смежные и вертикальные углы

Сумма смежных углов равна 180° (*рис. 3*). Вертикальные углы равны (*рис. 4*).

Углы, образованные при пересечении двух прямых третьей прямой *(рис. 5)*:

1) ∠1 и ∠5, ∠2 и ∠6, ∠3 и ∠7, ∠4 и ∠8 – **соответствующие углы;**

2) ∠3 и ∠6, ∠4 и ∠5 – **внутренние односторонние углы;**

3) ∠3 и ∠5, ∠4 и ∠6 – называются **внутренними накрест лежащими углами.**

Признаки параллельности прямых

Если две прямые пересекает третья прямая (рис. 5),

1) если внутренние накрест лежащие углы равны;

или

2) если соответствующие углы равны;

или

3) если сумма внутренних односторонних углов равна 180°.

Данные прямые параллельны.

Свойства параллельных прямых

Если две параллельные прямые пересекает третья прямая *(рис. 5)*:

1) внутренние накрест лежащие углы равны;

2) соответствующие углы равны;

3) сумма внутренних односторонних углов равна 180°.

Если $a \parallel b$ и $a \parallel c$, то $b \parallel c$ *(рис. 6)*.

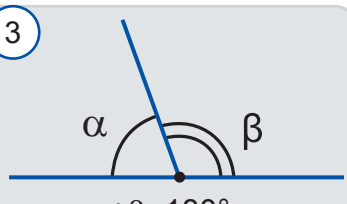
1



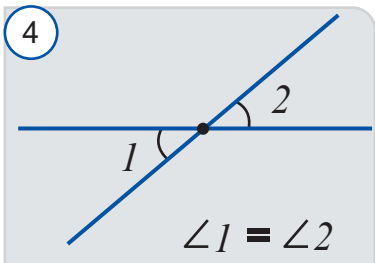
2



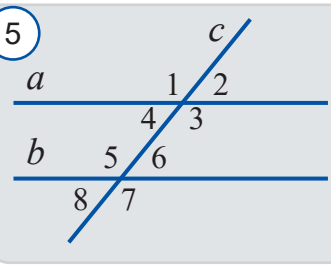
3



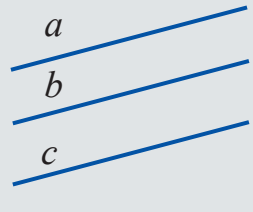
4



5



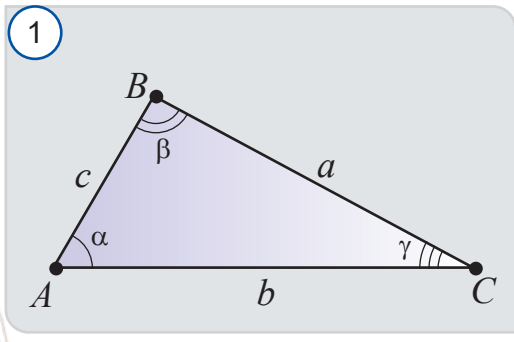
6



1.2. Треугольники

1°. Основные понятия

1



Пусть на плоскости есть три точки, не лежащие на одной прямой. Соединяем каждые эти точки отрезком. Получившаяся фигура называется *треугольником*. Точки называются вершинами треугольника, а точки пересечения – сторонами.

Обозначение: A, B, C – вершины, A, B, C – стороны.

У треугольника есть три внутренних угла: $\angle BAC$, $\angle CBA$, $\angle ACB$.

Обозначение: α , β, γ.

Средняя линия треугольника – это отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Медианой треугольника называют отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны. В треугольнике три медианы, они обозначаются как m_a, m_b, m_c.

Биссектриса треугольника – отрезок, который соединяет вершину треугольника с его противоположной стороной и делит соответствующий угол пополам. У треугольника три биссектрисы, они обозначаются как l_a, l_b, l_c.

Высота треугольника – это перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника к прямой напротив неё. Треугольник имеет три высоты, на письме они обозначаются как h_a, h_b, h_c. Средняя линия – отрезок, соединяющий середины двух сторон. Число средних линий также равно 3.

Периметр – это сумма длин трёх сторон. Обозначение: P.

Треугольники делятся на три типа в зависимости от их сторон: а) равносторонние ($a = b = c$); б) равнобедренные (две из трёх сторон A, B, C равны); в) разносторонние (ни одна из сторон A, B, C не равны).

Окружность, касающаяся всех трёх сторон треугольника, называется вписанной *окружностью* (такая окружность существует и единственна). Радиус вписанной окружности определяется r.

Окружность, проходящая через все три точки треугольника, называется *описанной окружностью*, а её радиус определяется R (такая окружность существует и единственна).

2°. Основные связи

1) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Сумма внутренних углов треугольника равна 180°.

2) Все три медианы пересекаются в одной точке. Эта точка делит медиану в соотношении 2:1.

Медиана делит треугольник на два равных треугольника. Длины медиан находятся по формулам:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}; \qquad m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}; \qquad m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

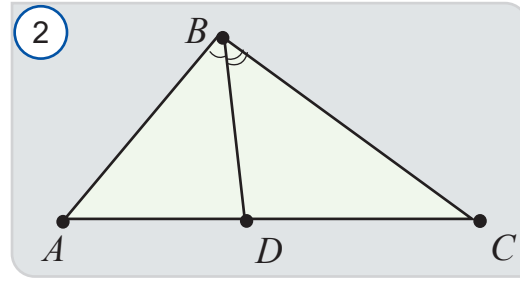
3) Все три биссектрисы пересекаются в одной точке. Эта точка будет центром вписанной окружности. Биссектриса делит сторону, на которой она проведена, на части, пропорциональные остальным сторонам (*рис. 2*). Если BD биссектриса, то

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC}$$

Длину биссектрисы можно найти по этим формулам.

$$l_a=\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)};\qquad l_b=\frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{p(p-b)};$$

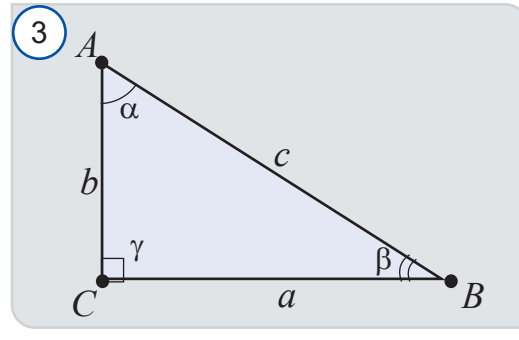
$$l_c=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{p(p-c)},\qquad p=a+b+c.$$



4) Высоты треугольников или их продолжений пересекаются в одной точке. Длина высоты может быть найдена из формулы

$$h_a=\frac{2S}{a};\quad h_b=\frac{2S}{b};\quad h_c=\frac{2S}{c}.$$

Здесь S – площадь треугольника.



5) Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка будет *центром описанной окружности* треугольника.

6) *Средняя линия* треугольника параллельна третьей стороне, а её длина равна половине длины этой стороны.

7) Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R.$$

8) Теорема косинусов:

$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha;\ b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta;\ c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma$

9) Формулы вычисления площади треугольника:

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c;\quad S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}bc\sin\beta.\quad S=\frac{abc}{4R};\qquad S=pr.$$

10) Формула Герона:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};\qquad p=\frac{a+b+c}{2}.$$

3°. Важные частные случаи

а) *Прямоугольный треугольник (рис. 3).*

$\angle\gamma=90°$, $\alpha+\beta=90°$, AC и BC – катеты, AB – гипотенуза.

Теорема Пифагора: $a^2+b^2=c^2$.

$$S=\frac{1}{2}ab;\qquad R=\frac{c}{2};\qquad r=\frac{a+b-c}{2};$$

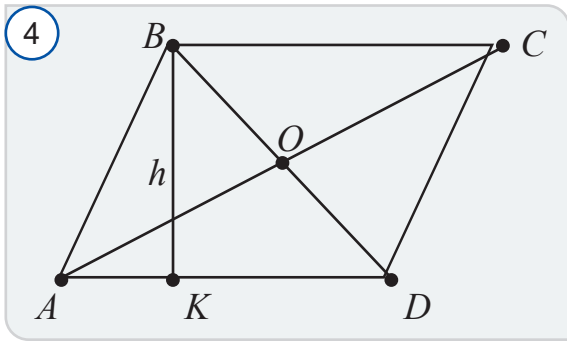
$$\frac{a}{c}=\sin\alpha;\qquad \frac{a}{c}=\cos\beta;\qquad \frac{b}{c}=\sin\beta;\qquad \frac{b}{c}=\cos\alpha;$$

$$\frac{a}{b}=tg\alpha;\qquad \frac{a}{b}=ctg\beta;\qquad \frac{b}{a}=ctg\alpha;\qquad \frac{b}{b}=tg\beta.$$

б) *Равносторонний треугольник.*

$$\alpha=\beta=\gamma=60°;\qquad S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4};\qquad r=\frac{a\sqrt{3}}{6};\qquad R=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

1.3. Четырёхугольники



1°. Параллелограмм

Прямоугольник с параллельными противоположными сторонами называется *параллелограммом (рис. 4)*.

Отрезок, соединяющий несмежные вершины, называется диагональю.

AB и CD; AD и BC – параллельные стороны;

BD и AC – диагонали.

Основные свойства и отношения

1) Точка пересечения диагоналей является центром симметрии параллелограмма.

2) Длины противоположных сторон равны между собой:

$AB = CD$ и $AD = BC$.

3) Противоположные углы параллелограмма равны между собой:

$\angle BAD = \angle BCD$ и $\angle ABC = \angle ADC$.

4) Сумма смежных углов равна 180°.

5) Диагонали делятся пополам в точке пересечения: $BO = OD$ и $AO = OC$.

6) Сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей:

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$ или $2 \cdot (AB^2 + BC^2) = AC^2 + BD^2$.

7) Поверхность параллелограмма: а) $S = ah_a$, где: $a = AD$ сторона, $h_a = BK$ – высота.

б) $S = a\,b\,\sin\alpha$, где: $b = AB$ – сторона, $\alpha = \angle BAD$ – угол между сторонами AB и AD.

2°. Ромб

Параллелограмм, у которого все стороны равны, называется *ромбом*.

Все свойства, применимые к параллелограмму, применимы и к ромбу.

Дополнительные свойства ромба

1) Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

2) Диагонали ромба являются биссектрисами внутренних углов.

3) Площадь ромба $S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$, где d_1, d_2 – диагонали ромба.

3°. Прямоугольник

Параллелограмм, все углы которого равны 90°, называется *прямоугольником*.

1) Диагонали прямоугольника равны между собой.

2) Площадь прямоугольника $S = a \cdot b$, где a и b – смежные стороны прямоугольника.

4°. Квадрат

Прямоугольник, у которого все стороны равны, называется *квадратом*.

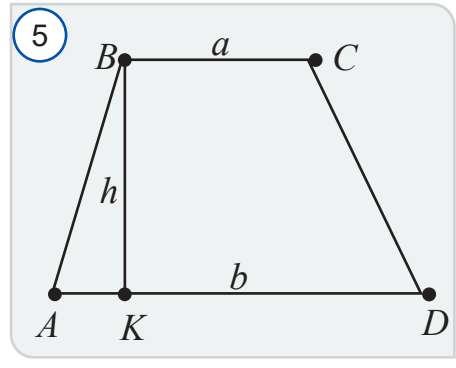
Все свойства, применимые к ромбу и прямоугольнику, применимы и к квадрату.

Если a – сторона квадрата, а d диагональ: $S = a^2$; $S = \frac{d^2}{2}$; $d = a\sqrt{2}$.

5°. Трапеция

Четырёхугольной трапецией называется трапеция, у которой две стороны, называемые основаниями, параллельны друг другу, а две другие стороны, называемые сторонами, не параллельны.

Отрезок, соединяющий середины сторон, называется средней линией трапеции.



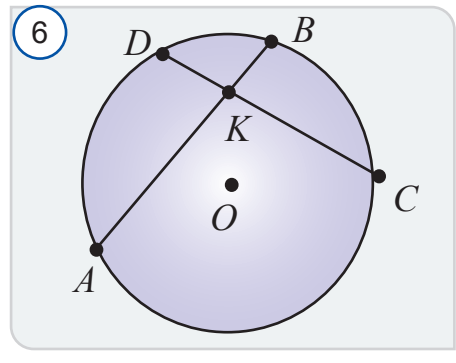
Основные характеристики:

1) средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна половине суммы оснований;

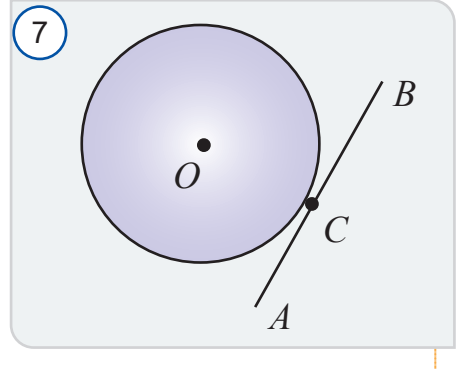
2) Площадь трапеции $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, где a и b – основания, а h высота (*рис. 5*).

1.4. Круг, окружность

1°. Пусть R – положительное число, а точка O дана на плоскости. Фигура, образованная точками, находящимися на расстоянии R от точки O, называется *окружностью*. Точка O – *центр окружности*; отрезок, соединяющий центр и точку окружности, – *радиус*, а число R – *длина радиуса*. Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется хордой, а отрезок, проходящий через центр, называется *диаметром*.



Конечная часть плоскости, ограниченная кругом, называется *окружностью*.



Ключевые отношения:

1) $D = 2R$, где: D – длина диаметра.

2) $L = 2\pi R$ – длина окружности.

3) $S = \pi R^2$ – поверхность круга.

4) Если прямые AB и CD пересекаются в точке K (рис. 6), выполняется соотношение $AK \cdot KB = CK \cdot KD$.

5) Диаметр, делящий хорду пополам, перпендикулярен этой хорде.

6) Равные хорды находятся на равном расстоянии от центра, и, наоборот, хорды, находящиеся на равном расстоянии от центра, равны между собой.

2°. Касательная

Прямая, имеющая с окружностью одну общую точку, называется касательной к окружности в этой точке. Точка называется *точкой касания (рис. 7)*.

Прямая, имеющая две общие точки с окружностью, называется секущей.

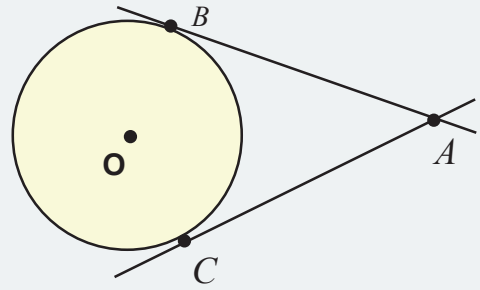
Свойства касательной:

1) Радиус, проведённый к точке касания, перпендикулярен касательной.

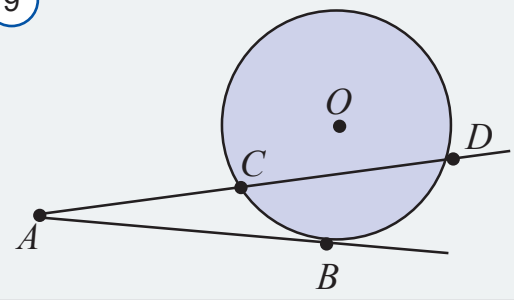
2) Из точки вне круга к этому кругу можно построить две касательные, отрезки этих касательных равны между собой *(рис. 8)*: $AB = AC$.

3) Если AC отрезок и пересекает окружность в точках C и D, и AB – касательная, то $AB^2 = AD \cdot AC$ (*рис. 9*).

8



9



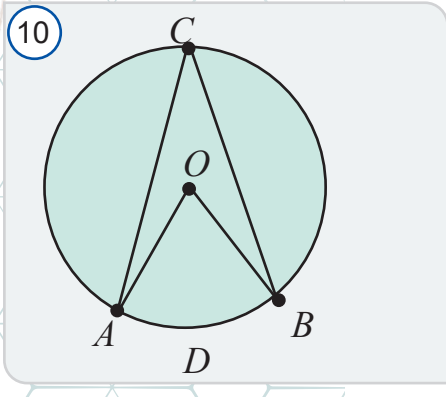
3°. Центральные и вписанные углы

Любые две несовпадающие точки окружности делят её на две части. Каждая из этих частей называется *дугой* окружности. Обозначения: ADB, ACB.

Угол AOB является центральным углом, опирающимся на дугу ADB (*рис. 10*), а угол ACB опирается на дугу ADB и называется *углом, вписанным в окружность*. Между этими углами

$\angle ACB = \frac{1}{2} \cdot$ Соотношение $\angle AOB$ справедливо.

10



В частности, внутренний угол, проведённый в полуокружности, является прямым углом *(рис. 11)*. Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны.

4°. Сектор и сегмент

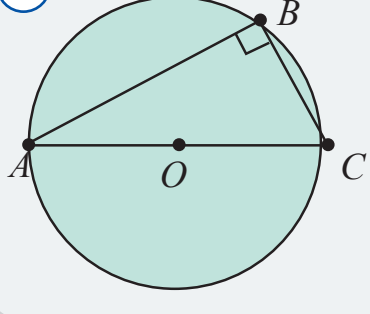
Отрезок окружности, ограниченный двумя радиусами, называется *сектором (рис. 12)*. Длина дуги сектора:

$l = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$, где α – градусная мера центрального угла.

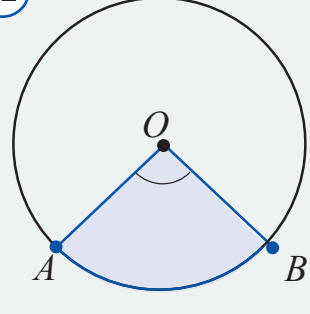
Площадь сектора: $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$; $S = \frac{1}{2} \cdot R \cdot l$.

Сегмент – это часть окружности, ограниченная хордой и проведённой от неё дугой (*рис. 13*).

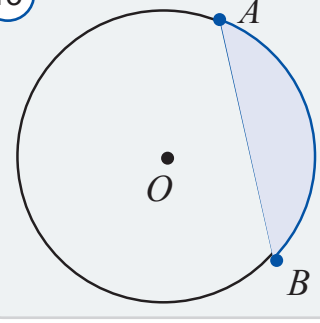
11



12



13



Площадь сегмента круга: $S = S_{sektor} \pm S_{\Delta} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha \pm \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \sin \alpha$.

1.5. Правильные многоугольники

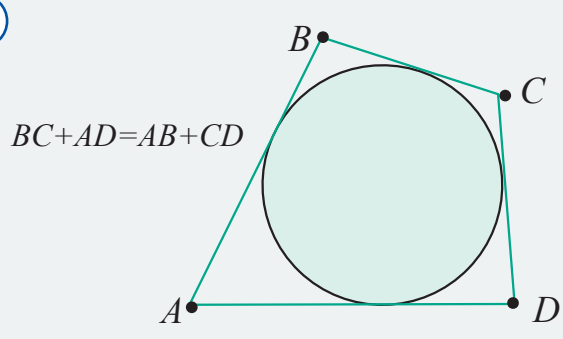
Если сторона правильного n угла равна a_n, периметр равен P_n, площадь равна S_n, радиус вписанной окружности равен r_n, радиус описанной окружности равен R_n, а внутренний угол равен α_n:

$$P_n = n \cdot a_n; \quad S_n = \frac{1}{2} \cdot P_n \cdot r_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot a_n \cdot r_n; \quad \alpha_n = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$$

$$R_n = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}; \quad r_n = \frac{a_n}{2 \cdot tg\frac{180^\circ}{n}}$$

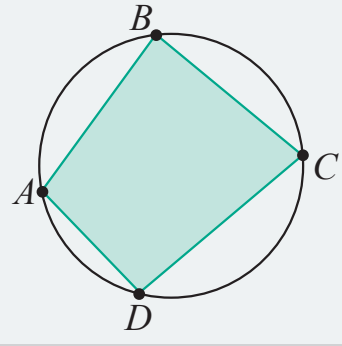
Прямоугольники с вписанной и описанной окружностью *(рис. 14)*.

14



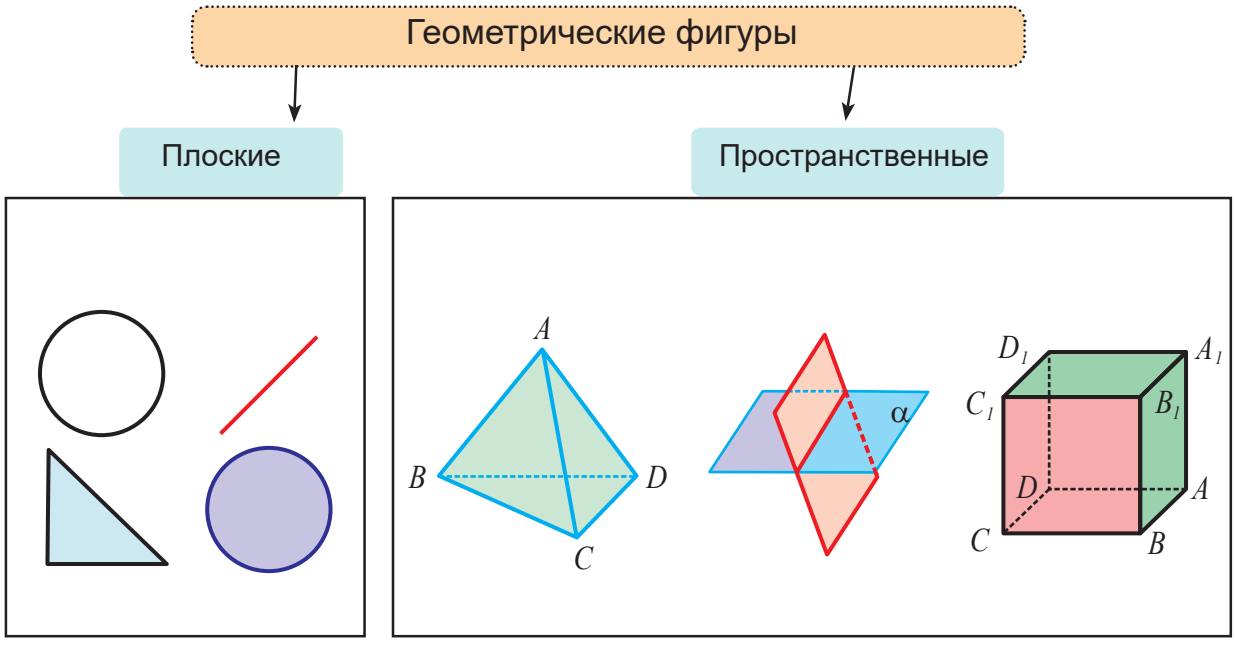
$BC+AD=AB+CD$

$\angle A + \angle C = 180^\circ$
$\angle B + \angle D = 180^\circ$



II. Стереометрия

В пространстве геометрические фигуры делятся на плоские и пространственные в зависимости от того, полностью они лежат на плоскости или нет.

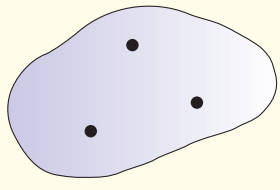


2.1. Основные понятия стереометрии

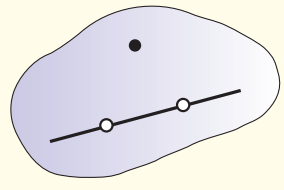
Раздел *стереометрии* геометрии изучает свойства пространственных геометрических фигур (или тел). Слово *«стереометрия»* происходит от греч. *«stereos»* – «объёмный, пространственный», и *«metreo»* – «измерять».

Основными геометрическими фигурами в пространстве являются точка, прямая и плоскость. Они являются основными понятиями стереометрии и неопределяемы.

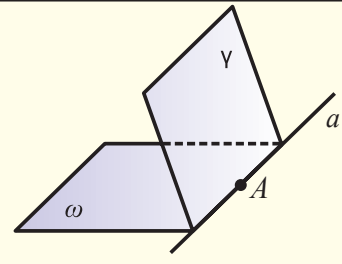
Аксиомы стереометрии и их следствия (теоремы)



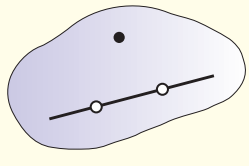
Аксиома S_1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость и притом только одна.



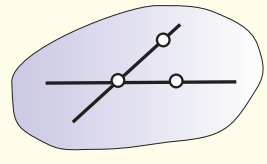
Аксиома S_2. Если две точки прямой лежат в одной плоскости, то все её точки лежат в этой плоскости.



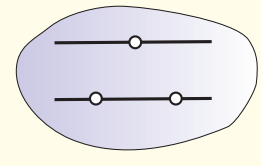
Аксиома S_3. Если две плоскости имеют общую точку, то у этих плоскостей есть и общая прямая, проходящая через эту точку.



Теорема 1. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость и притом только одна.



Теорема 2. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость и притом только одна.



Теорема 3. Через две параллельные прямые проходит плоскость и притом только одна.

2.2. Расположение прямых и плоскостей в пространстве

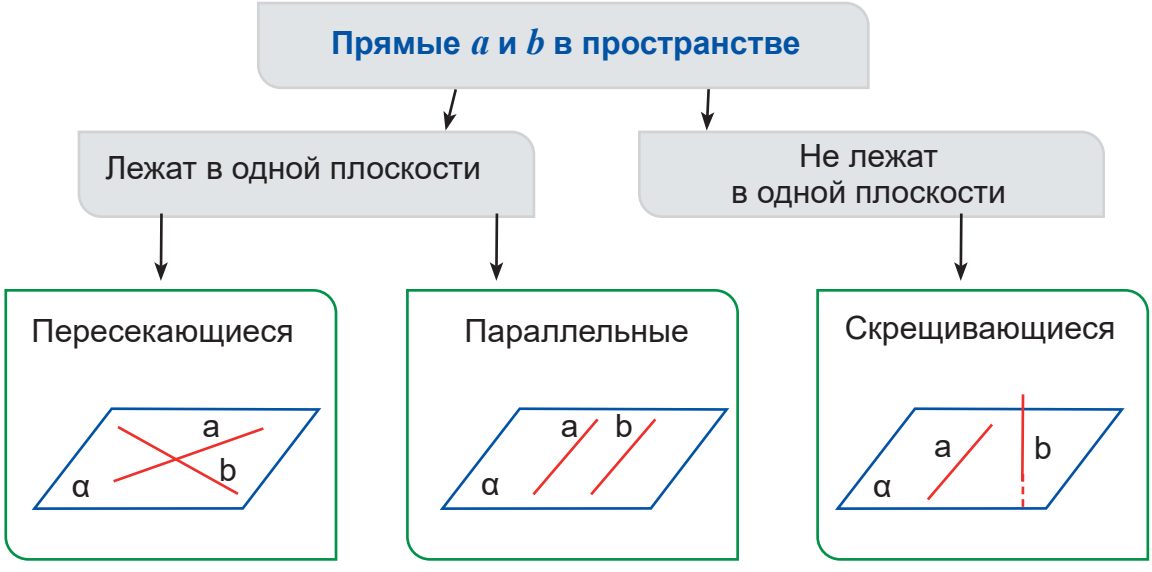
Прямые линии в пространстве

Две прямые в пространстве могут лежать или не лежать в одной плоскости.

Прямые, лежащие в одной плоскости и имеющие только одну общую точку, называются *пересекающимися прямыми*.

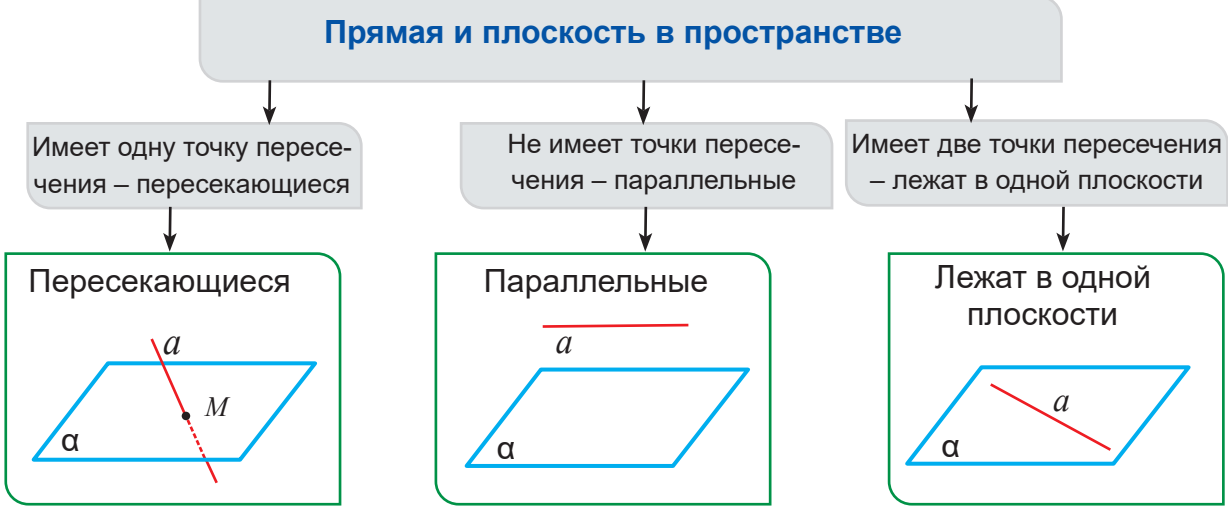
Прямые, лежащие в одной плоскости и не пересекающиеся друг с другом, называются *параллельными прямыми*.

Две прямые, не лежащие в одной плоскости в пространстве, называются *скрещивающимися*.



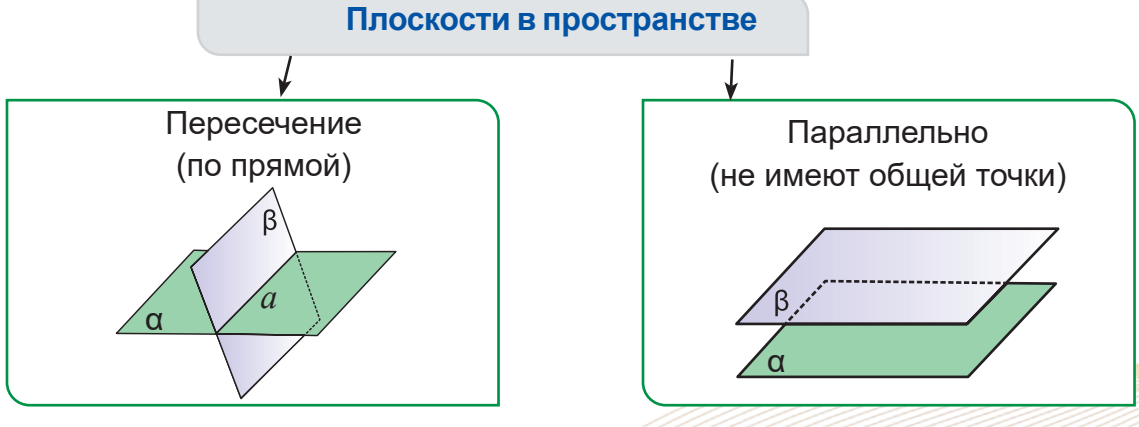
Прямые и плоскости в пространстве

Прямая может лежать на плоскости, пересекать её или не пересекать, то есть быть параллельной плоскости.



Плоскости в пространстве

В пространстве плоскости могут пересекаться по прямой или не иметь общей точки, то есть могут быть параллельны друг другу.



Формы	Расположение прямых в пространстве		
Прямые a и b	Лежат в одной плоскости	Имеют общую точку	Пересекающиеся: $a \otimes b$
		Не имеют общей точки	Параллельные: $a \parallel b$
	Не лежат в одной плоскости		Скрещивающиеся: $a \div b$

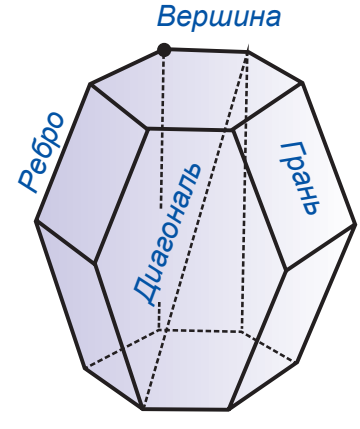
Формы	Расположение прямых и плоскостей в пространстве		
a прямая, α плоскость	Прямая a не лежит в плоскости α.	Прямая a имеет общую точку с плоскостью α.	Пересекающиеся: $a \otimes \alpha$
		Прямая a не имеет ни одной общей точки с плоскостью α.	Параллельные: $a \parallel \alpha$
	Прямая a не лежит в плоскости α.		$a \subset \alpha$

Формы	Расположение плоскостей в пространстве	
Плоскости α и β	Имеют общую точку	Пересекающиеся: $\alpha \cap \beta = a$.
	Не имеют общих точек	Параллельные: $\alpha \parallel \beta$.

2.3. Многогранники

Пространственное тело и многогранник

Пространственные тела можно представить как часть существования, занятую материальным телом. Пространственное тело ограничивается своей поверхностью. Тело, состоящее из плоского многоугольника, называется *многогранником*.

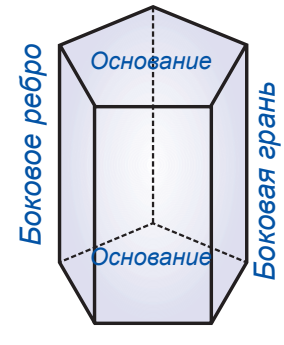


Призма

Призма – это многогранник, состоящий из двух равносторонних многоугольников, лежащих в параллельных плоскостях и имеющих все остальные рёбра, параллельные друг другу.

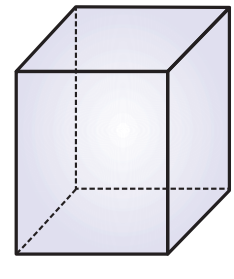
Правильная призма – это прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники.

Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на его высоту.



Параллелепипед

Призму, основанием которой является параллелограмм, называют *параллелепипедом*. Все шесть его сторон – параллелограммы.



Свойства параллелепипеда

1) Точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его *центром симметрии*.

2) Противоположные стороны параллелепипеда равны и параллельны.

3) Все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся пополам в точке пересечения.

Параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны плоскости основания, называется *прямым параллелепипедом*.

Прямоугольный параллелепипед – это правильный параллелепипед, основания которого – прямоугольники. Если стороны прямоугольного параллелепипеда равны, то такой параллелепипед называется кубом.

Все стороны куба – равные квадраты.

Пирамида

Пирамида – это многогранник, одно основание которого – произвольный многоугольник, а остальные стороны – треугольники с общими вершинами.

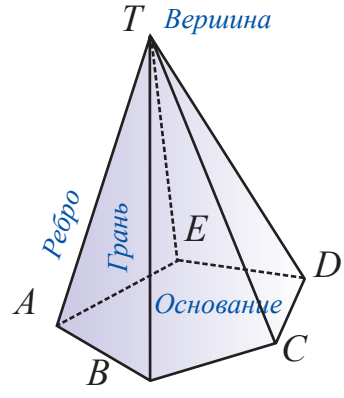
Высота пирамиды определяется как перпендикуляр, проведённый от вершины пирамиды к плоскости основания.

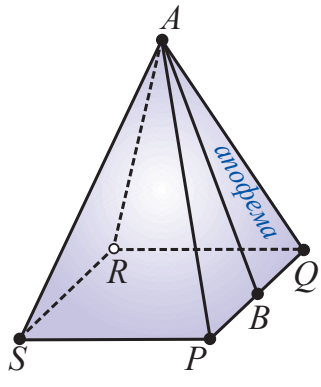
Правильная пирамида – это пирамида, основание которой состоит из правильного многоугольника, а высота падает на центр основания. Все стороны правильной пирамиды равны; все стороны – равнобедренные треугольники.

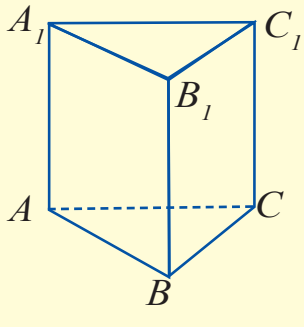
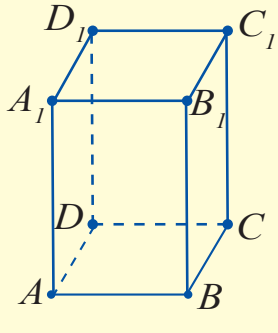
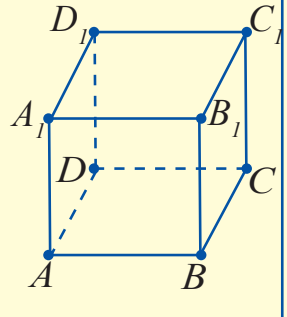
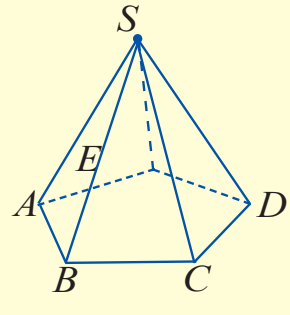
Если основание пирамиды состоит из n углов, то такая пирамида называется *n-угольной*. Треугольная пирамида называется *тетраэдром*.

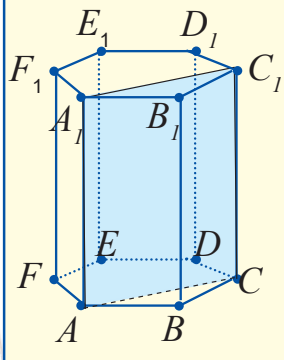
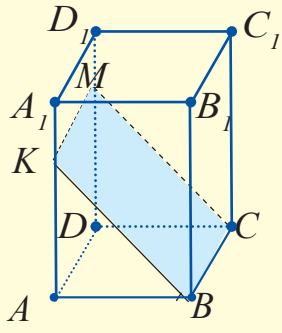
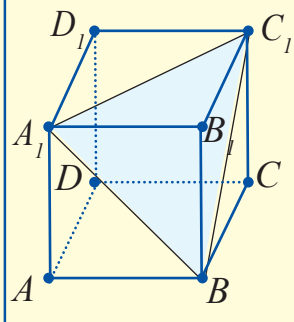
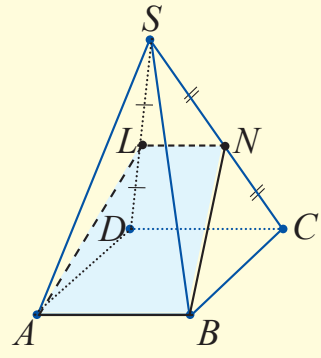
Если все рёбра тетраэдра равны, такой тетраэдр называется *правильным тетраэдром*.

Боковая поверхность правильной пирамиды рассчитывается по следующей формуле: $S_{бок} = P \cdot h$, где P – периметр основания пирамиды, h – апофема.

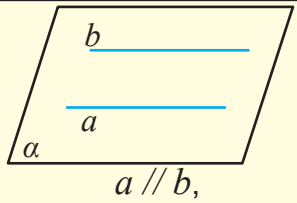
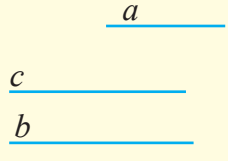
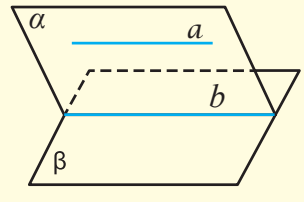
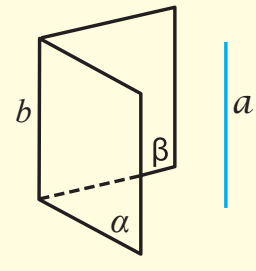


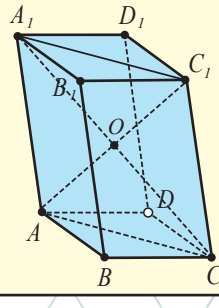


Многогранники			
Призма	**Прямоугольный параллелепипед**	**Куб**	**Пирамида**
			
Основания – многоугольники, грани – параллелограммы.	Основания – прямоугольные четырёхугольники, грани – прямоугольники.	Основания – квадраты, грани – квадраты.	Основание – многоугольник, грани – треугольники.

Простейшие сечения многогранников			
Многоугольная призма	**Прямоугольный параллелепипед**	**Куб**	**Пирамида**
			
ACC_1 – пересекающая плоскость, проходящая через точки A, C, C_1. ACC_1A_1 – сечение.	CBK_1 – пересекающаяся плоскость, проходящая через точку K и прямую CB. $CBKM$ – сечение.	A_1BC_1 – плоскость, пересекающая прямые BC_1 и BA_1; A_1C_1B – сечение.	ABN – секущая плоскость, проходящая через параллельные прямые AB и LN; $ABNL$ – сечение.

2.4. Параллельность прямых и плоскостей в пространстве

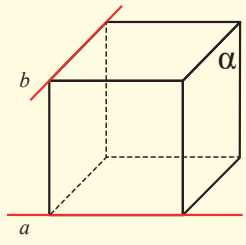
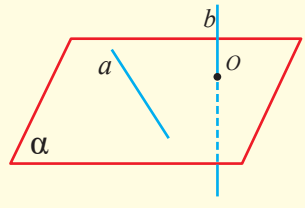
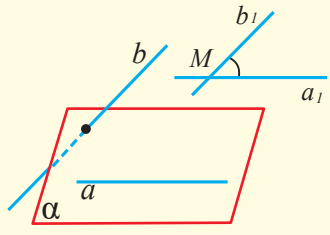
Параллельные прямые			
Описание	**Отличительные признаки**		
			
$a \parallel b$, если прямые a и b лежат в одной плоскости и не пересекаются, они называются *параллельными прямыми*.	Если $a \parallel b$, $a \parallel c$, то $b \parallel c$.	Если $\alpha \cap \beta = b$, $a \subset \alpha$ и $a \parallel \beta$, то $b \parallel a$.	Если $\alpha \cap \beta = b$, $a \parallel \alpha$ и $a \parallel \beta$, то $a \parallel b$.

Свойства параллелепипеда	
	Свойство 1. Четырёхугольник AA_1C_1C, образованный диагоналями основания и боковыми рёбрами параллелепипеда, является параллелограммом. Свойство 2. Противоположные стороны равны. $AA_1B_1B = DD_1C_1C$. Свойство 3. Все диагонали пересекаются в одной точке и делятся в этой точке пополам ($AO = OC_1$, $CO = OA_1$).

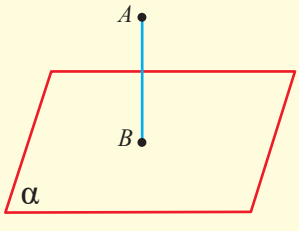
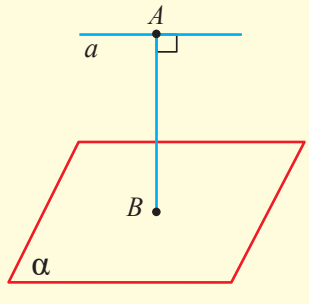
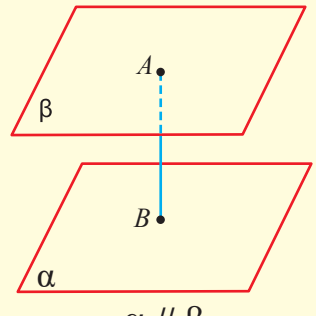
2.5. Перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве

Перпендикулярность прямых и плоскостей

Если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна какой-либо прямой, проходящей через эту точку пересечения на плоскости, то прямая называется *перпендикулярной этой плоскости*.

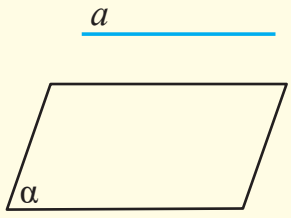
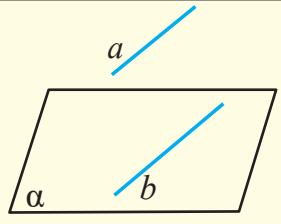
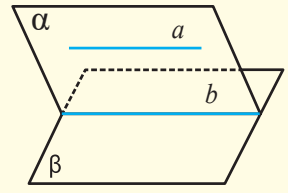
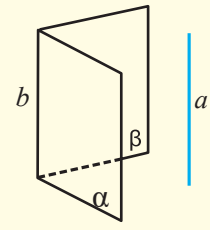
Скрещивающиеся прямые		
Описание	**Обозначение**	**Угол между прямыми**
 Прямые, которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости, называются *скрещивающимися*, на письме выражаются как $a \div b$.	 Если $a \subset \alpha$, $\alpha \cap b = O$, $O \notin a$, то $a \div b$.	 Углом между скрещивающимися прямыми считается угол между построенными пересекающимися прямыми, параллельными этим прямым.

Формы	Расположение прямых в пространстве		
Прямые a и b	Лежат в одной плоскости	Имеют общую точку.	Пересекающиеся: $a \otimes b$.
		Не имеют общей точки.	Параллельные: $a \,//\, b$.
	Не лежат в одной плоскости.		Скрещивающиеся: $a \div b$.

Расстояния		
Расстояние от точки до плоскости	**Расстояние от прямой до плоскости**	**Расстояние между плоскостями**
 $A \notin \alpha$ $AB \perp \alpha$	 $a \,//\, \alpha$, $A \in a$, $AB \perp \alpha$	 $\alpha \,//\, \beta$, $A \in \beta$, $AB \perp \alpha$

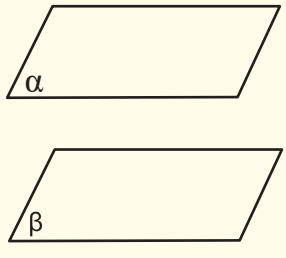
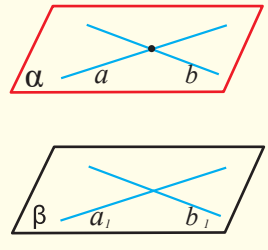
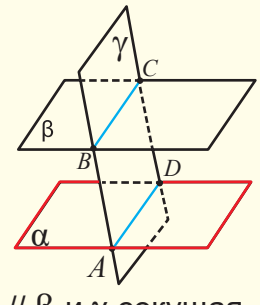
Параллельность прямых и плоскостей в пространстве

Прямая a и плоскость α	Имеют много общих точек.	Прямая лежит в плоскости: $a \subset \alpha$.
	Имеют одну общую точку.	Прямая пересекает плоскость: $a \otimes \alpha$.
	Не имеют общих точек.	Прямая параллельна плоскости: $a \,//\, \alpha$.

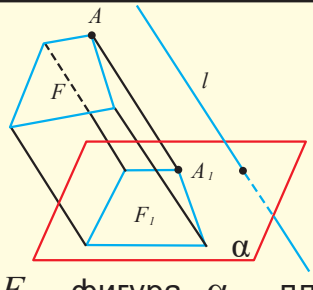
Описание	Обозначения	Свойства	
 Если прямая a не имеет общих точек с плоскостью α, то прямая и плоскость называются параллельными и обозначаются через $a \parallel \alpha$.	 Если прямая a не лежит в плоскости α и $a \parallel b$, $b \subset \alpha$, тогда $a \parallel \alpha$.	 Если прямая b – линия пересечения плоскостей α и β, $a \subset \alpha$ и $a \parallel \beta$, тогда $b \parallel a$.	 Если прямая b – линия пересечения плоскостей α и β, $a \parallel \alpha$ и $a \parallel \beta$, тогда $a \parallel b$.

Параллельность плоскостей в пространстве

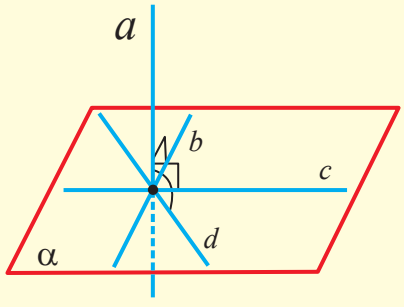
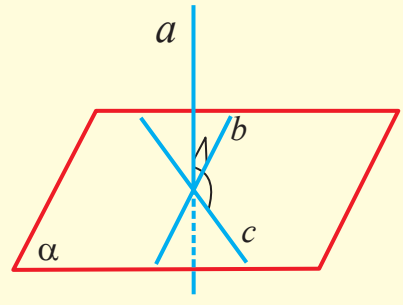
Плоскости α и β	Имеют общую точку.	Пересекаются: $\alpha \otimes \beta$.
	Не имеют общих точек.	Параллельны: $\alpha \parallel \beta$.

Описание	Обозначение	Свойства
 Непересекающиеся плоскости α и β называются *параллельными плоскостями* и обозначаются как $\alpha \parallel \beta$.	 Если $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a \otimes b$, $a_1 \subset \beta$, $b_1 \subset \beta$, $a_1 \otimes b_1$, $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$, то $\alpha \parallel \beta$.	 Если $\alpha \parallel \beta$ и γ секущая плоскость, $\alpha \cap \gamma = AD$ и $\beta \cap \gamma = BC$, тогда $AD \parallel BC$.

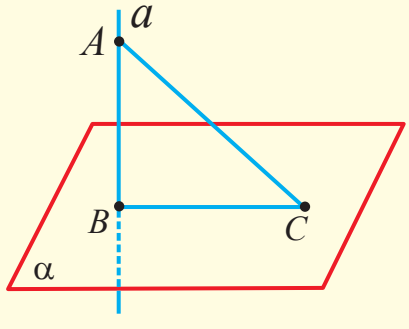
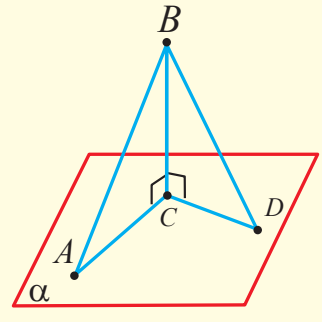
Параллельность плоскостей

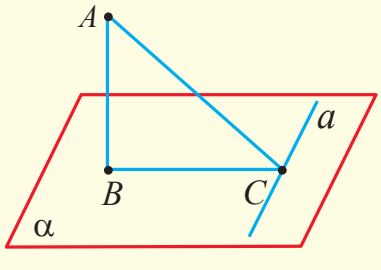
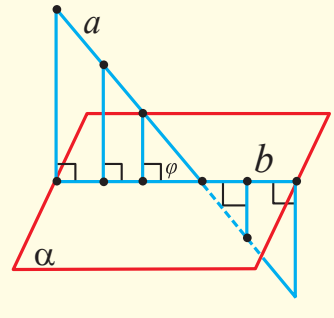
Описание	Свойства фигур в параллельной проекции	
	Сохраняются	Не сохраняются
 F – фигура, α – плоскость проекции, l – направление проекции, F_1 – F проекция фигуры.	1) Формы относятся к классам (точка к точке, прямая к прямой, сечение к сечению, треугольник к треугольнику); 2) точки принадлежат прямой линии; 3) расположение точек на прямой; 4) параллельность прямых; 5) равенство (или пропорциональность) сечений, лежащих на одной или параллельных прямых.	1) длина участка; 2) размер угла; 3) перпендикулярность прямых; 4) равенство углов (пропорциональность); 5) равенство (пропорциональность) сечений, лежащих на пересекающихся прямых.

Перпендикулярность прямой к плоскости

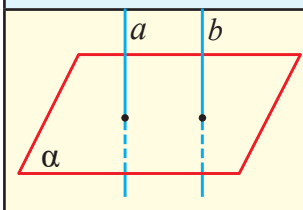
Описание	Обозначение
	
Если $b \in \alpha$ произвольного $a \perp b$, это называется $a \perp \alpha$.	Если $b \in \alpha$, $c \in \alpha$ для $a \perp b$, если $a \perp c$, то $a \perp \alpha$.

Перпендикуляры и наклонные

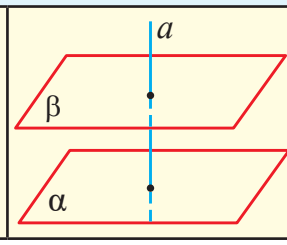
Описание	Обозначение
	
Если $a \perp \alpha$, $AB \notin \alpha$, то AB – перпендикуляр, опущенный на плоскость α из точки A; AC – наклонная, BC – проекция наклонной на плоскости α.	$BC < AB$, $BC < BD$. Если $AB = BD$, то $AC = CD$. Если $AC = CD$, то $AB = BD$. Если $AC > CD$, то $AB > BD$.

Теорема о трёх перпендикулярах	Угол между прямой и плоскостью
	
$AB \perp \alpha$ Если $a \perp BC$, то $a \perp AC$. Если $a \perp AC$, то $a \perp BC$.	Прямая b – проекция прямой a на плоскости α. φ – угол между прямой a и плоскостью α.

Связь между параллельностью и перпендикулярностью плоскостей



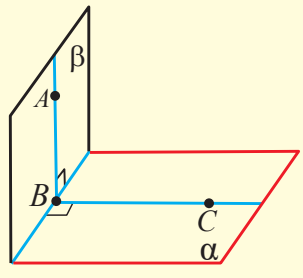
Если $a \parallel b$, $\alpha \perp a$, то $\alpha \perp b$.
Если $\alpha \perp a$, $b \perp \alpha$, то $a \parallel b$.



Если $\alpha \parallel \beta$, $a \perp \beta$, то $a \perp \alpha$.
Если $\alpha \perp a$, $\beta \perp a$, то $\alpha \parallel \beta$.

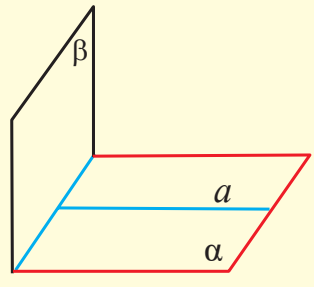
Перпендикулярность плоскостей

Описание



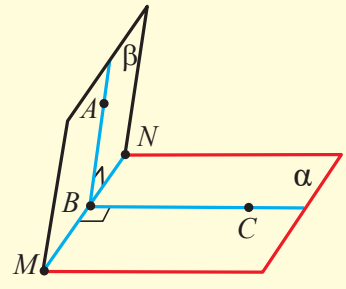
Если $\angle ABC = 90^\circ$, α и β перпендикулярны.

Признак

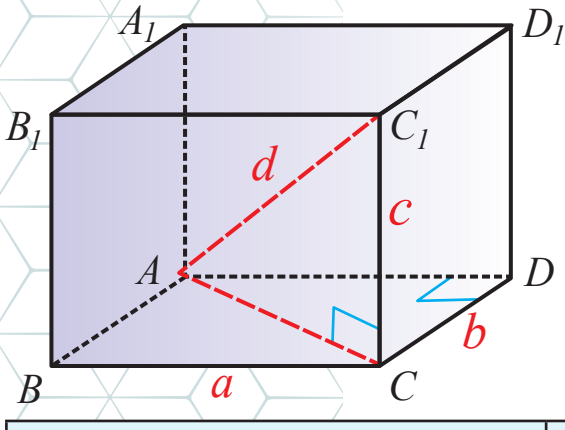


Если $a \subset \alpha$ и $a \perp \beta$, то $\alpha \perp \beta$.

Угол между плоскостями



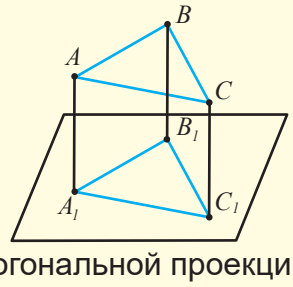
Если $AB \perp MN$ и $CB \perp MN$, то $\angle ABC$ – угол плоскостей α и β.



Обобщённая теорема Пифагора

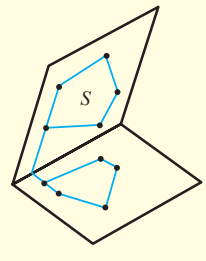
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Ортогональная проекция в пространстве



В ортогональной проекции: $l \perp \alpha$.
l – направление проекции;
α – плоскость проекции.

Грань многоугольной проекции



$$S_1 = S \cdot \cos\varphi$$

S – площадь многоугольника;
S_1 – площадь многоугольной ортогональной проекции;
φ – угол между многоугольником и плоскостями проекций.

скачано с сайта www.idum.uz

O‘quv nashri

GEOMETRIYA

Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining
10-sinfi uchun darslik

(Rus tilida)

Перевод Нигоры Садуллаевой
Редактор Вероника Пак
Технический редактор Акмаль Сулайманов
Корректор Людмила Ким
Художник Умид Сулайманов
Компьютерная верстка и дизайн
Ихволдин Салохитдинов

Подписана в печать 00.00.2022. Формат 60x84 1/8.
Гарнитура «Arial». Кегль 12. Печать офсетная.
Усл.печ.л. 22,32. Уч.-изд.л 19,43.
Тираж _____. Заказ №_____.

скачано с сайта www.idum.uz

Таблица состояния учебника, выданного в аренду

T/r	Фамилия, имя ученика	Учебный год	Состояние учебника при получении	Подпись классного руководителя	Состояние учебника при сдаче	Подпись классного руководителя
1						
2						
3						
4						
5						
6						

В конце учебного года учителем на основе следующих критериев оценивается состояние учебника, выданного в аренду:

Новый	Сохранено первоначальное состояние учебника.
Хороший	Обложка целая, не отделена от основной части учебника. В наличии все страницы, целые, по порядку, без надписей и рисунков на страницах.
Удовлетвори-тельный	Обложка мятая, частично исписанная, края листов загнуты, удовлетворительно подреставрирован учеником. Вырванные страницы вклеены, на некоторых имеются надписи.
Неудовлетво-рительный	Обложка исписанная, порванная, частично или полностью отделена от основной части, неудовлетворительно подреставртрована. Страницы порваны или отсутствуют, исчерчены, разрисованы. Учебник реставрировать невозможно.