ГЕОМЕТРИЯ

10

КЛАСС

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

Рекомендовано к изданию
Министерством народного образования
Республики Узбекистан

Ташкент – 2022

скачано с сайта www.idum.uz

UO'K 514(075.3)
KBK 22.151ya72
G 35

Авторы-составители:

Баходир Хайдаров,
Наргиза Таштемирова,
Исак Асроров,
Зиннат Бабаева

Рецензенты:

М. Х. Усманов - учитель математики СГОШ №3 при Управлении народного образования Наманганской области.

Алибекова А.К. - учитель математики СГОШ №180 Шайхонтохурского района города Ташкента.

Геометрия 10 класс [Текст]: методическое пособие / Б. Хайдаров, Н. Таштемирова, И. Асроров - Ташкент:

Республиканский образовательный центр, 2022. - 240 с.

Усовершенствовано на основе заключения Института математики им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан.

Оригинальный макет и дизайн разработаны
Республиканским центром образования.

Издано за счёт средств Республиканского целевого книжного фонда.

Подготовлено при содействии UNICEF в Узбекистане.

ISBN 978-9943-8453-2-9

© Республиканский центр образования, 2022

скачано с сайта www.idum.uz

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ПРЕДИСЛОВИЕ

ГЕОМЕТРИЯ В ОБЩИХ СРЕДНИХ ШКОЛАХ

1. Национальная учебная программа по математике 7
2. Уточнённые элементы стандартов по геометрии для 10 класса 12
3. Учебный план и распределение часов для 10 класса по геометрии..... 15

ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

1. Методические подходы к преподаванию математики..... 19
2. Интеграция математики с другими предметами 24
3. Принципы оценивания достижений учащихся по математике 27
4. Роль историко-научного наследия на уроках геометрии..... 33

ГЛАВА I. СИСТЕМАТИЧЕСКОЕ ПОВТОРЕНИЕ ПЛАНИМЕТРИИ

1. Логическая структура геометрии 35
2. Геометрические задачи и методы их решения..... 37
3. Практические упражнения на повторение главы 41

ГЛАВА II. ВВЕДЕНИЕ В СТЕРЕОМЕТРИЮ

1. Основные понятия стереометрии..... 58
2. Прямые и плоскости в пространстве 66
3. Пространственные геометрические фигуры. Многогранники 74
4. Описание и создание модели многогранников 77
5. Построение простейших сечений многогранников 79
6. Подготовка проектной работы 84
7. Практические упражнения на повторение главы 104

ГЛАВА III. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

11. Взаимное расположение прямых в пространстве.....114
12. Пересечение прямых 119
13. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.....128
14. Взаимное расположение плоскостей в пространстве 131
15. Параллельная проекция в пространстве.....135
16. Практические упражнения на повторение главы 137

скачано с сайта www.idum.uz

ГЛАВА IV. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

17. Перпендикулярная прямая и плоскости в пространстве.....140
18. Перпендикуляр, наклонная и длина в пространстве 144
19. Теорема о трёх перпендикулярах 146
20. Перпендикулярность плоскостей в пространстве 148
21. Ортогональная проекция в пространстве и её использование в технике 150
22. Практические упражнения на повторение главы 158

ГЛАВА V. ПОВТОРЕНИЕ

23. Повторение 161
Основные сведения о геометрии 228



ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ИГРЫ ДЛЯ УЧЕБНИКА «ГЕОМЕТРИЯ» 10 КЛАСС



ВИДЕОУРОКИ ДЛЯ УЧЕБНИКА «ГЕОМЕТРИЯ» 10 КЛАСС

ПРЕДИСЛОВИЕ

Уважаемые учителя!

В период нового развития нашей республики возрастает потребность в квалифицированных специалистах. Нынешние экономические условия требуют участия поколения, которое по-новому мыслит и думает, смотрит на мир новыми глазами. Чем быстрее это внедрится, тем быстрее будет расти экономический потенциал нашей страны. На этом этапе также очень важным вопросом являются требования к математической подготовке молодёжи.

Новые государственные образовательные стандарты и учебная программа, установленные Национальной учебной программой по математике, ставят задачу: поднять геометрическое образование на новый качественный и содержательный уровень. Это, в свою очередь, одна из важнейших задач сегодняшнего дня, очень трудная и в то же время почётная задача, – воспитать совершенное поколение, человека нового времени, нового общества, который создаст будущее нового Узбекистана. Это зависит от преданных своему делу учителей, таких как вы.

Для выполнения этих задач созданы учебник «Геометрия» для 10 класса и методическое пособие для учителей. Темы, представленные в учебнике, кратко изложены простым, понятным языком, на примере жизненных задач и оформлены рисунками. Уроки включают в себя различные небольшие вопросы, тесты, практические упражнения, задания по каждой теме, которые взаимосвязаны между собой и требуют от ученика творческого подхода. Указания по проведению урока по учебнику приведены в методическом пособии.

При создании учебника также использовался передовой опыт развитых стран. При этом в учебнике большое внимание уделяется восточным ценностям нашей страны. Учебник написан с учётом возможностей, возраста, индивидуальных особенностей ученика, того, что он является самостоятельно мыслящей, свободной личностью со своими взглядами и понятиями. На основе данного учебника учитель может широко использовать и внедрять специально ориентированные методы обучения (интерактивный метод), обеспечивающие активное участие учащихся на уроках и занятиях. Темы наполнены конкретными вопросами и практическими упражнениями, связанными с жизнью и бытом, и служат для того, чтобы сделать учащихся активными участниками учебного процесса во время и после урока. При необходимости даются и исторические сведения, и учащиеся понимают, что эта наука не является абстрактной, непонятной, трудной наукой, а возникла в силу желаний людей, развития цивилизации и служила человечеству, и более того, развитие этой науки нашими великими соотечественниками позволит получить необходимые знания и сведения об их неоценимом, огромном вкладе.

С учётом возрастных особенностей учащихся учебный материал в учебнике сочетается с аксиоматическим подходом, и в то же время, не акцентируя на этом внимания учащегося, даётся максимально просто, понятно и ясно. В частности, старались излагать темы в сжатой форме, использовать как можно меньше слов, не включать в учебник

материалы, которые не нужны ученику или касаются только учителя. В этом, конечно, очень важна роль рисунков и чертежей.

Чертежи можно использовать не только как рисунок или иллюстрацию, выражающую условие задачи или теоремы, но и как средство развития геометрической интуиции и воображения. В древнеиндийских научных трудах по математике доказательство теоремы часто сопровождается рисунком и надписью "Смотри!" Содержание и суть теоремы или задачи отражены на этом чертеже.

Решение задач играет очень важную роль в работе с учебниками и в изучении геометрии в целом. Поэтому главное внимание учебника и данного пособия уделяется этому. Новые понятия, формы, их свойства, ранее знакомые понятия, новая интерпретация и расширение фактов, суть проводимых рассуждений могут быть досконально усвоены при решении задач.

Исходя из требований новых государственных образовательных стандартов, методическое пособие для учителей содержит методические указания по ведению занятий на основе учебников, конспекты уроков по каждому предмету, указания и решения некоторых задач , для закрепления темы даются дополнительные задачи и их решения. Кроме того, предоставляется годовой план уроков, составленный по учебнику, письменные варианты промежуточных контрольных работ, полные тестовые задания на каждую четверть, материалы для внеклассной работы.

Данное пособие предназначено для всех школьных учителей, преподающих геометрию, и специалистов, занимающихся вопросами методики её преподавания. Надеемся, что рекомендации, данные в нём, помогут улучшить преподавание этого предмета.

Авторы.

НАЦИОНАЛЬНАЯ ПРОГРАММА ПО МАТЕМАТИКЕ

Цели Национальной учебной программы по математике

Цель обучения математике заключается в следующем:

- обеспечение приобретения учащимися знаний и навыков о математических понятиях, свойствах, геометрических фигурах, методах и алгоритмах;
- понимать значение математики в развитии человека и развитии общества, социально-экономических отношений, учить правильному применению математических знаний и умений в повседневной жизни;
- демонстрировать и развивать навыки самостоятельного обучения, творческого, критического мышления и логического анализа, любознательности, решения проблем и создания инноваций при развитии индивидуальных особенностей учащихся;
- формирование у учащихся национальных и общечеловеческих ценностей с учётом интеграции предметов и ориентирование их на осознанный выбор профессии;
- формирование и развитие математического содержания, необходимого для изучения других предметов, требующих математических знаний и умений в будущем.

Ключевые компетенции, разработанные для учеников, изучающих математику

В системе общего среднего образования определено, что ключевые компетенции формируются у учащихся совместно с компетенциями, связанными с наукой. Целесообразно сосредоточить внимание на формирование ключевых компетенций у учащихся путём изучения различных предметов, применять полученные знания и умения в различных жизненных ситуациях.

Коммуникативная компетентность

При формировании коммуникативных компетенций необходимо учить самостоятельному, творческому мышлению, письменной и устной речи, правильному произношению, интерпретации, свободному общению при изучении государственного и иностранных языков. В частности, математическая наука имеет свой научный язык, свои понятия, знаки и символы, и общение на этом языке следует рассматривать как фактор формирования коммуникативной компетенции.

Информационная компетенция

Необходимо регулярное использование современных информационно-телекоммуникационных средств, расширяющих возможности эффективного развития информационной компетенции при обучении предметам. При этом учащихся обучают работе с учебниками, электронными ресурсами и различными учебными источниками, поиску и анализу информации, связанной с математикой, а также формируют навыки работы со средствами информации и соблюдением требований информационной безопасности, используя различные практические программные пакеты и расходные материалы, рекомендуется использовать мобильное устройство (телефон, планшет и другие гаджеты).

Компетенция самосовершенствования

В формировании компетенции самосовершенствования необходимо обучить качествам, построенным на основе общечеловеческих ценностей, любить Родину, знаниям об обществе и природе, стремлению к новшествам и умению принимать самостоятельные решения на основе полученных теоретических знаний; быть в курсе прогрессивных и инновационных изменений, происходящих в обществе, и быть заинтересованным в них, всегда стремиться приобретать современные знания и навыки и учиться использовать их в повседневной жизни. Благодаря тщательному изучению математики ученики учатся дисциплине, смотрят на каждую проблему, как

на математическую и полны уверенности решить её.

Компетенция социально-гражданской активности

Формирование компетенции социально-гражданской активности предполагает приобретение знаний о гражданском долге, социально-политическом развитии, чрезвычайных ситуациях, экологических проблемах, развитие организаторских способностей в понимании и сохранении художественных произведений. Также математика воспитывает их в духе честности и заботы о Родине, неравнодушное отношение к несправедливости. Благодаря тщательному изучению математики создается почва для развития учащихся как активных граждан общества.

Образовательные стандарты по математике «Аль-Джабр» (требования к приобретаемым знаниям и умениям выпускников)

Образовательные стандарты по математике для общеобразовательных школ (11 класс) состоят из обобщённых требований к знаниям, умениям и компетенциям выпускников по предмету, которые подразделяются на математическое содержание и нормы практической деятельности.

Стандарты математического содержания (знания и навыки) – понимание и применение основных математических понятий и взаимосвязей к типовым учебным задачам.

Эти стандарты определяют, что учащиеся должны понимать и уметь делать в процессе изучения математики. Одним из отличительных признаков понимания в математике является умение учащегося обосновать правильность или неправильность того или иного математического выражения или откуда берётся то или иное математическое правило, исходя из уровня математического усвоения. Не менее важно понимание математических понятий и умение выполнять типовые действия, которые оцениваются с помощью стандартных задач определённого уровня сложности.

Стандарты математического содержания выражены в виде обобщённых требований, они охватывают следующие области и разделы математики (названия содержательных областей и разделов кодируются большой буквой для удобства использования в дальнейшем):

- числа и операции (ЧО);
- алгебра и функции (АФ):
– геометрия и измерения (ГИ);
- статистика и вероятность (СВ);
- математический анализ (МА).

Область содержимого	Разделы области содержимого	Краткое описание и код стандарта по разделам
Числа и действия (SA)	Понятие числа	Получить представление о числах и величинах, способах их представления и знании систем счисления (SA.ST)
	Действия и вычисления	Знать сущность математических действий, устанавливать и понимать соотношение между числами и величинами и применять их при решении задач. Выполнять вычисления над числами и величинами без затруднений, оценивать результат и округлять его (SA.AH)

Алгебра и функции (АФ)	Алгебраические выражения и замены	Выражать, понимать и анализировать жизненные ситуации и явления в природе, количественные отношения на математическом языке с использованием математических знаков и символов, знать основные алгебраические замены и использовать их при решении задач. (AF.AA)
	Соотношения и функции	Понимать сущность закономерностей в природе и обществе, как функций, интерпретации отношений между переменными в этих процессах с математической точки зрения (AF.MF)
	Уравнения и неравенства	Умение использовать стандартные способы решения линейных, квадратных, рациональных, иррациональных, показательных (экспоненциальных), логарифмических, степенных и тригонометрических уравнений, неравенств и их систем, а также наглядное представление решений (AF.TT)
Геометрия и измерения (ГИ)	Геометрические фигуры	Уметь узнавать плоские и пространственные геометрические фигуры на чертежах, моделях и в реальной действительности, знать их основные свойства
	Геометрические наблюдения и решение задач	Развитие геометрического и логического мышления о свойствах геометрических фигур, использование методов геометрического доказательства и алгоритмов решения задач, производить обоснованное математическое рассуждение
	Геометрические наблюдения и решение задач	Развитие геометрического и логического мышления о свойствах геометрических фигур, использование методов геометрического доказательства и алгоритмов решения задач, производить обоснованное математическое рассуждение
	Геометрические построения	Описание геометрических отношений и определение их геометрического положения в системе координат и других системах изображения, создание простых геометрических построений, использование симметрии и замены геометрических фигур(GO‘.GY).
	Измерение и способы измерения	Знание измеряемых элементов различных объектов, единиц измерения, понимание сущности измерительных систем и процессов, соответствующих методов измерения, формул, обучающих средств, мультимедийных интерактивных приложений, использование калькулятора и средств измерения в процессе обучения. (GO‘.O‘U)

Статистика и вероятность (СВ)	Множества и элементы логики	Знать сущность действий над множествами и уметь их выполнять, уметь делать простые логические выводы (SE.TM).
	Статистический анализ информации	Находить, идентифицировать, собирать и обрабатывать необходимые данные, интерпретировать результаты и представлять их с помощью различных инструментов; выбирать и применять соответствующие методы статистической обработки для анализа данных, разрабатывать соответствующие выводы и прогнозы на основе данных и их оценки (SE.ST).
	Основы комбинаторики	Понимать суть задач комбинаторики и использовать алгоритм решения при решении жизненных задач (SE.KA).
	Измерение и способы измерения	Понимание, исследование, разработка, интерпретация, оценка и использование вероятностных моделей случайности, статистических явлений и процессов (SE.EN).
Математический анализ (МА)	Функция и её применение	Знать и определять основные понятия функции, её общие свойства и виды, а также уметь распознавать основные элементарные функции, знать их основные свойства, уметь пользоваться ими при решении уравнений и неравенств, практических задач (MA.FT).
	Производная и её применение	Знать сущность понятий непрерывности и производной функции, понимать геометрический и физический смыслы производной, знать алгоритм проверки функций с помощью производной, уметь пользоваться ими при определении свойств функций, а также при решении практических, экстремальных задач (MA.HT)
	Элементарная функция, определённый интеграл и его приложения.	Знать сущность элементарных функций и определенных интегральных понятий и уметь их использовать при решении различных практических задач (вычисление поверхностей и объёмов и нахождение выполненной работы) (MA.IT)

Стандарты практической деятельности (компетенции) – применение знаний и навыков при решении практических задач в незнакомых ситуациях.

Эти стандарты также имеют обобщённое содержание, они охватывают следующие направления практической деятельности учащихся (для удобства использования в дальнейшем эти направления кодируются соответствующими буквами):

– рассуждение (МЙ);
– математическое моделирование (ММ);
– решение проблем (МХ);
– связь (МК).

Вид практической деятельности	Краткое содержание практической деятельности	Код и краткое содержание стандарта практической деятельности
Рассуждение(МЙ)	Предоставлять логичные и понятные аргументы, чтобы доказать или согласиться с мнением других	Логическое мышление, основанное на мыслительной деятельности, догадках, выводах, предоставлении доказательств, обосновании, заключении; обдумывании оснований и причин (M.Y.AF)
		Размышление об использованных определениях, правилах, понятиях, алгоритмах и методах, математических решениях и ошибках (MY.AU);
		Распознавать и использовать соотношения между математическими понятиями (MY.AT)
		Создание целого математического понятия объединением математических понятий или построением одного поверх другого (MY.TB)
Математическое моделирование (ММ)	Выражение на математическом языке учебных и жизненных проблем, построение их моделей	Читать и понимать характер проблемных ситуаций, анализировать и определять представленную в них проблему (ММ.VT)
		Использование различных методов математической интерпретации для объяснения и моделирования явлений и процессов в природе и обществе (ММ.МТ)
		Выражение проблемы в виде математической задачи, создание математической модели (ММ.МТ)
Решение проблемы (МН)	Решить проблему при помощи математики	Использование изученных математических понятий, фактов, идей, закономерностей, алгоритмов и методов для решения жизненных задач и практических математических задач (МН.MF)
		Логическое, креативное мышление, математическое наблюдение и методы научного исследования для решения проблемы (задачи): наблюдение, измерение, экспериментирование, анализ и синтез, индукция и дедукция, сравнение и использование аналогий (МН.МЙ)
		Анализ, выбор и обоснование альтернативных методов и алгоритмов решения проблемы (задачи) (МН.MU)
		Создание и усвоение новых математических знаний в процессе решения проблемы (задачи) (МН.ВО‘)
		Выражение и исследование математических предположений, математическое рассуждение, сравнение и оценка (МН.ТТ)

		Перенесение математического решения на содержание реальной задачи и его интерпретация применительно к реальной проблеме, описанной в математической задаче и оценка совместимости и близости найденного решения с реальным решением задачи (MH.TB)
Общение (МК)	Взаимное общение на математическом языке на основе математических понятий, знаков и символов	Изучение алгоритмов решения задач на основе жизненных ситуаций, демонстрация проектной работы в процессе реализации и использование возможностей ИКТ в презентации (MH.TQ)
		Использовать математический язык, знаки и символы для устной и письменной передачи математических идей, для общения с другими (МК.БТ) Понимание, анализ, оценка и реагирование на идеи других о математике (MQ.TB)

В каждом классе стандарты практической деятельности по математике взаимосвязаны со стандартами содержания и соответственно отражаются в них. Стандарты практической деятельности соответствуют содержательным нормам, прививаются исходя из физиологических и логических возможностей, соответствующих возрастным, мыслительным и практическим сферам деятельности.

КОНКРЕТНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СТАНДАРТОВ ПО ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ 10 КЛАССА

Область содержимого	Разделы области содержимого	Краткое описание и код стандарта по разделам	Уточняющие элементы и код стандарта
Геометрия и измерения (ГИ)	Геометрические фигуры	Узнаёт чертёж, модель, в реальной жизни плоские и пространственные геометрические фигуры, знает их основные свойства. (GO'.GSH)	M10. GO'. GSH.01. Знает аксиомы стереометрии и может использовать их в доказательствах; M10. GO'. GSH.02. Знает определение скрещивающихся, параллельных и пересекающихся прямых в пространстве и может начертить их на чертеже; M10. GO'. GSH.03. Знает определение прямой, параллельной плоскости; M10. GO'. GSH.04. Имеет представление о пересекающихся и параллельных плоскостях; M10. GO'. GSH.05. Знает определение прямой, параллельной плоскости; M10. GO'. GSH.06. Знает определение параллельных и пересекающихся плоскостей; M10. GO'. GSH.07. Приобретает базовые понятия о многоугольниках: призме, параллелепипеде, кубе, пирамиде;

			М10. GO'. GSH.08. Может отображать на чертеже элементы многоугольников: призмы, параллелепипеда, куба, пирамиды; М10. GO'. GSH.09. Знает и умеет пользоваться признаком параллельности двух плоскостей; М10. GO'. GSH.10. Может представлять прямые, перпендикулярные плоскости; М10. GO'. GSH.11. Приобретает понятие о перпендикулярах и диагоналях, опущенных на плоскость в пространстве; М10. GO'. GSH.12. Овладеет информацией о теореме о трёх перпендикулярах; М10. GO'. GSH.13. Приобретает понятие об ортогональной проекции.
Геометрия и измерения (ГИ)	Решение геометрического наблюдения и задачи	Развивать геометрическое и логическое мышление о свойствах геометрических фигур, применять геометрические доказательства и ступени решения задач, вести обоснованное математическое рассуждение. (GO'.MM)	М10. GO'.MM.03. Знает свойства прямых, параллельных плоскости и может использовать их для решения практических задач; М10. GO'.MM.04. Знает свойства параллельных прямых и может использовать их для решения практических задач; М10. GO'.MM.05. Знает свойства параллелепипеда и может использовать их для решения задач; М10.GO'.MM.06. Знает знак пересечения прямых и может использовать его для решения задач; М10. GO'.MM.07. Знает свойства параллельных плоскостей и может использовать их для решения практических задач; М10. GO'.MM.08. Знает свойства параллельного проецирования и может использовать его для решения практических задач; М10. GO'.MM.09. Знает признак перпендикулярности прямой к плоскости и может использовать его для решения задач; М10.GO'.MM.10. Может применять свойства прямых, перпендикулярных плоскости, при решении практических задач; М10.GO'.MM.11. Знает обобщённую теорему Пифагора и может ее применять; М10.GO'.MM.12. Может применять соотношение между перпендикуляром и перпендикуляром, проведённым к плоскости в пространстве, при решении практических задач; М10.GO'.MM.13 Умеет применять теорему о трёх перпендикулярах и теорему, противоположную ей, при решении задач; М10. GO'.MM.14. Умеет применять теорему о перпендикулярности плоскостей в пространстве; М10. GO'.MM.15. Может начертить линейный угол двустороннего угла на чертеже и вычислить его при решении задач;

			M10. GO'MM.16 . Умеет вычислять угол между плоскостями, чертить на чертеже; M10.GO'.MM.17. Может использовать теорему об перпендикулярных плоскостях в пространстве для решения задач; M10.GO'.MM.18. При решении задач умеет пользоваться признаком перпендикулярности плоскостей и вытекающими из него результатами; M10. GO'.MM.19. Может найти грань ортогональной проекции многоугольника.
Геометрия и измерения (ГИ)	Изображение геометрических построений и соотношений	Отображение геометрических соотношений и определение их геометрического положения в системе координат и других системах, построение простых геометрических построений, использование симметрии и замены геометрической фигуры. (GO‘.YM)	M10.GO‘.YM.01. Может при помощи развёрток простых пространственных форм делать их модели и чертить на плоскости; M10. GO‘.YM.02. Может чертить многогранники на плоскости; M10. GO‘.YM.03. Может представлять параллельные прямые; M10. GO‘.YM.04. Может представлять скрещивающие прямые; M10. GO‘.YM.05. Может представлять перпендикулярные прямые ; M10. GO‘.YM.06. Может определять и вычислять расстояние от точки до прямой и до плоскости; M10. GO‘.YM.07. Может построить двугранный угол и показать его элементы на чертеже; M10.GO'.YM.08. Может чертить ортогональные проекции простых пространственных форм на чертеже.

УЧЕБНЫЙ ПЛАН И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСОВ ПО ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ 10 КЛАССА

(2 часа в неделю, всего 68 часов)

Главы и отведённые часы	Темы	Учебные цели (элементы стандарта)
Глава I. Повторение (6 часов)	**Логическая структура планиметрии (1 час).** Геометрические задачи и методы их решения (3 часа). Практические упражнения на повторение главы (2 часа).	
ГЛАВА II. ВВЕДЕНИЕ В СТЕРЕОМЕТРИЮ (14 часов)	**Основные понятия стереометрии (2 часа).** Аксиомы стереометрии. Следствия, вытекающие из аксиом стереометрии.	M10.GO‘.GSH.01. Знает аксиомы стереометрии и может использовать их при доказательствах; M10.GO‘.MM.01. Знает следствия,вытекающие из аксиом стереометрии и умеет их применять;
	Прямые и плоскости в пространстве (2 часа). Скрещивающиеся, пересекающиеся и параллельные прямые в пространстве. Прямые, пересекающие плоскости в пространстве и параллельные ей. Пересекающиеся и параллельные плоскости в пространстве.	M10.GO‘.GSH.02. Знает определение скрещивающихся, параллельных и пересекающихся прямых в пространстве и может начертить их на чертеже; M10. GO‘.GSH.03. Знает определение параллельности прямых; M10. GO‘.GSH.03. Получает представление о пересекающихся и параллельных плоскостях; M10. GO‘.GSH.05. Знает определение прямой, параллельной плоскости; M10. GO‘.GSH.06. Знает определение параллельных и пересекающихся плоскостей; M10. GO'.MM.03.Знает свойства прямых, параллельных плоскости, и может использовать их для решения практических задач;
	Пространственные геометрические фигуры. Многогранники (2 часа). Пространственные тела. Многогранники и их элементы. Призмы, пирамиды и их виды. Правильная пирамида и её свойства. Формула площади боковой поверхности правильной пирамиды.	M10. GO‘.GSH.07. Имеет базовые понятия о многогранниках: призме, параллелепипеде, кубе, пирамиде; M10. GO‘.GSH.08. Может изобразить на чертеже многогранники: призму, параллелепипед, куб, пирамиду и их элементы; M10. GO‘.MM.02. Умеет решать задачи, связанные с нахождением поверхности призмы, параллелепипеда, куба, пирамиды;

	Изображение и изготовление моделей многогранников (2 часа). Изображение многогранников на плоскости. Развёртка многогранников и построение по ним их модели.	М10.GO'.YM.01. Может делать модели простых пространственных тел с помощью развёртки и чертить их на плоскости; М10. GO'.YM.02. Может чертить многогранники на плоскости;
	Построение простейших сечений многогранников (3 часа). Понятие о сечении. Способы построения простых сечений многогранников.	
	Занятие по проектной работе (1 час).	
	Суммативное оценивание. Контрольная работа 1 (2 часа).	
ГЛАВА III. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ (18 часов)	**Взаимное расположение прямых в пространстве (2 часа).** Параллельные прямые и их свойства.	М10. GO'. YM.03. Может представлять параллельные прямые; М10. GO'.MM.04. Знает свойства параллельных прямых и может использовать их при решении практических задач; М10. GO'.MM.05. Знает свойства параллелепипеда и может использовать их при решении задач;
	Скрещивающиеся прямые (2 часа). Признак пересечения прямых. Угол между скрещивающимися прямыми.	М10. GO'. GSH 04. Знает определение скрещивающихся, параллельных и пересекающихся прямых в пространстве и может начертить их на чертеже; М10.GO'. YM.04. может представить скрещивающие прямые; М10.GO'.MM.06.Знает признак пересечения прямых и может использовать его при решении задач; М10. GO'. GSH.05. Знает определение параллельности прямой к плоскости; М10. GO'. GSH.06. Имеет представление о пересекающихся и параллельных плоскостях;
	Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве (4 часа). Прямые, параллельные плоскости и их свойства. Параллельные прямые и их свойства.	М10. GÓ. MM. 06. Знает свойства прямых, параллельных плоскости и может использовать их при решении практических задач;

	Взаимное расположение плоскостей в пространстве (2 часа). Параллельные плоскости и их свойства. Изображение пространственных форм на плоскости.	М10. GÓ. GSH. 09. Знает и умеет пользоваться признаком параллельности двух плоскостей; М10. GO'.MM.07. Знает свойства параллельных плоскостей и может использовать их при решении практических задач;
	Параллельная проекция в пространстве (2часа).	М10. GÓ. MM. 07. Знает свойства параллельных плоскостей и может использовать их при решении практических задач; М10.ГО'.ММ.08. Знает свойства параллельной проекции и может использовать их при решении практических задач;
	Практические упражнения на повторение главы (4часа).	
	Суммативное оценивание. Контрольная работа 2 (2 часа).	
ГЛАВА IV. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ (19часов)	**Перпендикулярность прямой и плоскости в пространстве (3 часа).** Свойства перпендикулярных прямых в пространстве. Признак перпендикулярности прямых. Обобщённая теорема Пифагора.	М10. GO'. GSH.10. Может представлять прямые линии, перпендикулярные плоскости; М10. GO'.MM.09. Знает признак перпендикулярности прямой к плоскости и может использовать его для решения задач; М10. GO'.MM.10. Он может применять свойства прямых, перпендикулярных плоскости, при решении практических задач; М10. GO'.MM.11. Знает обобщённую теорему Пифагора и может её применять; М10. GO'. YM.05. Может представлять перпендикулярные прямые;
	Перпендикуляр, наклонная и расстояние в пространстве (3 часа). Перпендикуляр и наклонная, опущенные на плоскость в пространстве. Расстояние от точки до плоскости. Расстояние от прямой до плоскости, параллельной ей. Расстояние между параллельными плоскостями. Расстояние между скрещивающимися прямыми.	М10. GÓ. GSH. 11. Имеет понятие о перпендикуляре и наклонных,опущенных к плоскости в пространстве; М10.GO'.MM.12 При решении практических задач может применять соотношение между перпендикуляром и наклонной, проведённой к плоскости в пространстве; М10. GO'. YM.06. Может определять и вычислять расстояние от точки до прямой и до плоскости;
	Теорема о трёх перпендикулярах (2 часа). Теорема о трёх перпендикулярах и противоположная ей теорема.	М10. GO'. GSH.12. Знает теорему о трёх перпендикулярах; М10. GO'.MM.13. Теорема о трёх

	Перпендикулярность плоскостей в пространстве (3 часа). Двусторонний угол и его элементы. Линейный угол двустороннего угла. Угол между плоскостями. Перпендикулярные плоскости в пространстве. Признак перпендикулярности плоскостей и следствия ,вытекающие из него.	перпендикулярах и обратная ей теорема могут быть использованы при решении задач; M10. GO'.MM.14. умеет применять теорему о перпендикулярности плоскостей в пространстве; M10. GO'.MM.15. может начертить линейный угол двустороннего угла на чертеже и вычислять при решении задач; M10. GO'.MM.16. Может описать, начертить и вычислить угол между плоскостями на чертеже; M10. GO'.MM.17. Может использовать теорему о перпендикулярных подплоскостях в пространстве для решения задач; M10. GO'.MM.18. При решении задач может пользоваться признаком перпендикулярности плоскостей и вытекающими из него следствиями; M10. GO'.YM.07. Может составить двусторонний угол и показать его элементы на чертеже;
	Ортогональная проекция в пространстве и её использование в технике (2часа). Использование ортогональной проекции в технике.	M10. GO'. GSH.13. Имеет представление об ортогональной проекции; M10.GO'.YM.08. Может изображать ортогональные проекции простых прстранственых тел на чертеже. M10. GO'.MM.19. Может найти грань ортогональной проекции многоугольника.
	Практические упражнения на повторение главы (4 часа).	
	Суммативное оценивание. Контрольная работа 3 (2 часа).	
ПОВТОРЕНИЕ(11часов)	**Задачи на повторение (7 часов).**	
	Презентация проектной работы (2 часа).	M10.SE.ST.07 .На основе полученных знаний и умений в процессе выполнения проектной работы по небольшой учебно-исследовательской теме по заданной проблемной ситуации у него формируются компетенции, соответствующие требованиям стандартов практической деятельности.
	Суммативное оценивание. Контрольная работа 4 (2 часа).	

Методические подходы по обучению математике

В современный период развития нашей страны определились новые приоритеты образования в соответствии с мировыми стандартами. Повышение функциональной грамотности школьников, их активной деятельности в обществе, самоопределения, самосовершенствования и саморазвития как основного ориентира повышения качества школьного образования требует навыков реализации.

На основе анализа передового зарубежного опыта можно сказать, что развитие функциональной грамотности учащихся по математике в школах охватывает следующие направления норм практической деятельности:

- поиск и использование определений, формул и других фактов, связанных с математикой, из учебной и справочной литературы;
- применение алгебраических знаний, умений и графических навыков в различных жизненных ситуациях;
- сбор данных, анализ, обработка, синтез;
- использование математических формул, самостоятельное создание формул, выражающих связь между величинами, на основе обобщения некоторых частных случаев;
- применение освоенных алгебраических замен при представлении и анализе функциональных графических образов и представлений окружающих предметов или соответствующих предметов в других дисциплинах;
- уметь обосновывать свою точку зрения, участвовать в её обсуждении и делать логически правильный вывод;
- работа с математическим текстом (анализ и извлечение необходимой информации), умение чётко и правильно излагать своё мнение, используя математические термины, знаки и символы, выражать его устно и письменно;
- решать жизненно важные задачи практического характера, уметь пользоваться при их решении необходимыми справочниками и расчётными средствами, таблицами, диаграммами, реальными цифровыми данными в графическом виде и статистическим анализом данных;
- использование современных информационных технологий как средства решения математических задач практического характера.

Для этого при изучении математики рекомендуется обратить внимание на следующее:

- сочетание традиционных и современных методов обучения;
- поощрение и развитие учащихся с помощью тщательно подобранных заданий и упражнений;
- поддержка обучения учащихся посредством оценки обучения;
- поощрение активного обучения учащихся на основе малых учебных открытий;
- развитие у учащихся навыков творческого и критического мышления;
- развитие у учащихся навыков совместной работы путём организации общеклассной работы, индивидуальной и групповой деятельности;
- правильное и точное формирование математической речи;
- различать математическое содержание и методы решения текстовых задач и применять их к новой ситуации;
- перевести термины задачи из текстовой формы в математический язык и раскрыть смысл и сущность этих форм;
- на основе дифференцированного подхода, позволяющего более глубоко изучить предмет, сформировать у учащихся навыки творческой работы и создать для них задачи на выполнение активных мыслительных действий;
- создание дифференцированных

индивидуальных траекторий обучения в образовательном процессе;

- использование на уроке интерактивных и активных образовательных технологий: проектного, исследовательского, эвристического, кейсного, проблемного методов обучения.

Исходя из изложенного, рекомендуется обратить внимание на следующие методические аспекты в обучении математике:

1. Суть учебного процесса заключается не в изучении большого количества учебного материала, а в том, чтобы обратить внимание на более глубокое понимание учащимися вводимых математических терминов и фактов. Иначе дело обстоит с обычными, особенно с нашими школьными программами по математике: учебная программа тяжёлая, слишком много тем, которые нужно охватить, и у нас мало времени. В результате, возможности для углубленного изучения этих тем будут ограничены. Каждая тема должна быть изучена глубоко. Ученики должны вернуться к предмету не для того, чтобы повторить его, а для более глубокого изучения, то есть вернуться к предмету, чтобы изучить его более серьезно. Высокий уровень обучения учащихся можно поддерживать за счёт внеклассной деятельности. В классе не должно быть отстающих учеников, которые не усвоили предметы. Всё внимание должно быть сосредоточено на усвоении предмета в той или иной степени всеми учащимися. Учащиеся, уже освоившие этот уровень, будут продолжать более углубленно изучать тему, пока другие не достигнут этого уровня.

2. Необходимо вести учебный процесс от конкретного практического опыта к абстрактным понятиям. Изучение понятий проводится в три этапа.

На первом этапе учащиеся занимаются различной практической деятельностью, связанной с вводимым понятием, пытаются удерживать руками различные материальные предметы, связанные с понятием, или изготавливают из них различные модели.

На втором этапе они выражают новое понятие с помощью символов. Они изображают их на различных картинках, схемах или рисунках.

Только после этого на третьем этапе переходят к абстрактному определению, математическому представлению и обозначениям нового понятия. Другими словами, знакомство с математическими понятиями начинается с наглядного примера, на основании которого абстрактному понятию даётся возможность «схватить» и «увидеть».

Ход обучения от практического опыта к отвлечённым понятиям создает у учащихся определённые ассоциации (яркие, глубокие и стойкие впечатления в памяти) по каждой теме. При запоминании этих впечатлений будут вспоминаться различные аспекты предмета.

Ориентация на практическую работу с самого начала учебного процесса повышает мотивацию (интерес) к обучению и заранее знает, для чего изучается то или иное математическое понятие и когда и где оно понадобится в жизненных ситуациях. Это поможет им понять, что математика не только нужна и полезна в жизни, но и привлекательна.

3. Особое внимание следует уделить математическому моделированию. При этом визуализируется состояние данного вопроса. Смоделирована проблема, организовано удобное использование данных и начато пошаговое решение проблемы.

4. Большое внимание следует уделять совместному обучению и взаимодействию. При решении задач учащимся предоставляется возможность высказывать математические понятия и своё мнение по проблемам, обсуждать их вместе, а также выслушивать мнения других. В результате учащиеся лучше усваивают понятие, привыкают к правильному использованию языка математики, а в не-

которых случаях понимают, что решений той или иной задачи может быть несколько. Каждый раз, когда учащиеся решают задачу, их следует поощрять к разговору вслух со своими одноклассниками о состоянии задачи, методах её решения. Это, в свою очередь, способствует тому, что они лучше запоминают тему и способы решения проблемы.

Также необходимо организовать для учащихся интерактивную работу в малых группах по несколько человек, например, решение задач в команде, объяснение друг другу, как они поняли тему, обсуждение решений, выполнение заданий в команде.

5. Учеников нужно учить не запоминать, а решать задачу (проблему). Обычно рекомендуется начинать занятие непосредственно с решения незнакомой задачи, а не с правила решения задачи нового типа. Ученики интуитивно пытаются решить проблему, основываясь на своих предыдущих знаниях и навыках. Вместе они рассуждают методом «проб, ошибок и исправлений», совершая ошибки и работая над ними, постепенно приближаясь к правильному решению. На этом этапе учащиеся на собственном опыте поймут, что ошибаться не так уж и плохо, что именно процесс анализа и проверки различных неправильных решений (небольшое исследование) постепенно приводит их к правильному решению.

Компетентностный подход к математическому обучению

Компетентностный подход к математическому обучению предполагает приобретение учащимися различных видов умений, позволяющих эффективно действовать в повседневных жизненных ситуациях, связанных с профессиональной и личной деятельностью.

Соответственно, в компетентностном подходе внимание уделяется усилению практического и прикладного направлений математического образования.

При организации занятий по математике необходимо уделять больше внимания практике, чем теории, и в некоторой степени отказаться от подхода, основанного на обеспечении учащихся готовыми учебными материалами. На занятиях по математике рекомендуется использовать интерактивные методы, такие как кейсы, исследования, проекты, небольшие учебные открытия. При формировании малых исследовательских умений у учащихся необходимо использовать такие методы научного исследования, как наблюдение, эксперимент, измерения, анализ и синтез, индукция и дедукция, сравнение и аналогия. Важно не только формировать у учащихся знания и умения, но и приобретать компетенции по их применению в жизненных ситуациях.

STEAM – креативная технология

STEAM (S – science – естествознание, T – technology – технология, E – engineering – инженерия, A – art – искусство, M – mathematics – математика) образовательная технология по точным наукам, блок-модуль для демонстрации актуальности усвоения учащимися знаний, умений и навыков в повседневной жизни, которая позволяет проводить учебные исследования, эксперименты, развивать проектно-ориентированное творчество, создавать инновации на уроках и внеурочной деятельности, направленные на развитие их интересов. При реализации данной технологии учащиеся выполняют такие задачи, как создание проектов изготовления различных технических устройств, создание модели устройства на основе проекта и использование её на практике, нахождение её недостатков и устранение.

Проектная работа – зеркало практической деятельности

Проектная работа по естественным наукам с целью укрепления интереса учащихся к изучению общеобразовательных предметов через формирование

основных и практических компетенций по естественным наукам, выполнение малых учебных исследований. Такая ситуация не только повышает качество усвоения конкретного учебного предмета, но и открывает возможности для междисциплинарности и связи науки с повседневной жизнью, повышает эффективность образования.

Образовательный проект – это долгосрочная, направленная на более глубокое изучение проходимой темы или раздела, позволяющая подойти к образовательному процессу на основе опыта, практической деятельности, форма организации образования, требующая использования исследований и методов исследования.

Проектирование – это деятельность по изменению проблемы, которая включает строго регламентированную последовательность действий, приводящую к реалистичному результату.

В настоящее время в образовательной практике используются различные виды образовательных проектов. По типу ведущей деятельности проекты делятся на информационные, практические и исследовательские.

Например, если преподаватель ставит своей целью развитие у учащегося навыков работы с информационными технологиями, анализа текста, классификации и проверки информации из различных источников, то в информативном описании целесообразно использовать учебный проект. Целью проекта информационного описания является сбор данных, формализация и представление информации. Конечно, в любом виде учебного проекта есть этап сбора информации, но здесь он служит средством воспитательной работы, а в проекте познавательного описания определяется как основная цель. В этом случае деятельность учащегося направлена на работу с информацией.

При этом основной задачей является развитие у ученика компетентности в работе с информацией.

Когда возникает потребность в развитии практических навыков и компетенций, связанных с определённым предметом или предметами, эффективно использование практико-ориентированных проектов. В самом простом случае учитель может дать учащимся задание на создание математической модели конкретной задачи и её решение, создание учебно-раздаточных материалов или глоссария.

В процессе работы с практико-ориентированными проектами у учеников развиваются не только научные знания, навыки и умения, но и формируются компетенции в практической деятельности, такой как математическое моделирование и решение задач. Если ставится цель развить навыки аналитического и критического мышления учащихся, овладеть логическими способами восприятия и обработать большой объем информации, целесообразно использовать учебный проект по исследованию. Целью данного образовательного проекта является обоснование гипотезы проекта. Для достижения этой цели необходимо проводить опыты, анализировать, обобщать, сравнивать результаты, устанавливать закономерности развития, делать выводы, обосновывать свою точку зрения. Таким образом, основное внимание образовательного проекта по исследованию сосредоточено на развитии способности рассуждать. В образовательном проекте наибольшее внимание уделяется развитию творческих способностей учащихся. Именно проекты позволяют учащимся проявить себя и создать произведения любого жанра. Также проекты развивают творческие способности учащихся, повышая их статус в группе и позволяя провести самооценку. Любая творческая работа требует презентации и обратной связи с коллективом класса.

Поэтому проекты оказывают большое влияние на развитие у учеников практических компетенций, таких как работа с данными, математическое моделирова-

ние, решение проблем, рассуждение и общение.

Организация работы учеников по проектной работе

Ученикам рекомендуется выполнить только одну проектную работу по интересующему их предмету или направлению образования в течение одного учебного года. Темы проектов выбираются учителями как проблемные ситуации или кейсы в рамках одного или нескольких учебных предметов. Ученики могут работать индивидуально или в группах по 3-4 человека в зависимости от их интересов.

Работа над проектом завершается защитой, проводимой в конце учебного года. Защита может проходить в форме конференции в рамках одной или нескольких учебных тем.

Индивидуальная или групповая работа учеников над проектной работой может состоять из этапов разработки, включающих в себя следующие виды учебной деятельности:

- этап подготовки: планирование своей исследовательской деятельности, мотивация, определение проблемной ситуации, выбор темы исследования;

- этап проектирования: определение цели проекта, составление чёткого плана реализации мероприятий, разделение задач между собой;

- практический этап: исследование проблемы, сбор и обработка необходимых данных, создание математической модели задачи, применение математики, выявление альтернативных решений и выбор наиболее оптимального, его обоснование;

- этап анализа и интерпретации: проведение опросов или экспериментов при необходимости, сравнение запланированной работы и полученных результатов, анализ, интерпретация реальной проблемы, обобщение и вывод;

- контрольно-оценочный этап: анализ и оценка собственной деятельности, анализ положительных результатов и допущенных ошибок, поиск путей исправления ошибок, переход к проекту в связи с изменением реальной ситуации;

- этап оформления результатов: подготовка отчёта о результатах проектной работы;

- заключительный этап: подготовка презентации к защите проектной работы и её защита.

Ученики обычно проводят исследования по проектной работе в рамках самостоятельной деятельности вне класса. В часы занятий, указанные в программе, они обсуждают образцы из различных проектных работ, совместно работают в группах над конкретной проектной работой и одновременно получают консультации по теме своей проектной работы.

Как видно из вышеизложенного, деятельность учащихся в проектной работе принципиально отличается от традиционного обучения. Ведь в этом случае знания не даются учащимся в готовом виде, а представляются в виде задачи, а учащиеся решают задачу самостоятельно. Знания становятся инструментом для решения проблем, а не целью образования. Учащиеся чувствуют, насколько необходимо им получение новых знаний, что приводит к значительному повышению мотивации. Повысится их образовательная и практическая активность. В первую очередь повысится уровень самостоятельной работы. Разделившись на малые группы, учащиеся выявляют проблему, определяют, какие ресурсы и знания необходимы для её решения, работают с этими ресурсами, обобщают варианты решения проблемы. В этом случае преподаватель является не просто безмолвным наблюдателем, а даёт необходимые советы и помощь учащимся, когда это необходимо.

ИНТЕГРАЦИЯ МАТЕМАТИКИ С ДРУГИМИ ПРЕДМЕТАМИ

В обучении математике большое значение имеет не только её внутренняя интеграция между предметами, но и внешняя интеграция, то есть со STEAM или подобными блок-модулями.

В частности, важными считаются тесные связи математики со следующими областями науки:

Математика и естественные науки

Отношения между математикой и естественными науками основаны на моделировании, измерениях, экспериментах, исследованиях и эмпирических соображениях. В естественных науках и математике учащиеся разрабатывают модели, которые представляют количество, отношения и законы природы. Сначала их знакомят с измерением с использованием различных нетрадиционных единиц, а затем с использованием официальных единиц. Затем они рассматривают неопределённость и надёжность измерения.

Учащиеся собирают, анализируют и представляют качественные и количественные данные различными способами. Ученики приобретают навыки анализа сбора данных и выявления различных закономерностей на основе числовых данных и графиков.

При обучении физике ученики учатся понимать явления природы и основные физические процессы, а также использовать математические формулы при разработке приёмов и технологий. Многие физические задачи требуют умения составлять уравнение или систему уравнений и работать с ними. В обучении физике математика ориентирована не только как вычислительный аппарат, но и позволяет с помощью математических рассуждений делать физические выводы о природе, действительности и явлениях, а через исследование этих процессов и решение математических рассуждений осмысливать физические явления, уравнения. Разбор физических задач на уроках математики направлен на расширение способностей учащихся к логическому мышлению, расширение их представлений об окружающем мире, формирование навыков решения жизненных задач и использования полученных знаний в повседневной деятельности.

Биология формирует у учащихся умение чувствовать объект и систему живой природы, связи между живой и неживой природой. При этом у них вырабатывается положительное отношение к окружающей нас живой природе, сохранение природного разнообразия, а также активная жизнедеятельность с чувством ответственности. Интеграция этих двух предметов обеспечивается за счёт анализа насущных вопросов о биологических законах и моделях живой природы на уроках математики.

Химия формирует у учащихся умение чувствовать органические и неорганические вещества и структуры как объекты природы. На уроках математики органическая связь между этими двумя предметами обеспечивается анализом геометрических, качественных и количественных величин, связанных со строением веществ и структур, изучением их химических свойств, исследованием и выводами.

География формирует у учащихся умение системно и совместно ощущать дары природы и предметы, созданные в результате хозяйственной деятельности человека. На уроках математики связь между этими двумя предметами определяется путём решения и анализа жизненных задач, связанных с географическими объектами

Математика и цифровые технологии

Связь между математикой и цифровыми технологиями основана на данных, вычислениях и алгоритмическом мышлении. Компетентность в использовании информационных и коммуникационных технологий (ИКТ) включает обучение и умелое и творческое применение этих технологий в повседневной жизни.

Успехи информатики и информационных технологий, использование различных информационно-коммуникационных технологий и компьютерной техники позволяют повысить эффективность процесса обучения математике. В процессе обучения учащиеся развивают навыки ИКТ путём поиска, создания и обработки информации, обмена информацией и идеями, оценки и улучшения своей деятельности с помощью мультимедийного компьютерного оборудования, программного обеспечения и приложений. Создание и проектирование алгоритмов по математике, реализация проектов – неотъемлемая часть вычислительного подхода к обучению и проведению экспериментов по математике.

Цифровые технологии дополняют обучение, основанное на проведении экспериментов в рамках математических проектов, и способствуют развитию навыков вычислительного и алгоритмического мышления.

ИКТ служат для формирования навыков в следующих областях практической деятельности:

- развитие у учащихся навыков самостоятельной работы, связанных с поиском информации, её сортировкой, сравнением и установлением связей и различий между фактами и событиями;

- работа на различных образовательных платформах (например, ixl.com, uz.khanakademu.org и др.), дающих возможность самостоятельного изучения математики;

- обеспечить наглядность при изучении различных разделов математики (например, с помощью программы GeoGebra по геометрии);

- совершенствование навыков математического моделирования с использованием различных программных сред;

- развивать у учащихся умение выдвигать гипотезы и проверять их с помощью различных программных сред (например, с помощью приложения Excel для решения вероятностных задач);

- формирование навыков работы с инженерным калькулятором с целью экономии времени в процессе выполнения объёмных расчётных задач у учеников при выполнении проектов и проведении исследований;

- обучение учеников по электронным учебникам, способствующим развитию навыков самоконтроля;

- развитие математических способностей и творческой активности путём участия в интернет-олимпиадах и дистанционных олимпиадах, являющихся отборочным этапом олимпиады (например, в онлайн-версиях Международной математической олимпиады IMO, Международного математического конкурса IMC, Международной олимпиады «Кенгуру»);

- развитие математических навыков и математического языка путём участия в образовательных социальных сетях, порталах, видеоконференциях или форумах;

- формирование навыков использования небольших обучающих сайтов, мультимедийных приложений, видеороликов, оценочных программ с помощью специальных программ.

Математика, дизайн и технологии

Дизайн и технологии дают учащимся возможность интерпретировать и использовать математические знания и навыки в различных жизненных ситуациях. Учащиеся используют числа для оценки и измерения, интерпретации статистических результатов и выводов. В процессе производства идеи измеряются и записываются с помощью чисел. Они используют числа для разработки, уточнения и проверки идей и управления проектами. Используют трёхмерные модели, создают точные технические чертежи, работают с цифровыми моделями; они используют его при разработке и создании лучших решений, в процессах принятия решений, в количественных рассуждениях. Компетенции, приобретённые в рамках науки о технологии, готовят учащихся к профессии, и в процессе обучения математике развивают их способности к

техническому творчеству. Создание навыков подготовки творческих проектов имеет важное значение.

Математика и искусство

Сочетание математики и искусства строится на понимании законов, измерений и пространственного воображения и мышления. В математике ученики используют эти знания при решении задач и моделировании. В искусстве математические знания используются при создании, интерпретации, анализе и изучении произведений искусства. Математика и искусство позволяют учащимся исследовать и наблюдать естественную и искусственную среду.

Ученики могут передавать свои математические знания с помощью визуальных, аудио- и кинестетических форм искусства. Учащимся предоставляется возможность применить математическое понимание при использовании конкретных художественных процессов или практик. Например, в музыке учащиеся могут применить знания о шаблонах и алгоритмах композиции.

Математика и социальные науки

Сочетание математики и социальных наук направлено на финансовую грамотность и анализ данных исследований. Это включает в себя понимание принципов финансового управления для принятия финансовых и деловых решений.

Компетенции, формируемые через родной язык и литературу, иностранные языки, в развитии творческого мышления учащихся при обучении математике, в формировании навыков беглого выражения своих взглядов письменно и устно, в правильном использовании научных терминов, играют важную роль в обучении.

В процессе усвоения основ экономических знаний, укрепления макроэкономической стабильности и поддержания высоких темпов экономического роста, направленных на дальнейшее развитие и либерализацию экономики, является наиболее оптимальным решением в определённых жизненных ситуациях, связанных с социально-экономической деятельностью, найти и принять правильное решение. Для учащихся важна разработка математических моделей, экономических вопросов и умение анализировать экономические процессы и делать прогнозы с помощью математики.

Изучение основ предпринимательства направлено на формирование у учеников будущих предпринимательских навыков. Роль математики в планировании предпринимательской деятельности несравнима, и бизнес-план, разрабатываемый с целью привлечения средств и капитала предприятия в экономику, должен быть обоснован с помощью математических расчётов. В деятельности предпринимателя важны такие факторы, как прибыль, убыток и доход, а также риск, которые также играют важную роль в обеспечении эффективности предпринимательской деятельности – обоснование с помощью предварительных математических расчётов. Решение экономических задач и вопросов на уроках математики обогащает содержание математики насущными вопросами и повышает интерес учащихся к науке.

История непосредственно связана с математикой. Исторические сведения имеют большое значение для показа влияния научных достижений на развитие производственных сфер, экономических и социальных отношений, окружающей среды. Ученики научатся изучать, интерпретировать, анализировать и представлять данные исторических событий в цифровом и графическом виде, чтобы передать суть прошлого и настоящего. При построении и интерпретации карт учащиеся работают с числовыми понятиями, такими как сетки, масштаб, расстояние, площадь и проекции.

Оценивание

Оценивание является важной и необходимой составляющей образовательного процесса, заключающейся в сборе и анализе информации о деятельности учащихся на текущем и итоговом этапах обучения.

Цель, задачи, предмет, объект, принципы, методы, формы и средства оценивания должны быть понятны всем субъектам образовательного процесса – администрации школы, учителям, родителям и учащимся.

Система оценивания является основным инструментом измерения достижений и диагностики проблем в обучении. Она позволяет определить качество образования, его соответствие мировым стандартам, принять принципиальные решения по совершенствованию стратегии и тактики обучения, а также современные задачи в области образования, содержание образования и формы оценки ожидаемых результатов.

Оценка – это фактически процесс согласовывания полученных результатов и намеченных целей.

Система оценивания:

- позволяет определить, насколько хорошо ученик усвоил учебный материал или выработал практические навыки;
- показ динамики (изменения) релевантной успеваемости обучающихся в различных областях познавательной (учебной) деятельности;
- основывается на механизме, поощряющем, развивающем и помогающем учащимся в самооценке;
- «Учитель и ученик», «родитель и классный руководитель», «администрация школы и педагогический коллектив» должны обеспечивать общение.

Учебные цели – основа оценивания

В школьной практике выделяют образовательную, воспитательную и развивающую цели урока. Учебно-развивающие цели не могут быть реализованы на одном занятии, трудно определить, достигнуты ли они диагностически (по крайней мере, на практике). Поэтому сегодня рекомендуется планировать их не для каждого урока, а для системы уроков, формировать их в тематическом плане на много недель, они выполняют направляющую функцию на каждом уроке.

Поскольку воспитательные, развивающие и образовательные цели не могут быть выражены в виде критериев (ориентиров) практической деятельности обучающегося в образовательных стандартах, в дальнейшем при оценке на основе критериев будут рассматриваться только образовательные цели.

Рекомендации по постановке целей урока

Цели необходимо формулировать чётко (конкретно), правильно и достижимо.

Ясность цели означает чёткое и ясное описание образовательной цели, избегая общих выражений. Учитель, уточнивший цель урока, добьётся многого, организовав целенаправленный учебный процесс для её достижения. Цели абстрактного, общего описания не дают направления поведению учителя на уроке. В результате, итог урока может оказаться не таким, как ожидалось.

Корректность цели означает, что выражение цели действительно направлено на ожидаемый результат, то есть выражено правильно.

Важно, чтобы цели ставились таким образом, чтобы их можно было достичь в зависимости от времени, того, какой учебный материал они охватывают, а также способностей и условий обучения учащихся. Как отмечалось выше, цели должны быть выражены в отношении успеваемости учащихся. Такое уточнение цели помогает перейти от общего пред-

ставления об образовательных результатах к конкретному эталону, критерию, которого должен достичь обучающийся.

Описание технологии постановки целей урока будет неполным без её зависимости от возможных уровней овладения развитием знаний, умений, компетенций, опыта творческой деятельности.

Уровни усвоения

Можно выделить три уровня усвоения.

1 уровень – знание и понимание (познавательная активность). Учащиеся могут сделать это только тогда, когда они заново воспримут ранее усвоенную информацию об объектах, процессах или действиях.

2 уровень – применение (алгоритмический), то есть использование ранее выученных, репродуктивных, алгоритмических действий. Учащиеся могут самостоятельно выполнить это действие ещё раз на основе ранее полученной информации.

3 уровень – рассуждение (творческое), то есть применение ранее полученных знаний и умений для решения нестандартных задач. Это продуктивная деятельность для мышления. В результате этого процесса учащиеся усваивают новую информацию субъективно (только для себя), т. е. осуществляют эвристическую деятельность. Они также узнают новую информацию. При этом они осуществляют исследовательскую деятельность, действуют «без правил» в известной им области, создают новые и другие правила.

В процессе целеполагания преподаватель определяет элементы содержания, являющиеся объектом изучения данного занятия, определяет нормативные требования к каждому элементу, количество времени, уровень усвоения с учётом особенностей учащихся, и определяет указанные цели, а также формирует учебные цели и выбирает методы и формы действий, необходимые для их достижения.

Соответствие оценки образовательным целям

Проверка и оценка результатов обучения должны быть направлены на образовательные цели. Стоит сказать, что критерии оценивания должны создаваться исходя из образовательных целей, являющихся элементами требований образовательных стандартов, а оценочные задания должны определять достижение цели.

Новый критериальный подход к оцениванию.

Основным аспектом критериально-ориентированной образовательной технологии является выявление признаков полного овладения в соответствии с установленными стандартами и требованиями программы и выражение её конкретной нормы (критерия).

Основу критериально-ориентированной образовательной технологии составляют научно обоснованные образовательные цели. Научно обоснованные образовательные цели, осознанно принятые и понятые учащимися, сближают сущность деятельности учителя и ученика, обеспечивают ориентацию образования на личность.

Критерий можно рассматривать как средство оценки, признак, указывающий, на основании чего осуществляется оценка.

Критериальное оценивание состоит из оценок, составленных из компонентов (критериев), отражающих достижения обучающихся в развитии учебных компетенций в различных областях.

Критериальное оценивание – это подход, использующий различные виды, формы и методы оценивания и самооценки.

Принципы критериального оценивания включают:

- связанные с процессом образования и обучения – параметры измерения определяются требованиями ГОСО и программ обучения, которые предъявляются к результатам образования и обучения;

- актуальность – акцентирование оценки наиболее важных результатов учебно-

воспитательной деятельности;

- беспристрастность и справедливость – тщательный подбор чётких критериев оценки, не являющихся средством (или результатом) давления;

- адекватность (соответствие) – соответствие целям и образовательным результатам оценки знаний, умений, навыков, ценностей, квалификации;

- интеграция – оценивание является неотъемлемой частью образовательного процесса; открытость критериев и стратегий оценивания и заблаговременное доведение содержания книги до учащихся; участие учеников в разработке критериев оценивания.

- достоверность – уровень достоверности определяется коэффициентом достоверности (коэффициентом корреляции), представляющим собой степень соответствия результатов оценки, проведённой в одинаковых условиях, друг другу;

- эффективность – возможность реализации целей и планов исходя из определенных требований: времени, затрат, уровня достижения цели;

- валидность – возможность измерения реально необходимых критериев изучаемого педагогического явления;

- систематический и последовательный – систематическое, последовательное и периодическое выполнение процедур оценки; периодические замеры в совокупности представляют собой комплексную систему контрольных мероприятий как по отдельным разделам, так и по всему содержанию;

- комплексность (сложность) – задача формирования функциональной грамотности требует измерения результатов усвоения содержания предмета, формирования базовых компетенций.

- доброжелательность – создание партнёрских отношений между учителем и учеником, поощрение роста достижений; сосредоточиться на развитии и поддержке учащихся.

При критериальном оценивании руководство учителя также меняется:

- оцениваться должна только его работа, а не личность ученика;

- работа учащегося сравнивается не с работой учащихся, хорошо выполнивших задание на уроке, а с заранее известным учащемуся эталоном;

- используются разные формы конкретных заданий (имеется чёткое описание выполняемых заданий, как в брошюре);

- будет разработан чёткий алгоритм оценивания (выставления оценок), по которому обучающийся может определить достигнутый им уровень и соответствующую ему оценку;

- ученики настойчивы в процессе оценивания, стремятся перейти к самооценке;

- оценивается только то, чему учат, поэтому критерии оценки являются конкретным выражением образовательных целей;

- общеобразовательные цели по предмету являются критериями оценки достижений учащихся по данному предмету и позволяют обобщать результаты, определяемые индивидуальной работой учащихся.

Формирующее и суммативное оценивание

Критериальная система оценивания включает формирующее оценивание или текущее оценивание и итоговое или промежуточное оценивание. Суммативное оценивание включает промежуточное и итоговое оценивание в конце учебных модулей, в конце четверти и в конце года.

Формирующее оценивание предназначено для определения уровня усвоения знаний и умений на уроках или дома. Оно осуществляется в различных формах и позволяет учителю и ученику скорректировать свою деятельность и устранить возможные проблемы и недостатки. В итоговых, квартальных оценках не учитываются формирующие оценки.

Суммативное оценивание предназначено для определения уровня овладения

знаниями и умениями, которые должны быть сформированы после завершения изучения предметов всей учебной части предмета.

Суммативное оценивание проводится по результатам оценочной работы, такой как зачёты, контрольная работа, проектная работа. Баллы, выставленные за итоговое оценивание, являются основанием для определения четвертных и годовых итоговых оценок по предмету.

Суммарное оценивание основывается на критериях.

О критериях оценки всех участников образовательного процесса:

учащиеся, учителя и родители должны быть уведомлены заранее.

Критерии оценивания также являются неотъемлемой частью формирующего оценивания. При формативном оценивании критерии оценивания ориентированы на конкретную часть учебного материала (предмет или раздел), а при суммативном оценивании они рассматриваются в широком масштабе.

Критериальный механизм оценивания.

Учитель выставляет оценку, полученную за текущую выполненную работу, в кундалик. Эта оценка, как упоминалось выше, предоставляет информацию как учителю, так и ученику.

При использовании формативного оценивания на уроке учитель может фиксировать достижения учащихся в своей личной тетради в виде различных удобных символов, значков, цветов и комментариев. При этом педагог отслеживает динамику развития каждого учащегося в отношении их недостатков и путей их исправления, а также поставленных образовательных целей.

Различные формы оценивания должны быть отражены в тематическом планировании. Учитель должен запланировать промежуточную оценку до начала четверти.

Для организации оценивания учитель:

- определяет виды оценивания;
- разрабатывает формы оценивания;
- создает критерии оценки;
- определяет время контрольной работы.

Необходимо собирать и хранить все данные по оценке учебной деятельности обучающихся, а также анализировать полученные данные. Анализы должны проводиться с целью изучения учебной деятельности каждого ученика и динамики обучения всего класса.

При формирующем оценивании письменно или устно отмечают содержание и правильность работы. Результаты могут быть не зарегистрированы изначально. В этом случае они обсуждаются с учеником и заносятся в отдельную тетрадь учителя. На основе замечаний учителя учащиеся проверяют свою работу и исправляют свои ошибки. Только после этого выставленные оценки можно ставить в журнал.

В конце изучения темы или главы преподаватель проводит итоговую оценку. Такую работу теперь придётся выполнять с использованием критериев оценки. В течение четверти учитель должен планировать количество контрольных работ. Количество итоговых оценок должно быть не менее двух в течение четверти. Данные контрольные работы будут состоять из заданий, предназначенных для оценки знаний и умений учащихся по заданным темам. Контрольные работы должны максимально полно охватывать содержание изучаемых тем главы на основе требований стандарта. Преподаватель должен выбирать задания таким образом, чтобы они проверяли не только усвоение теоретического материала, то есть уровень знаний, но и уровень применения учащимся полученных знаний. Также необходимо будет предложить учащимся задания на рефлексию третьего уровня.

Оценки, полученные в результате контрольной работы, фиксируются в журнале с исправлениями после работы над ошибками на следующем занятии.

Четвертная оценка рассчитывается как

среднее арифметическое формирующих и итоговых оценок. В качестве годовой итоговой оценки принимается среднее значение из 4 четвертных оценок и оценки работы над проектом. Если в конце года проводится ещё и предметный экзамен (или итоговый контроль), то в качестве годовых оценок выбирают четвертные оценки, среднюю оценку проектной работы и среднее арифметическое экзаменационной (или итогового контроля) оценки.

Советы по суммативному оцениванию.

Суммативное оценивание рекомендуется проводить объективно комиссией, формируемой администрацией образовательного учреждения. Условия оценивания, критерии, образцы заданий и методические указания по оцениванию должны быть подготовлены заранее и оглашены учащимся, их родителям и учителям в начале учебного года.

Суммативное оценивание может состоять из двух частей:

- тестовое задание;
- письменная работа.

В итоговом оценивании используется 100-балльная система, а баллы распределяются по компонентам следующим образом:

- тестовое задание – 30 баллов;
- письменная работа – 70 баллов.

Тестовое задание рассчитано на 45 минут и состоит из 15-25 тестов.

Задание может состоять из следующих типов тестов:

- закрытый тест с четырьмя вариантами ответа, один правильный ответ;
- закрытый тест с более чем четырьмя вариантами ответа и несколькими правильными ответами;
- закрытый тест, который соответствует четырём правильным ответам на четыре вопроса;
- закрытый тест, состоящий из четырёх вопросов, на каждый из которых можно ответить «верно» или «неверно»;
- открытый тест с краткими ответами (проблема или вопрос, на который вам предлагается написать только ответ).

Тестовое задание обычно назначается для определения того, достигли ли учащиеся уровня мастерства 1 и 2. Соответственно, каждый вопрос теста оценивается в 1 или 2 балла.

Письменная работа состоит из открытого теста с развёрнутыми ответами, т.е. полноценных математических задач, предназначенных для детального решения. Письменная работа обычно рассчитана на 45 минут, и рекомендуется, чтобы она состояла из 3-х вопросов следующего содержания:

- задача, решаемая на основе алгебраического алгоритма, или задача, связанная с расчётом по геометрии;
- задача, связанная с алгебраическими рассуждениями или доказательством из геометрии;
- задача создания математической модели проблемы, связанной с жизненной ситуацией, и её решения.

Письменный тест обычно проводится, чтобы определить, достигли ли учащиеся уровня 2 и уровня 3.

Критерии оценки письменной работы создаются отдельно по каждому её вопросу, а баллы распределяются между собой исходя из уровня сложности вопросов.

Шкала перевода баллов в оценки:

- от 0 до 50 баллов – оценка «2»;

- от 51 до 70 баллов – оценка «3»;

- от 71 до 85 баллов – оценка «4»;

- от 86 до 100 баллов – оценка «5».

Критерии оценки проектной работы

Проектная работа была подробно описана выше. Работа учеников над проектом будет оцениваться вместе. Работа над проектом оценивается по 100-балльной шкале и рассчитывается по вышеуказанной шкале. Каждому учащемуся выставляется общая оценка за проектную работу. Ниже приведены критерии оценки проектной работы и соответствующие им максимальные баллы:

№	Критерии оценки	Баллы
1	Значимость и актуальность изучаемых проблем в проектной работе и соответствие изучаемой теме	5
2	Пригодность построенной математической модели к изучаемой проблеме	10
3	Пригодность использованных методов исследования и методов обработки полученных результатов к изучению проблемы	20
4	Необходимое и достаточное проникновение в проблему; использование возможностей для привлечения знаний из других областей.	20
5	Обоснованность промежуточных и окончательных выводов, близость результатов к решению задачи.	10
6	Совместная активность участников проекта.	10
7	Качество формализации завершенных результатов проекта.	5
8	Качество изложения, способность отвечать рецензентам, вопросы, обоснованность ответов каждого участника группы	20
Всего		100

РОЛЬ ИСТОРИЧЕСКОГО И НАУЧНОГО НАСЛЕДИЯ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРИИ

Помимо обучения молодого поколения, которое является будущим нашей республики, новой науке и её сложным аспектам, необходимо преподавать и наше прошлое наследие.

Уместно рассказать о вкладе в математическую науку таких великих ученых и известных узбекских математиков как аль-Хоразми, Абу Наср Фараби, Ахмад аль-Фаргани, Абу Али ибн Сина, Абу Райхан Беруни, Абул Вафа Бужони, Гиязиддин аль-Коши, Омар Хайям, Насриддин ат-Туси, Мирза Улугбек и других.

Использование исторической информации на уроках математики делает их интересными, повышает интерес учащихся к изучаемому материалу, помогает им усваивать знания.

Различают два основных способа использования исторических материалов: в ходе урока и при организации внеклассной работы. Сравнение геометрических фактов с современными или решение исторических задач не соответствует каждому уроку геометрии, но исторические факты часто упоминаются в ходе урока. Всё это не должно отвлекать учащихся от основной изучаемой темы, исторические вопросы лучше использовать в начале или в конце урока. Если учитель уверен в своем классе, он может использовать подобные вопросы в течение урока.

Не обязательно просить учащихся запомнить все исторические факты, имена и годы. На уроке им достаточно ознакомиться с краткой историей проблемы или вопроса, вспомнить период, когда произошло открытие, услышать имя математика, сделавшего нововведение, а если таковой имеется, увидеть его портрет. Конечно, не всё, но кое-что запомнится, и учитель избавится от претензии на «сухость предмета», который он преподаёт, и урок будет намного интереснее.

Происхождение геометрии.

Геометрия впервые сформировалась в Древнем Египте и Вавилоне, а позднее получила развитие в Древней Греции .В целом возникновение и развитие геометрии тесно связано с развитием человечества. Его формирование и развитие в странах с высокой цивилизацией также подтверждает наше мнение.

Известный греческий историк Геродот (V век до н. э.) говорит о возникновении геометрии: «Египетский царь Сцеотрос выделил каждому египтянину участок земли по жребию и взимал соответствующий этой земле налог с собственника земли. Если Нил разливался и смывал землю человека, он сообщал об этом королю, и король посылал инспекторов, чтобы узнать, насколько уменьшилась его земля, и соответственно уменьшить налог. Так возникла геометрия, которая затем попала в Грецию».

Евдем, один из греческих ученых (IV век до н. э.), пишет об этом: «Геометрию открыли египтяне, она возникла в результате измерения земли. Эти курганы образовались из-за разливов реки Нил, которая всегда размывала границы земель. Эта наука, как и другие науки, была создана благодаря потребностям людей».

Итак, геометрия была создана потребностями человечества, то есть им необходимо было проводить прямые линии, вычислять площади поверхности, определять размеры предметов.

Древние египтяне постепенно, в течение нескольких лет начали собирать научную информацию в различных областях. Они могли точно вычислить контуры фигур, размеры тел, умели решать задачи. Однако геометрии как науки у них ещё не было. У них было много разрозненных, неорганизованных правил.

В середине VII века до н.э. западные границы Малой Азии столкнулись с Грецией. Средняя её часть называлась Иония, и в Ионии было много крупных городов, которые занимались торговлей с другими странами. Философ и математик Фалес (640-548 до н.э.) жил в Милете, одном из таких городов. Он путешествовал по Египту и изучал там различные науки. Фалеса больше интересовала геометрия. Он является основателем ионийской школы. Фалес сделал много открытий, связанных с геометрией. Поэтому Фалес признан первым учёным-геометриком в истории науки.

Торговля между Египтом и Грецией развивалась, и вместе с купцами греческие ученые ездили в Египет и возвращались из путешествия, познакомившись с достижениями египтян в различных областях науки.

Они не ограничивали знания египтян в математике и других науках учёностью, они исправили их недостатки, систематизировали их, наполнили теоретически, сделали цельными. В результате геометрия как наука сформировалась в Греции около 2500 лет назад.

Таким образом, в Греции в это время начала развиваться геометрия. В V веке до нашей эры Гиппократ пытался систематически описать все знания, почерпнутые из геометрии, в одной книге.

Эта его работа до нас не дошла.

В III веке до нашей эры Евклид успешно выполнил эту работу и внёс огромный и ни с чем несравнимый вклад в становление геометрии как самостоятельной математической науки. В своей знаменитой работе «Основы» он взял некоторые аксиомы и постулаты в качестве исходных понятий и оснований и логическим путём вывел из них теоремы.

В 5-6 классе учащиеся знакомятся с некоторыми элементами геометрии, а в 7 классе начинают систематически изучать этот предмет.

Простейшие понятия геометрии, как и понятие числа, возникли благодаря потребностям людей. Первые геометрические единицы измерения были связаны с частью человеческого тела (например, «стопа», «шаг», «локоть» и т. д.).

Археологические раскопки, проведённые на территории нашей страны, показывают, что первоначальное развитие геометрии связано с земледелием, гончарным делом, портняжным делом, строительством и его техникой. Найденные при раскопках различные гончарные сосуды, приданные им разнообразные формы свидетельствуют о том, что наши древние поколения и предки хорошо разбирались в геометрии. Мы видим, что они украшали свои жилища разнообразными геометрическими фигурами – треугольниками, многоугольниками, спиралями. В этих украшениях обнаруживается равенство, сходство, симметрия фигур и т. д. Следует отметить, что такие формы, встречающиеся у древних народов, были взяты непосредственно из природы.

К Средним векам наука была высоко развита на Востоке. В частности, наука «Геометрия» обогатилась новыми открытиями и стала развиваться. В этом, конечно, очень велика заслуга наших великих учёных из Средней Азии – аль-Хоразми, Ахмед аль-Фаргани, Абу Наср Фараби, Абул Вафа Бужони, Абу Райхан Беруни, Абу Али ибн Сина, Гиязиддин Джамшид аль-Коши, Мирза Улугбек и других учёных, их научное наследие, жизненные пути. Наши ученики должны владеть необходимой информацией о наших великих предках, включая их вклад в развитие геометрии. Это имеет большое значение в воспитании зрелого молодого поколения, духовно зрелого, знающего, гордящегося своими великими предками и стремящегося быть их достойными наследниками.

ГЛАВА I. СИСТЕМАТИЧЕСКОЕ ПОВТОРЕНИЕ ПЛАНИМЕТРИИ

УРОК 1. ЛОГИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ГЕОМЕТРИИ

I. Стандарты:

– может распознавать в реальности, на моделях и чертежах плоские и пространственные геометрические фигуры, знает их основные свойства.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

– знать логическую структуру геометрии.

Навыки:

– уметь приводить примеры по геометрии.

III. Краткое описание содержания урока:

– логическая структура геометрии. Система аксиом, положенная в основу планиметрии.

IV. Оборудование и наглядные пособия:

– модели различных плоских и пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Что изучает предмет «геометрия»?	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме 1, 2.
Формирование и закрепление знаний	Логическая структура геометрии	Работа по учебнику	Вопросы по теме 3, 4 Практическое упражнение и приложение 1.1; 1.2
	Логическая структура геометрии	В чём разница между теоремой и аксиомой?	Вопросы по теме 3, 4 Практическое упражнение и приложение 1.3; 1.2
	Аксиоматическое построение геометрии	Работа по учебнику	В чём разница между евклидовой и неевклидовой геометрией? Вопросы по теме 5 Практическое упражнение и приложение 1.4
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	
Домашнее задание	1. Вопросы по теме 6 2. Практическое упражнение и приложение 1.5; 1.6		

1.1. Какие из перечисленных геометрических фигур в школьном курсе геометрии принимаются без определения (являются основными), а какие являются определяемыми?

а) точка б) угол в) плоскость г) сечение

д) луч е) прямая ж) треугольник з) острый угол

Ответ: *а, в, е*

1.2. Какие из следующих свойств геометрических фигур выдаются в школьном курсе геометрии за аксиомы (т. е. принимаются без доказательства), какие – за теоремы (т. е. их правильность должна быть доказана)?

а) через любые две точки проходит только одна прямая;

б) сумма прилежащих углов равна 180º;

в) сумма внутренних углов треугольника равна 180º;

г) диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам;

д) из любых трёх точек прямой только одна лежит между двумя другими;

е) из точки вне прямой на плоскости к этой прямой можно провести только одну параллельную прямую.

Ответ: Аксиома: *а, д, е;* Теорема: *б, в, г.*

1.3. Прочитайте следующие предложения. Если предложение правильное, поставьте «+», если неверное, поставьте «–» в соседней клетке.

1	Планиметрия изучает свойства геометрических фигур на плоскости, стереометрия – в пространстве.	+
2	Исходные (базовые) геометрические формы принимаются без определения.	+
3	Из точки, взятой вне прямой на плоскости, можно провести прямую, параллельную этой прямой.	–
4	Евклид собрал все свои достижения в своём труде «Начала» и внёс большой вклад в развитие геометрии.	–

1.4. Кто способствовал развитию геометрии? Соедините имена учёных из левого столбца таблицы с их достижениями справа.

1	Омар Хайям	А	Создал неевклидову геометрию.
2	Н. И. Лобачевский	Б	Провел исследования по разъяснению V постулата Евклида.
3	Бернхард Риманн	В	Описал геометрию как науку.
4	Евклид	Г	Проделал большую работу в описании неевклидовой геометрии.

Ответ: 1 – Б, 2 – А, 3 – Г, 4 – В,

1.5. Какое из следующих утверждений было описано Евклидом как постулат V? Какие из них считаются равносильными?

а) если две прямые, лежащие в одной плоскости, пересекаются третьей и образуют внутренние углы, сумма которых меньше двух прямых углов, то при продолжении вышеупомянутых прямых они пересекутся с той стороны, где сумма углов меньше двух прямых углов.

б) если прямые a и b пересечены третьей, а сумма углов $\alpha + \beta < 180°$, то данные прямые пересекаются с той стороны, где лежат эти углы.

в) из точки вне прямой на плоскости к этой прямой можно провести только одну параллельную прямую.

г) через любые две точки можно провести только одну прямую

Ответ: $А, Г.$

УРОК 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

I. Стандарты:

– может распознавать в реальности, на моделях и чертежах плоские и пространственные геометрические фигуры, знает их основные свойства.

II. Цель урока: Формирование у учащихся следующих знаний и умений.

Знания:

– знать аналитические и синтетические методы решения геометрических задач.

Навыки:

- уметь использовать аналитические и синтетические методы решения геометрических задач.

III. Краткое описание содержания урока:

-методы решения геометрических задач.

IV. Оборудование и наглядные пособия:

- линейка, карандаш.

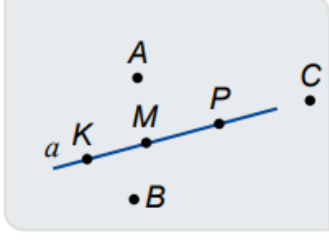
V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Какие способы решения задачи вы знаете?	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме 1

Формирование и закрепление знаний	Типы геометрических задач	Работа по учебнику	Вопросы по теме 2 Практическое упражнение и приложение 2.1, 2.2
	Методы решения геометрических задач	Работа по учебнику	Вопросы по теме 3 Практическое упражнение и приложение 2.3-2.5
	Аналитические и синтетические методы решения задач	Работа по учебнику	Вопросы по теме: 4 Практическое упражнение и приложение: 2.6-2.8
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 2.9-2.11		

2.1. Найдите правильное математическое утверждение, используя рисунок 1.

A) $A \in a$ B) $K \notin a$ C) $C \in a$ D) $M \notin a$



Продолжая прямую a, видим, что точка C принадлежит прямой a.

Ответ: C.

2.2. На одной прямой выбраны точки A, B, C таким образом, что AB = 2,7 dm, BC = 1,3 dm, AC = 1,3 dm. Определите правильное утверждение о точке, которая лежит между двумя другими.

A) $A \in BC$ B) $B \in AC$ C) $C \in AB$ D) $C \notin AB$

$AC + BC = AB$ $1{,}3\ dm + 1{,}3\ dm = 2{,}7\ dm$ $2{,}6\ dm \neq 2{,}7\ dm$

Ответ: D.

2.3. Отрезок AC в три раза длиннее отрезка BC. Найдите два утверждения, которые соответствуют данному условию.

A) $AC = 3 \cdot BC;$ B) $3 \cdot AC = BC;$ C) $AC + BC = 4 \cdot AC;$ D) $BM = \frac{1}{3} AM.$

$BC = 3 \cdot AC;$ $AC + BC = 4 \cdot AC;$ $BC = 4 \cdot AC - AC = 3 \cdot AC.$

Ответ: $B, C.$

2.4. Отрезок AC короче отрезка BC на 2 cm. Найдите два утверждения, которые соответствуют данному условию.

A) $AC - BC = 3\ cm$ B) $BC - AC = 2\ cm$

C) $AC - 2\ cm = BC$ D) $AC + 2\ cm = BC$

A) $AC - BC = 3$ cm; $AC = BC + 3$ cm. Отрезок AC длиннее отрезка BC на 3 cm.
B) $BC - AC = 2$ cm; $AC = BC - 2$ cm. Отрезок AC короче отрезка BC на 2 cm.
C) $AC - 2$ cm $= BC$; $AC = BC + 2$ cm. Отрезок AC длиннее отрезка BC на 3 cm.
D) $AC + 2$ cm $= BC$; $AC = BC - 2$ cm. Отрезок AC короче отрезка BC на 2 cm.

Ответ: *B, D.*

2.5. Какая из точек *A, B, C* находится между двумя другими?

1) $AC = 3$, $AB = 8$, $BC = 5$.

$AC + BC = AB$; $3 + 5 = 8$; $8 = 8$.

Ответ: *Точка C находится между точками A и B.*

2) $AC = 7$, $BC = 12$, $AB = 19$.

$AC + BC = AB$; $7 + 12 = 19$; $19 = 19$.

Ответ: *Точка C находится между точками A и B.*

3) $AC = 27$ m, $BC = 5$ m, $AB = 22$ m;

$AB + BC = AC$; 22 m$+5$ m $= 27$ m; 27 m $= 27$ m.

Ответ: *Точка B находится между точками A и C.*

4) $AC = 9$ mm, $BC = 21$ mm, $AB = 12$ mm;

$AB + AC = BC$; 12 mm $+ 9$ mm $= 21$ mm; 21 mm $= 21$ mm.

Ответ: *Точка A находится между точками B и C.*

5) $AC = 21$ m, $BC = 37$ m, $AB = 16$ m;

$AB + AC = BC$; 16 m $+ 21$ m $= 37$ m; 37 m $= 37$ m.

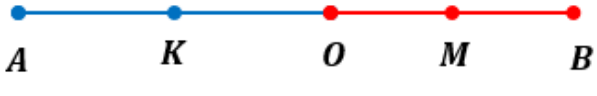
Ответ: *Точка A находится между точками B и C.*

6) $BC = 18$ dm, $AC = 33$ dm, $AB = 15$ dm ;

$AB + BC = AC$; 15 dm $+ 18$ dm $= 33$ dm; 33 dm $= 33$ dm.

Ответ: *Точка B находится между точками A и C.*

2.6. Отрезок *AB* разделен точкой *O* на отрезки длиной 18 cm и 14 cm. Если точки *K* и *M* являются серединами отрезков *AO* и *BO*, найдите длину отрезка *KM*.



$AO = 18$ cm; $OB = 14$ cm.

$AK = KO$; $OM = MB$; $KM = ?$

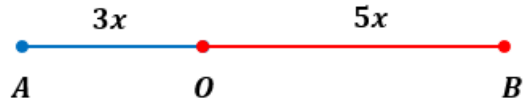
$$AK = KO = \frac{AO}{2} = \frac{18\ cm}{2} = 9\ cm;$$

$$OM = MB = \frac{OB}{2} = \frac{14\ cm}{2} = 7\ cm;$$

$KM = KO + OM = 9\ cm + 7\ cm = 16\ cm$.

Ответ: $KM = 16$ cm

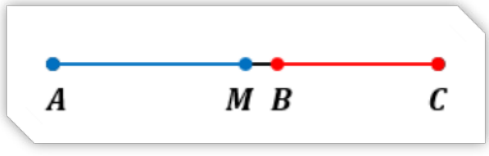
2.7. На поперечном сечении длиной 48 dm отмечена точка O. Если AO : BO = 3 : 5, найдите длины отрезков AO и BO.



$AB = 48\ dm;\ AO = 3x;\ BO = 5x;$
Найти: $AO = ?;\ BO = ?$

Решение: $AO + BO = AB;\quad 3x + 5x = 48\ dm;\ 8x = 48;\quad x = 6\ dm;$
$AO = 3x = 3 \cdot 6\ dm = 18\ dm;\ BO = 5x = 5 \cdot 6\ dm = 30\ dm.$
Ответ: $AO = 18\ dm;\ BO = 30\ dm;$

2.8. Точки *A, B, C, M* лежат на прямой. *AC = 12 m, CB = 5 m, а M* – середина *AC*. Найдите длину отрезка *MB*.

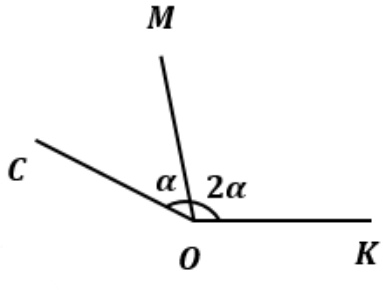


$$AM = MC = \frac{AC}{2} = \frac{12\ cm}{2} = 6\ cm;$$

$MB = MC - CB = 6\ cm - 5\ cm = 1\ cm.$
Ответ: $MB = 1\ cm.$

Домашнее задание

2.9. $\angle KOC = 153°$. Луч *OM* проходит между сторонами угла. Если $\angle KOM = 2 \cdot \angle MOC$ найдите углы *KOM* и *MOC*.



Дано: $\angle KOC = 153°;\quad \angle KOM = 2 \cdot \angle MOC.$
Найти: $\angle KOM = ?,\ \angle MOC = ?$
$\angle KOM + \angle MOC = \angle KOC;\quad 2\alpha + \alpha = 153°;$
$3\alpha = 153°;\ \alpha = 51°.\quad \angle MOC = \alpha = 51°;$
$\angle KOM = 2\alpha = 2 \cdot 51° = 102°$

2.10. На отрезке *AB* длиной 75 cm отмечены точки *M* и *K*. При этом $M \in AK$, $K \in MB$. Также отрезок *AN* на 5 cm длиннее отрезка *NK*, а *KB* в 2 раза длиннее *AN*. Найдите длины 5 получившихся отрезков.



Дано: $AM = MK + 5;\ KB = 2 \cdot AM;\ AM + MK + KB = 75;$
Найти: $AM, MK, KB, AK, MB - ?$

$MK = AM - 5;\ AM = x;\ \ x + x-5 + 2x = 75;\ \ 4x = 80;\ \ x = 20;$
$AM = 20;\ \ MK = AM - 5 = 20-5 = 15;\ \ KB = 2 \cdot AM = 2 \cdot 20 = 40;$
$AK = AM + MK = 20 + 15 = 35;\ \ \ MB = MK + KB = 15 + 40 = 55.$
Ответ: $AM = 20\ cm;\ MK = 15\ cm;\ \ KB = 40\ cm;\ AK = 35\ cm;\ MB = 55\ cm.$

УРОК 3. ПРАКТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ НА ПОВТОРЕНИЕ ГЛАВЫ

I. Стандарты:

-может распознавать в реальности, на моделях и чертежах плоские и пространственные геометрические фигуры, знает их основные свойства.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

-знать прямые, обратные и алгебраические методы решения геометрических задач.

Навыки:

- уметь использовать прямые, обратные и алгебраические методы решения геометрических задач.

III. Краткое описание содержания урока:

-методы решения геометрических задач.

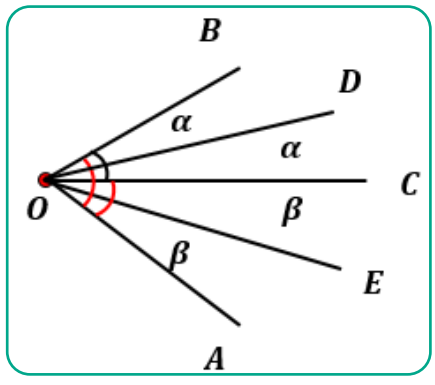
IV. Оборудование и наглядные пособия:

- линейка, карандаш.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Какой метод считаете самым приемлемым при решении задач?	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме 5
Формирование и закрепление знаний	Прямые и обратные методы решения геометрических задач	Работа по учебнику	Вопросы по теме 6 Практическое упражнение и приложение 2.12; 2.13
	Метод доказательства «от противного»	Работа по учебнику	Вопросы по теме 7 Практическое упражнение и приложение 2.14-2.15
	Алгоритм алгебраического метода решения геометрических задач	Работа по учебнику	Вопросы по теме 8 Практическое упражнение и приложение 2.16-2.18
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 2.19-2.23		

2.11. Луч, проходящий между сторонами угла, делит его на два угла. Докажите, что угол между биссектрисами этих углов в 2 раза меньше заданного угла.



$\angle BOD = \angle DOC = \alpha;\ \angle AOE = \angle EOC = \beta;$
$\angle BOC = \angle BOD + \angle DOC = \alpha + \alpha = 2\alpha;$
$\angle AOC = \angle AOE + \angle EOC = \beta + \beta = 2\beta$
$\angle AOB = \angle AOC + \angle BOC = 2\beta + 2\alpha = 2\alpha + 2\beta;$
$\angle AOB = 2(\alpha + \beta).$

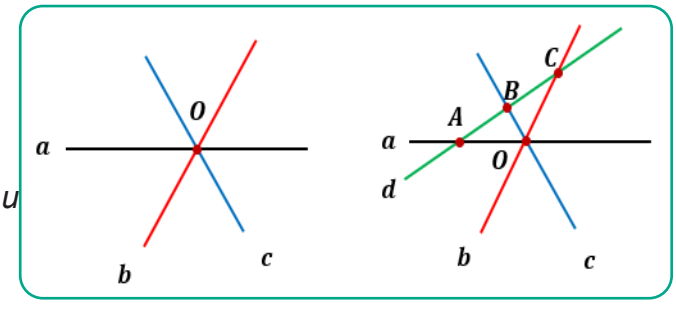
$$\angle DOE = \angle DOC + \angle EOC = \alpha + \beta = \frac{\angle AOB}{2}$$

Значит, доказано что $\angle DOE = \frac{\angle AOB}{2}$.

2.12. *a, b, c* и *d* прямые линии. Все три из них пересекаются в одной точке. Докажите, что все прямые проходят через одну точку.

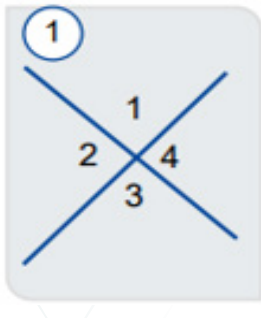
в

ни



Пусть прямые a, b, c пересекаются в точке O. Если прямая d проходит через точку, отличную от точки O, то три прямые не пересекаются в одной из точек A, B, C. Что не соответствует условию задачи. Значит, прямая d также проходит через точку O.

2.13. При пересечении двух прямых образовались четыре угла *(рис. 2)*. В приведённой ниже таблице сопоставьте каждое утверждение (A-E) с выводом (1–5).



A) $\angle 1 = \angle 3$
B) $\angle 2 + \angle 3 = 180°$
C) $\angle 1 = \angle 2 = 90°$
D) $\angle 2 + \angle 4 = 260°$
E) $\angle 3 = 90°$

1) $\angle 3 = \angle 4 = 90°$
2) $\angle 1 = \angle 2 = \angle 4 = 90°$
3) $\angle 1$ и $\angle 4$ – соседи
4) $\angle 1$ и $\angle 3$ - острые
5) $\angle 2$ и $\angle 4$ - вертикальные

Ответ:

A	B	C	D	E
4	3	2	5	1

2.14. Ниже приведены градусные измерения некоторых углов (1–7). Какие из них могут быть смежными?.

1) $18°$ 2) $72°$ 3) $128°$ 4) $62°$ 5) $28°$ 6) $108°$; 7) $38°$.

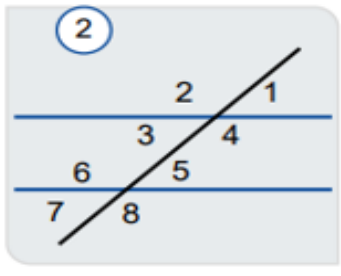
A) *1* и *2* B) *2* и *6* C) *3* и *4* D) *1* и *7* E) *2* и *5*.

Чтобы углы могли быть смежными, их сумма должна равняться 180º.

Ответ: *B*.

2.15. Если $\angle 1 = \angle 7$, согласно рисунку 2, найдите правильное утверждение.

A) $a \parallel b$ *B)* $a \perp b$ *C)* a и b не пересекаются;



Вертикальные углы равны. $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7$, $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8$,

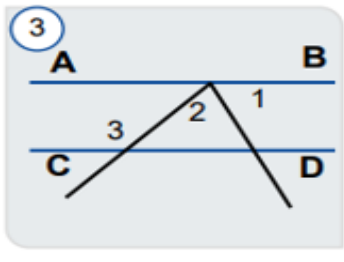
Соответствующие углы равны. $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 4 = \angle 8$, $\angle 3 = \angle 7$.

Значит, a и b не пересекаются и $a \parallel b$.

Ответ: *A* и *C*.

2.16. Если на рисунке $CD = AB$, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 2 = 72°$, то $\angle 3 = ?$

A) 72^o *B)* 144^o *C)* 108^o *D)* 36^o *E)* 124^o.



Дано: $CD \parallel AB$; $\angle 1 = \angle 2$; $\angle = 72°$. $\angle 3 = ?$

$\angle 3 = \angle 1 + \angle 2 = 72° + 72° = 144°$.

$\angle 3 = 144°$. **Ответ:** *B*.

Домашнее задание

2.22. Найдите площадь поверхности круглого стола *(1 fut = 30,48 cm)*.



Дано: $r = 2,7\ fut$; $(1\ fut = 30,48\ cm)$.

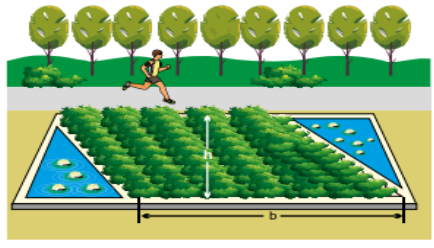
Найти: $S = ?$

$r = 2,7\ fut = 2,7 \cdot 1\ fut = 2,7 \cdot 30,48\ cm = 82,296\ cm$.

$S = \pi r^2 = \pi \cdot (82,296\ cm)^2 = 6772,631616\pi\ cm^2$.

Ответ: $S = 6772,631616\pi\ cm^2$.

2.23. Найдите площадь клумбы на рисунке, если $h = 3\ m$ и $b = 6\ m$.



Дано: $h = 3\ m;\ \ b = 6\ m.$

Найти: $S = ?$

$S = b \cdot h = 3\ m \cdot 6\ m = 18\ m^2.$

УРОК 4. ПРАКТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ НА ПОВТОРЕНИЕ ГЛАВЫ

I. Стандарты:

-может распознавать в реальности, на моделях и чертежах плоские и пространственные геометрические фигуры, знает их основные свойства.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

-знать векторный метод, метод координат, метод геометрических преобразований и метод площадей при решении геометрических задач.

Навыки:

- уметь использовать векторный метод, метод координат, метод геометрических преобразований и метод площадей при решении геометрических задач.

III. Краткое описание содержания урока:

-методы решения геометрических задач.

IV. Оборудование и наглядные пособия:

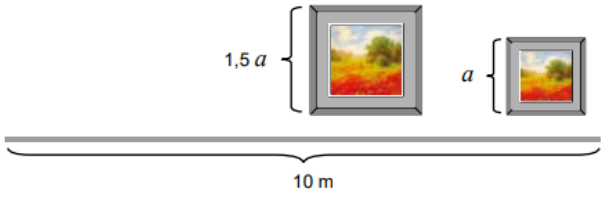
- линейка, карандаш.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Как выбирается способ решения задач?	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме 9
Формирование и закрепление знаний	Использование формул вычисления площадей при решении геометрических задач.	Работа по учебнику	Вопросы по теме 10 Практическое упражнение и приложение 2.24 - 2.25
	Решение геометрических задач векторным методом.	Работа по учебнику	Вопросы по теме 11 Практическое упражнение и приложение 2.26 - 2.27

	Решение геометрических задач методом координат; решение геометрических задач методом геометрических преобразований.	Работа по учебнику	Вопросы по теме 12 Практическое упражнение и приложение 2.28
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 2.29
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение: 2.30 - 2.33		

2.24. Найдите размеры каждой рамки, если используется 10 квадратных рамок.



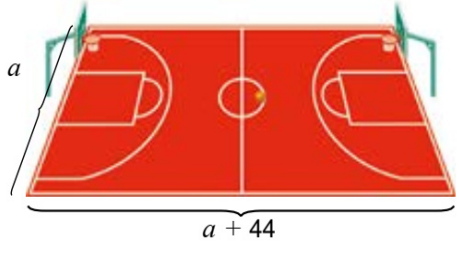
Дано: $P = 10\ m.$

1-рамка: $P_1 = 4 \cdot 1{,}5a = 6a;$

2-рамка: $P_2 = 4 \cdot a = 4a;$

Ответ: $P_1 + P_2 = P;\quad 6a + 4a = 10\ m.$

2.25. Периметр баскетбольной площадки составляет 288 футов, а её длина на 44 фута больше ширины. Найдите размеры площадки в метрах *(1 fut = 30,48 cm)*.



Дано: $P = 288\ fut;\ b = a + 44\ fut;$

$1\ fut = 30{,}48\ m.$ Найти: $a = ?,\ b = ?$

$2(a + b) = P;\quad 2(a + a + 44) = 288;$

$2(2a + 44) = 288;\quad 4a + 88 = 288;$

$4a = 288 - 88;\quad 4a = 200;\quad a = 50;$

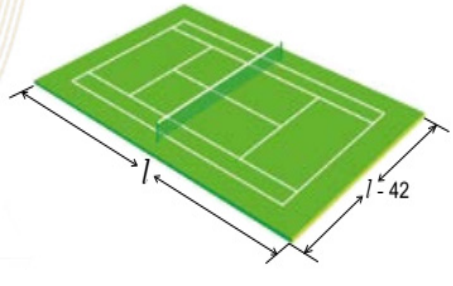
$b = a + 44 = 50 + 44 = 94;$

$a = 50\ fut = 50 \cdot 1\ fut = 50 \cdot 30{,}48\ cm = 1524\ cm = 15{,}24\ m;$

$b = 94\ fut = 94 \cdot 1\ fut = 94 \cdot 30{,}48\ cm = 2865{,}12\ cm = 28{,}6512\ m.$

Ответ: $a = 15{,}24\ m;\ b = 28{,}6512\ m.$

2.26. Периметр теннисного корта – 288 футов, его длина на 42 фута больше ширины. Найдите размеры корта в метрах *(1 fut = 30,48 cm)*.



Дано: $P = 288\ fut;\ b = a\text{-}42\ fut;$

$1\ fut = 30{,}48\ m.$ Найти: $a = ?,\quad b = ?$

$2(a + b) = P;\quad 2(a + a\text{-}42) = 288;$

$2(2a - 42) = 288;\quad 4a\text{-}84 = 288;$

$4a = 288 + 84;$ $4a = 372;$ $a = 93;$

$b = a-42 = 93 - 42 = 51;$

$b = 51\ fut = 51 \cdot 1\ fut = 51 \cdot 30{,}48\ cm = 1554{,}48\ cm = 15{,}5448\ m;$

$a = 93\ fut = 93 \cdot 1\ fut = 93 \cdot 30{,}48\ cm = 2834{,}64\ cm = 28{,}3464\ m.$

Ответ: $a = 28{,}3454\ m;\ \ b = 15{,}5448\ m.$

2.27. Найдите высоту равнобедренного треугольника на стоянке площадью 288 кв. футов и основанием 16 футов (*1 fut – 30,48 cm*).



Дано: $S = 288\ fut^2;\ a = 16\ fut;$ $1\ fut = 30{,}48\ cm.$ **Найти:** $h = ?$

$$h = \frac{S}{a} = \frac{288\ fut^2}{16\ fut} = 18\ fut$$

$h = 18\ fut = 18 \cdot 1\ fut = 18 \cdot 30{,}48\ cm = 548{,}64\ cm.$

Ответ: $h = 548{,}64\ cm.$

2.28. Соотношение сторон экрана HD TV на картинке 16:9. Найдите размеры 70-дюймового HD-телевизора в cm *(1 dyuym = 2,54 cm)*.



Дано: $a = 16x;\ b = 9\ x;\ d = 70\ dyuym;$

$(1\ dyuym = 2{,}54\ cm).$ Найти: $a = ?,\ \ b = ?$

$a^2 + b^2 = d^2;\ \ (16x)^2 + (9x)^2 = 702;$

$256x^2 + 81x^2 = 4900;\ \ 337x^2 = 4900;$

$x^2 = \frac{4900}{337};\ x = \sqrt{\frac{4900}{337}} \approx \frac{70}{18{,}36} \approx 3{,}81 \approx 4.$

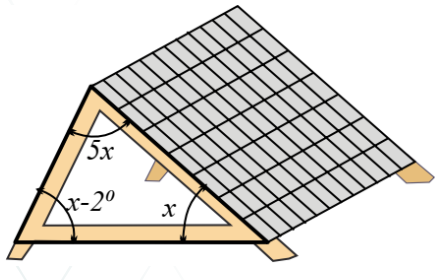
$a = 16x = 16{\cdot}4\ dyuym = 64 \cdot 1\ dyuym = 64 \cdot 2{,}54\ cm = 162{,}56\ cm;$

$b = 9x = 9 \cdot 4\ dyuym = 36 \cdot 1\ dyuym = 36 \cdot 2{,}54\ cm = 91{,}44\ cm.$

Ответ: $a = 162{,}56\ cm;\ \ b = 91{,}44\ cm.$

2.29. Найдите x на углах крыши на рисунках.

а)



$\angle A = x - 2°;\ \angle B = x;\ \angle C = 5x.$

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°;$

$x - 2° + x + 5x = 180°;\ \ 7x - 2° = 180°;$

$7x = 180° + 2°;\ \ 7x = 182°;\ \ x = 26°;$

$\angle B = 26°;\ \angle A = x - 2° = 26° - 2° = 24°;$

$\angle C = 5x = 5{\cdot}26° = 130°.$

Ответ: $24°;\ \ 26°;\ \ 130°.$

b)



$\angle A = x;\quad \angle B = x + 20°;\quad \angle C = 2x.$

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°;$

$x + x + 20° + 2x = 180°;\quad 4x + 20° = 180°;$

$4x = 180° - 20°;\quad 4x = 160°;\quad x = 40°;$

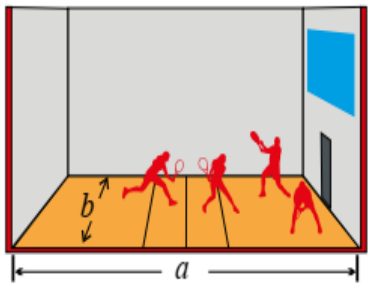
$\angle A = 40°;\quad \angle B = x + 20° = 40° + 20° = 60°;$

$\angle C = 2x = 2 \cdot 40° = 80°.$

Ответ: $40°;\ 60°;\ 80°.$

Домашнее задание

2.30. Если периметр крытой спортивной площадки составляет 120 футов, а длина в два раза больше ширины, найдите размеры поля в метрах *(1 fut = 30,48 cm)*



Дано: $P = 120\ fut;\ b = 2a;\ 1\ fut = 30{,}48\ cm.$

Найти: $a = ?,\ b = ?$

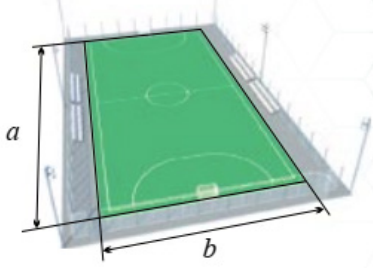
$2(a + b) = P;\ 2 \cdot (a + 2a) = 120;\ 3a = 60;$

$a = 20\ fut = 20 \cdot 30{,}48\ cm = 609{,}6\ cm = 6{,}096\ m;$

$b = 2a = 2 \cdot 20\ fut = 40\ fut = 40 \cdot 30{,}48 = 1219{,}2\ cm = 12{,}192\ m.$

Ответ: $a = 6{,}096\ m;\ b = 12{,}192\ m.$

2.31. Найдите размеры футбольного поля, если его периметр равен 340 m, а длина на 50 m больше ширины.



Дано: $P = 340\ m;\ b = a + 50\ m.$

Найти: $a = ?,\ b = ?$

$2(a+b) = P;\ a+b=\frac{P}{2};\ a+a+50=\frac{340}{2};$

$2a+50 = 170;\quad 2a = 170-50;\quad 2a = 120;$

2.32. Фермер хочет огородить прямоугольный участок у реки. Какую наибольшую площадь можно огородить забором длиной 100 m?



Дано: $P = 100\ m.$ Найти: $S = ?$

$$\begin{cases} 2a + b = P \\ a \cdot b = -S \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a + b = 100 \\ a \cdot b = S \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} b = 100 - 2a \\ a \cdot b = S \end{cases} \rightarrow S = a \cdot (100 - 2a) = 100a - 2a^2$$

УРОК 5.ПРАКТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ НА ПОВТОРЕНИЕ ГЛАВЫ

I. Стандарты:

-может распознавать в реальности, на моделях и чертежах плоские и пространственные геометрические фигуры, знает их основные свойства

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

-знать методы решения геометрических задач.

Навыки:

- уметь использовать методы при решении геометрических задач.

III. Краткое описание содержания урока:

-методы решения геометрических задач.

IV. Оборудование и наглядные пособия:

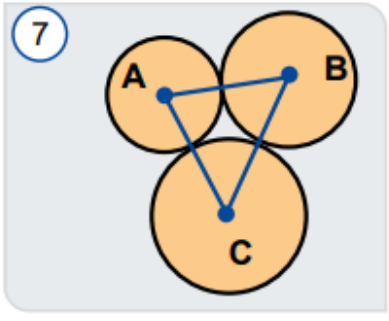
- линейка, карандаш.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Какие методы считаются приемлемыми при решении задач?	«Мозговой штурм»	Практическое упражнение и приложение 3.1-3.5
Формирование и закрепление знаний	При решении каких задач используется формула вычисления площадей?	Работа по учебнику	Вопросы по теме: выберите и объясните приемлемые методы решения задач. Практическое упражнение и приложение 3.6 – 3.8
	Какие типы задач решаются векторным методом?	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 3.9 – 3.10
	Метод геометрических преобразований.	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 3.11-3.12
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 3.13
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 3.14 – 3.17		

3.1. Вершины треугольника лежат в центрах трёх пар окружностей с радиусами 6 cm, 7 cm и 8 cm. Найдите периметр этого треугольника.

A) 28 cm ***B) 29 cm*** ***C) 27 cm*** ***D) 42 cm***



Дано: $r_1 = 6\ cm;\ \ r_2 = 7\ cm;\ \ r_3 = 8\ cm.$

Найти: $P_{ABC} = ?$

$AB = r_1 + r_2 = 6\ cm + 7\ cm = 13\ cm;$

$BC = r_2 + r_3 = 7\ cm + 8\ cm = 15\ cm;$

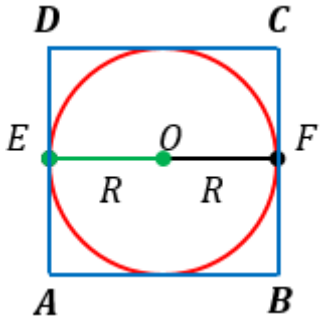
$AC = r_1 + r_3 = 6\ cm + 8\ cm = 14\ cm.$

$P_{ABC} = AB + BC + AC = 13\ cm + 15\ cm + 14\ cm = 42\ cm.$

$P = 42\ cm.$ **Ответ:** $D.$

3.2. Сторона квадрата равна 20√2. Найдите радиус окружности, вписанной в этот квадрат.

A) 20; ***B)*** 10√2; ***C)*** 10; ***D)*** 5√2;



Дано: $a = AB = BC = CD = AD = 20\sqrt{2};$

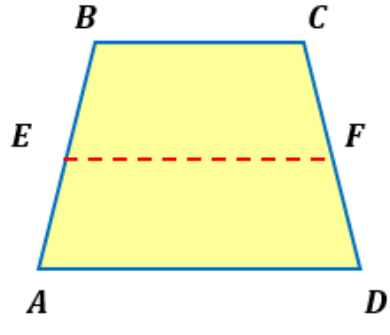
$R = EO = OF;$ $\qquad R = \frac{EF}{2} = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}.$

$R = 10\sqrt{2}.$

Ответ: $A.$

3.3. Одно основание трапеции на 8 cm длиннее другого, а её медиана равна 10 cm. Найдите малое основание трапеции.

A) 2 cm *B) 4 cm* *C) 6 cm* *D) 8 cm*



Дано: $BC = x\ cm;\ \ AD = x + 8\ cm;$

$EF = 10\ cm.$ Найти: $BC = ?$

$\frac{BC + AD}{2} = EF;$ $\qquad \frac{x + x + 8}{2} = 10;$ $\qquad \frac{2x + 8}{2} = 10;$

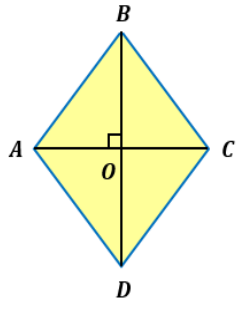
$x + 4 = 10;\ \ x = 10 - 4;\ \ x = 6\ cm.$

$BC = 6\ cm.\ \ AD = x + 8 = 6 + 8 = 14\ cm.$

Ответ: $C.$

3.4. Найдите сторону ромба, диагонали которого равны 10 m и 36 m.

A) 90 m² B) *92 m²* C) *180 m²* D) *184 m²*



Дано: $d_1 = 10\ m;\quad d_2 = 36\ m.$

Найти: $S = ?$

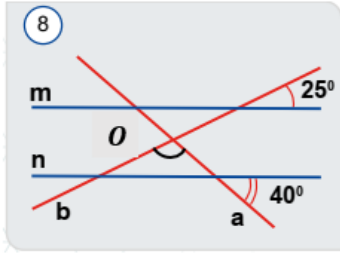
$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 36 = \frac{360}{2} = 180\ cm^2.$$

$S = 180\ cm^2.$

Ответ: $C.$

3.5. Если прямые m и n на рисунке параллельны друг другу, найдите угол между прямыми a и b.

A) 50^o; B) 80^o; C) 100^o; D) 115^o.



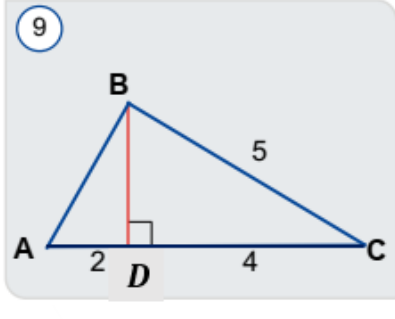
Решение:

$\angle aOb = 180° - (25° + 40°) = 180° - 65° = 115°.$

Ответ: E

3.6. Найдите сторону треугольника на рисунке.

A) 6 **B)** 9 **C)** 12 **D)** 24



Дано: $AD = 2;\ CD = 4;\ BC = 5.$

Найти: $S_{ABC} = ?$

$$BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} =$$

$$= \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3.$$

$AC = AD + CD = 2 + 4 = 6.$

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = \frac{18}{2} = 9.$$

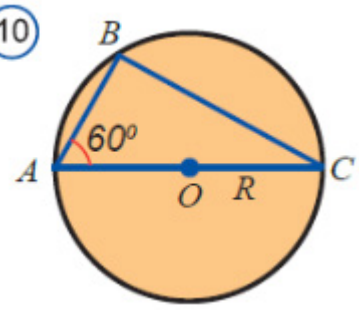
Ответ: $B.$

3.7. Найдите сторону BC треугольника ABC, вписанного в окружность с радиусом R на рисунке 10.

A) R; **B)** $R\frac{\sqrt{2}}{2}$; **C)** $R\sqrt{2}$; **D)** $R\sqrt{3}$;

$\angle A = 60°;\ \angle C = 90° - \angle A = 90° - 60° = 30°.$

10



$AC = AO + OC = R + R = 2R;$

$AB = \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 2R = \frac{2R}{2} = R.$

$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{(2R)^2 - R^2} =$

$= \sqrt{(4R^2 - R^2} = \sqrt{3R^2} = R\sqrt{3}.$ **Ответ:** D

3.8. Найдите длину окружности, площадь которой равна $9\pi\ cm^2$.

A) $3\pi\ cm$ ***B)*** $9\pi\ cm$ ***C)*** $18\pi\ cm$ ***D)*** $6\pi\ cm$

Решение: $S = 9\pi\ cm^2;$ $\pi R^2 = S;$ $\pi R^2 = 9\pi\ cm^2;$ $R^2 = \frac{9\pi\ cm^2}{\pi};$

$R = \sqrt{9\ cm^2};$ $R = 3\ cm;$ $C = 2\pi R = 2\pi \cdot 3\ cm = 6\pi\ cm.$ **Ответ:** $D.$

3.9. Найдите сторону круга, вписанного в квадрат со стороной 6 cm.

A) $9\pi\ cm^2;$ B) $144\pi\ cm^2;$ C) $36\pi\ cm^2;$ D) $72\pi\ cm^2.$

Решение: $a = 6\ cm;$ $r = \frac{a}{2} = \frac{6\ sm}{2} = 3\ cm;$

$S = \pi r^2 - \pi \cdot (3\ cm)^2 = 9\pi\ cm^2$ **Ответ:** A

3.10. Радиус окружности, вписанной в квадрат, равен 5. Найдите диагональ квадрата.

A) $\frac{5\sqrt{2}}{2};$ ***B)*** $5\sqrt{2};$ ***C)*** $\frac{5\sqrt{2}}{4};$ ***D)*** $10\sqrt{2};$

Решение: $r - 5\ cm;$ $a - 2r - 2 \cdot 5\ cm - 10\ cm;$

$d = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2 \cdot (10\ cm)^2} = \sqrt{2 \cdot 100\ cm^2} = 10\sqrt{2}\ cm.$ **Ответ:** D.

3.11. Найдите количество сторон правильного многоугольника, сумма внутренних углов которого равна 1600°.

A) 12 B) 14 C) 16 D) 10

Решение: $1600^o - 8 \cdot 180^o + 160^o;$ $180^o(n - 2) = 8 \cdot 180^o;$

$n - 2 - 8;$ $n - 8 + 2;$ $n - 10.$ **Ответ:** D

3.12. Найдите периметр ромба, если его диагонали равны 24 cm и 18 cm.

A) $120\ cm$ B) $60\ cm$ C) $84\ cm$ D) $108\ cm$

Дано: $AC = 24\ cm;$ $BD = 18\ cm.$ Найти: $P = ?$

$AO = \frac{AC}{2} = \frac{24}{2} cm = 12\ cm;$ $BO = \frac{BD}{2} = \frac{18}{2} cm = 9\ cm;$

$$AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{(12\ cm)^2 + (9\ cm)^2} = \sqrt{144\ cm^2 + 81\ cm^2} =$$
$$= \sqrt{225\ cm^2} = 15\ cm;$$

$P = 4AB = 4 \cdot 15\ cm = 60\ cm.$ **Ответ:** *B.*

3.13. Периметр параллелограмма равен 48 dm, а одна сторона на 8 dm длиннее другой. Найдите меньшую сторону параллелограмма.

A) *8 dm*; B) *16 dm*; C) *6 dm*; D) *12 dm*;

Дано: $P = 48\ dm;$ $AB = x\ dm;$ $BC = AB + 8\ dm = x + 8\ dm.$

Найти: $AB = ?$

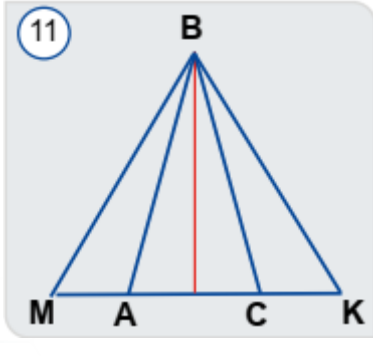
$$2 \cdot (AB + BC) = P; \quad 2 \cdot (x + x + 8) = 48; \quad 2x + 8 = \frac{48}{2}; \quad 2x + 8 = 24;$$

$$2x = 24\text{-}8; \quad 2x = 16; \quad x = \frac{16}{2}; \quad x = 8\ dm. \quad AB = 8\ dm.$$

Ответ: *A*

Домашнее задание

3.14. Вне равностороннего треугольника ABC на рисунке построены два равных угла ABM и CBK. Стороны этих углов пересекают AC в точках M и K соответственно. Докажите, что треугольники MBC и KBA равны.



ABC – равнобедренный треугольник. $AB=BC;$

$\angle CAB = \angle ACB = \alpha;$ $\angle ABM = \angle CBK = \beta;$

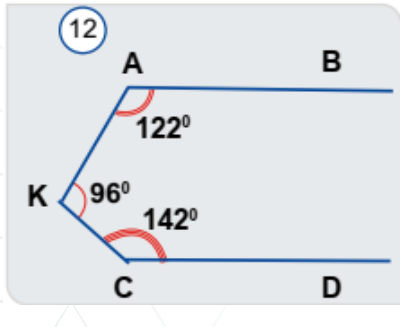
$\angle ABC = 180° - (\angle CAB + \angle ACB) = 180° - 2\alpha;$

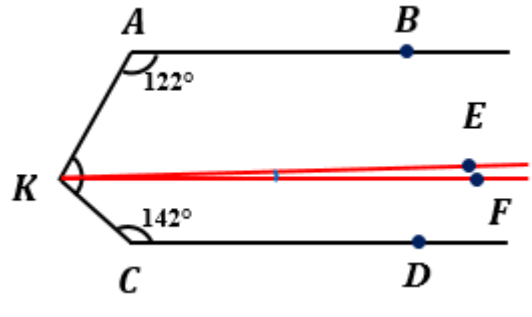
$\angle MBC = \angle MBA + \angle ABC = \beta + 180° - 2\alpha;$

$\angle ABK = \angle ABC + \angle CBK = 180° - 2\alpha + \beta;$

$\angle MBC = \angle ABK.$ Доказано.

3.15. Определите взаимное расположение прямых AB и CD, изображённых на рисунке . Обоснуйте ответ.





$\angle KAB = 122°;$ $\angle AKC = 96°;$ $\angle KCD = 142°;$

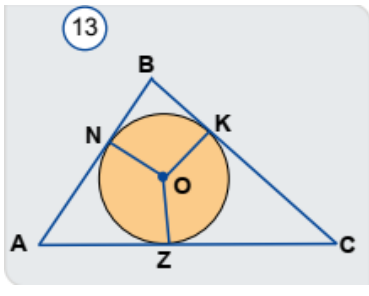
$\angle AKE = \alpha;$ $\angle EKF = \beta;$ $\angle FKC = \gamma;$ $\angle AKC = \alpha+\beta+\gamma = 96°;$

$$\begin{cases} AB \parallel KE \\ CD \parallel KF \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha + 122° = 180° \\ \gamma + 142° = 180° \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 180° - 122° = 58° \\ \gamma = 180° - 142° = 38° \end{cases}$$

$\alpha + \beta + \gamma = 96°;$ $58° + \beta + 38° = 96°;$ $\beta = 96° - 96°;$ $\beta = 0°.$

Значит, KE и KF совпадают. Отсюда следует, что $AB \parallel CD$.

3.16. В треугольник ABC на рисунке вписана окружность. Точки N и Z окружности делят стороны AB и AC треугольника на отрезки с разницей в 3 cm и 4 cm соответственно $(AN > NB, AZ > ZC)$. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 28 cm.



$AN = x;$ $NB = x - 3;$ $AZ = x;$ $ZC = x - 4;$

$AN > NB;$ $AZ > ZC;$ $\begin{cases} AN - MB = 3 \\ AZ - ZC = 4 \end{cases};$

$P_{ABC} = 28\ cm;$ $\begin{cases} ZC = CK = x - 4 \\ NB = BK = x - 3 \end{cases};$

$AB = AN + NB = x + x - 3 = 2x - 3;$ $AC = AZ + ZC = x + x - 4 = 2x - 4;$

$BC = BK + KC = x - 3 + x - 4 = 2x - 7;$ $AB + BC + AC = P_{ABC};$

$2x - 3 + 2x - 7 + 2x - 4 = 28;$ $6x - 14 = 28;$ $6x = 28 + 14;$

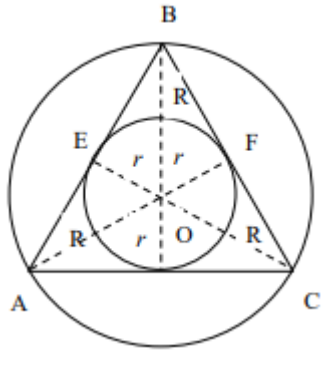
$6x = 42;$ $x = 7\ cm.$ $AB = 2x - 3 = 2 \cdot 7 - 3 = 14 - 3 = 11\ cm;$

$BC = 2x - 7 = 2 \cdot 7 - 7 = 14 - 7 = 7\ cm;$

$AC = 2x - 4 = 2 \cdot 7 - 4 = 14 - 4 = 10\ cm.$

Ответ: $11\ cm,$ $7\ cm,$ $10\ cm.$

3.17. Вокруг равностороннего треугольника описана окружность, радиус которой равен $3\sqrt{3}$. Найдите радиус вписанной окружности.



Дано: $AB = BC = AC = a;$ $R = 3\sqrt{3}.$

$\angle A = \angle B = \angle C = 60°.$ Найти: $r = ?$

$\angle CAO = \angle BAO = \alpha;$

$\angle A = \angle CAO + \angle BAO = \alpha + \alpha = 2\alpha;$ $2\alpha = 60°;$

$\alpha = \frac{60°}{2};$ $\alpha = 30°;$ $\sin 30° = \frac{r}{R};$ $\frac{1}{2} = \frac{r}{R};$

$r = \frac{R}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$ **Ответ:** $r = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$

УРОК 6.ПРАКТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ НА ПОВТОРЕНИЕ ГЛАВЫ

I. Стандарты:

– может распознавать в реальности, на моделях и чертежах плоские и пространственные геометрические фигуры, знает их основные свойства.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

– знать методы решения геометрических задач.

Навыки:

– уметь использовать методы при решении геометрических задач.

III. Краткое описание содержания урока:

– методы решения геометрических задач.

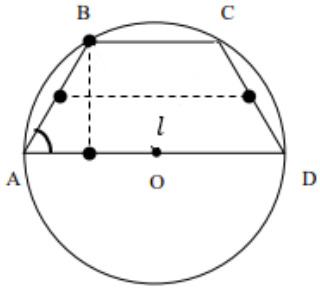
IV. Оборудование и наглядные пособия:

– линейка, карандаш.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Savollar и yechiladigan asalalar
Мотивация	Какие методы считаются приемлемыми при решении задач?	«Мозговой штурм»	Практическое упражнение и приложение 3.18–3.19
Формирование и закрепление знаний	При решении каких задач используется формула вычисления площадей?	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 3.20 – 3.21
	Какие типы задач решаются векторным методом?	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 3.22
	Метод геометрических преобразований	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 3.23
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 3.24
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 3.25 – 3.28		

3.18. В окружность вписана равносторонняя трапеция с углом основания 30°. Найдите среднюю линию трапеции, если её высота 7 cm.



Дано: $x = AB = CD;\ \alpha = \angle A = \angle D = 30°;$

$h = BK = 7\ cm.$ Найти: $l = \frac{a+b}{2} = ?$

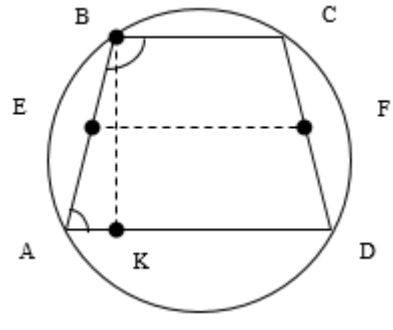
$\sin\alpha = \frac{h}{x};\quad \sin 30° = \frac{7}{x};\quad \frac{1}{2} = \frac{7}{x};\quad x = 14\ cm;$

$a = AD;\quad b = BC;\quad AD + BC = AB + CD;$

$a + b = x + x;\quad a + b = 2x;\quad \frac{a+b}{2} = x;\quad \frac{a+b}{2} = 14\ cm;\quad l = 14\ cm.$

Ответ: Средняя линия трапеции равна 14 cm.

3.19. Внутри окружности расположена равнобокая трапеция, угол при основании равен 150º. Средняя линия трапеции равна $8\sqrt{3}$. Найдите длину высоты трапеции.



$x = AB = CD;\quad AD = a;\quad BC = b;$

$\angle B = 150°;\quad EF = 16\sqrt{3};\quad h = BK;$

$\angle ABK = \alpha;\quad \angle A = \angle D;\quad \angle B + \angle D = 180°;$

$\angle D = 180° - 150° = 30°;\quad \angle A = 30°;$

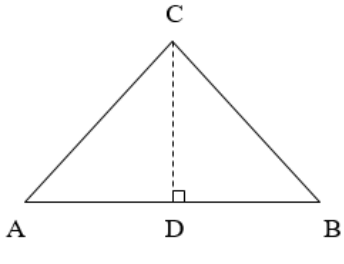
$AD + BC = AB + CD;\quad a + b = x + x;$

$a + b = 2x;\quad x = \frac{a+b}{2};\quad x = EF = 16\sqrt{3};\quad \sin\alpha = \frac{h}{x};$

$\sin 30° = \frac{h}{16\sqrt{3}};\quad \frac{1}{2} = \frac{h}{16\sqrt{3}};\quad h = \frac{16\sqrt{3}}{2};\quad h = 8\sqrt{3}.$

Ответ: высота трапеции равна $8\sqrt{3}\ cm.$

3.20. Высота равнобедренного треугольника равна 15 cm, а основание – 16 cm. Найдите боковую сторону треугольника.



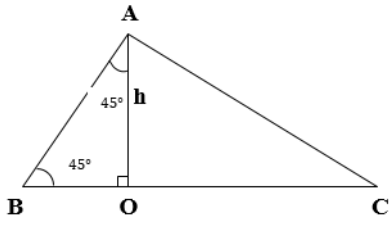
Дано: $a = AB = 16\ cm;\quad h = CD = 15\ cm.$

Найти: $b = AC = BC = ?$

$b = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{16}{2}\right)^2 + 15^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} =$

$= \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17\ cm.$ **Ответ:** Боковая сторона треугольника равна 17 cm.

3.21. Высота AO треугольника ABC делит его сторону BC на отрезки BO и OC. Если $AB = 10\sqrt{2}$ см, $AC = 26$ см найдите длину отрезка OC.



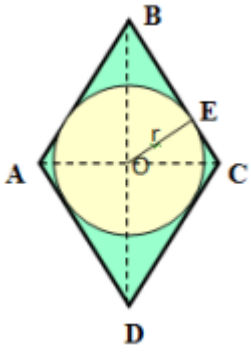
$$\sin B = \frac{h}{AB}; \quad h = AB \cdot \sin B = 10\sqrt{2} \cdot \sin 45° =$$

$$= 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{10 \cdot \sqrt{4}}{2} = 5 \cdot 2 = 10 \text{ см};$$

$$OC = \sqrt{AC^2 - h^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{676 - 100} = \sqrt{576} = 24 \text{ см}.$$

Ответ: Длина отрезка OC равна 24 см.

3.22. Сторона ромба 10 см, одна из его диагоналей 12 см. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб.



Дано: $a = AB = BC = CD = AD = 10$ см; $d_1 = AC = 12$ см.

Найти: $r = ?$

$$d_2 = \sqrt{4a^2 - d_1^2} = \sqrt{4 \cdot 10^2 - 12^2} = \sqrt{4 \cdot 100 - 144} =$$

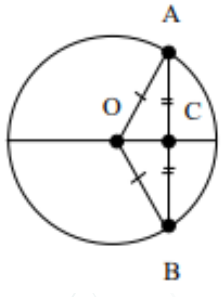
$$= \sqrt{400 - 144} = \sqrt{256} = 16 \text{ см};$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 6 \cdot 16 = 96 \text{ см}^2;$$

$$S = a \cdot h; \quad h = \frac{S}{a} = \frac{96}{10} = 9{,}6 \text{ см}; \quad h = 2r; \quad r = \frac{h}{2} = \frac{9{,}6}{2} = 4{,}8 \text{ см}.$$

Ответ: радиус окружности, вписанной в ромб, равен 4,8 см.

3.23. Найдите длину хорды, проведённой в окружности радиусом 15 см на расстоянии 12 см от центра окружности.



Дано: $x = AO_1 = O_1B$; $CO_1 = 5$ см; $O_1D = 20$ см.

Найти: $AB = ?$, $CD = ?$

$CD = CO_1 + O_1D = 5$ см $+ 20$ см $= 25$ см;

$AO_1 \cdot O_1B = CO_1 \cdot O_1D \rightarrow x \cdot x = 5 \cdot 20;$

$x^2 = 100; \quad x = \sqrt{100}; \quad x = 10$ см.

$AB = AO_1 + O_1B = x + x = 2x; \quad AB = 2x = 2 \cdot 10$ см $= 20$ см.

Ответ: $AB = 20$ см, $CD = 25$ см.

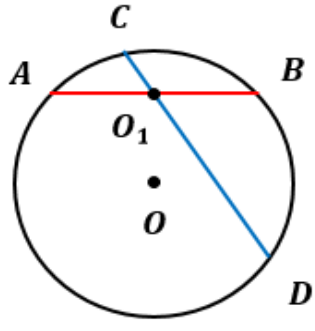
$$x = \sqrt{R^2 - OC^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9 \text{ см};$$

$AB = 2x = 2 \cdot 9\ cm = 18\ cm.$

Ответ: длина хорды равна 18 cm.

Домашнее задание

3.24. В окружности проведены две пересекающиеся хорды. Одна из них делится пополам в точке пересечения, другая – на отрезки 5 cm и 20 cm. Найдите длину каждой хорды.



Дано: $x = AO_1 = O_1B;\ CO_1 = 5\ cm;\ O_1D = 20\ cm.$

Найти: $AB = ?,\ \ CD = ?$

$CD = CO_1 + O_1D = 5\ cm + 20\ cm = 25\ cm;$

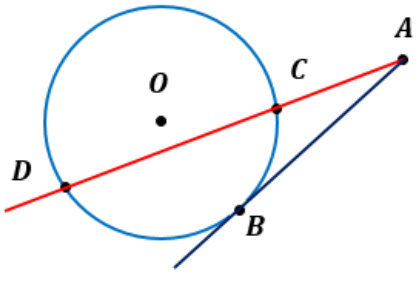
$AO_1 \cdot O_1B = CO_1 \cdot O_1D \rightarrow x \cdot x = 5 \cdot 20;$

$x^2 = 100;\ \ x = \sqrt{100};\ \ x = 10\ cm.$

$AB = AO_1 + O_1B = x + x = 2x;\ AB = 2x = 2 \cdot 10\ cm = 20\ cm.$

Ответ: $AB = 20\ cm,\ CD = 25\ cm.$

3.25. Из точки вне круга проведены секущая и касательная. Найдите длину касательной, если она на 5 cm длиннее своей внешней части и на 5 cm короче внутренней части секущей.



Дано: $AB = AC + 5\ cm;\ AB = CD - 5\ cm.$

Найти: $AB = ?$

$AC = AB - 5\ cm;\ \ CD = AB + 5\ cm;$

$AD = AC + CD = AB - 5 + AB + 5 = 2 \cdot AB;$

$(AB)^2 = AC \cdot AD;\ (AB)^2 = (AB - 5) \cdot 2 \cdot AB;\ AB = 2 \cdot (AB - 5);$

$AB = 2AB - 10;\ 2AB - AB = 10;\ AB = 10\ cm.$

Ответ: $AB = 10\ cm.$

Глава II. ВВЕДЕНИЕ В СТЕРЕОМЕТРИЮ

УРОК 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТЕРЕОМЕТРИИ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.GSH.01. Знает аксиомы стереометрии и использует их при доказательствах.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

-иметь представление о стереометрии.

-знать аксиомы стереометрии.

Навыки:

- уметь пользоваться аксиомами стереометрии.

III. Краткое описание содержания урока:

- аксиомы стереометрии и их использование при доказательствах.

IV. Оборудование и наглядные пособия:

- модели плоских и пространственных геометрических фигур.

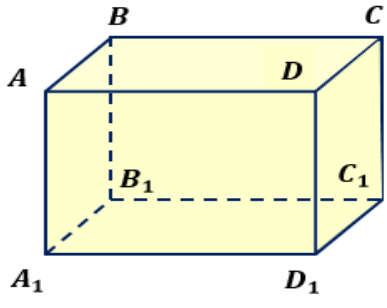
V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Что изучает стереометрия?	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме 1 Практическое упражнение и приложение 4.1-4.2
Формирование и закрепление знаний	Приведите примеры плоских и пространственных фигур.	Работа по учебнику рис. 1, 2	Вопросы по теме 2 Практическое упражнение и приложение 4.3
	Некоторые обозначения, применяемые в стереометрии.	Работа по учебнику	Вопросы по теме 3 Практическое упражнение и приложение 4.4
	Аксиомы стереометрии	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 4.5-4.6
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 4.7-4.9
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 4.10 - 4.11		

4.2. Соедините определения с их условным обозначением.

Утверждение		Обозначение
1. Точка M принадлежит плоскости α.		$\alpha \cap \beta = \varnothing$
2. M точка α не принадлежит плоскости.		$M \in \alpha$
3. Прямая a лежит в плоскости α.		$M \notin \alpha$
4. a Прямая а не лежит в плоскости α.		$a \subset \alpha$
5. Плоскости α и β пересекаются по прямой a.		$\alpha \cap \beta = a$
6. Плоскости α и β не пересекаются.		$a \not\subset \alpha$

4.3. Представьте стены вашего кабинета как фрагменты плоскостей, укажите следующее:



a) две пересекающиеся прямые;
b) две пересекающиеся плоскости;
c) три прямые, пересекающиеся в одной точке;
d) две непересекающиеся плоскости;
e) две непересекающиеся прямые;
f) три пересекающиеся плоскости.

a) две пересекающиеся прямые:
AB и BC; BC и CD; CD и DA; DA и AB;
A_1B_1 и B_1C_1; B_1C_1 и C_1D_1; C_1D_1 и D_1A_1; D_1A_1 и A_1B_1;
AA_1 и AB; AA_1 и A_1B_1; AA_1 и AD; AA_1 и A_1D_1
BB_1 и AB; BB_1 и A_1B_1; BB_1 и BC; BB_1 и B_1C_1
CC_1 и BC; CC_1 и B_1C_1; CC_1 и CD; CC_1 и C_1D_1
DD_1 и AD; DD_1 и A_1D_1; DD_1 и CD; DD_1 и C_1D_1

b) две пересекающиеся плоскости:
$ABCD \cap ABA_1B_1 = AB$; $ABCD \cap BCC_1B_1 = BC$;
$ABCD \cap CDD_1C_1 = CD$; $ABCD \cap ADD_1A_1 = AD$;
$A_1B_1C_1D_1 \cap ABB_1A_1 = A_1B_1$; $A_1B_1C_1D_1 \cap BCC_1B_1 = B_1C_1$;
$A_1B_1C_1D_1 \cap CDD_1C_1 = C_1D_1$; $A_1B_1C_1D_1 \cap ADD_1A_1 = D_1A_1$;

c) три прямые, пересекающиеся в одной точке:
$AB \cap BC \cap BB_1 = \{B\}$; $BC \cap CD \cap CC_1 = \{C\}$; $CD \cap DA \cap DD_1 = \{D\}$;
$DA \cap AB \cap AA_1 = \{A\}$; $A_1B_1 \cap B_1C_1 \cap BB_1 = \{B_1\}$;
$B_1C_1 \cap C_1D_1 \cap C_1C = \{C_1\}$; $C_1D_1 \cap D_1A_1 \cap DD_1 = \{D_1\}$;
$D_1A_1 \cap A_1B_1 \cap AA_1 = \{A_1\}$;

d) две непересекающиеся плоскости:
$ABCD \cap A_1B_1C_1D_1 = \varnothing$; $ABA_1B_1 \cap CDD_1C_1 = \varnothing$; $BCC_1B_1 \cap ADD_1A_1 = \varnothing$;

e) две непересекающиеся прямые:
$AB \cap CD = \varnothing$; $AB \cap A_1B_1 = \varnothing$; $AB \cap C_1D_1 = \varnothing$; $AB \cap A_1D_1 = \varnothing$;
$AB \cap B_1C_1 = \varnothing$; $AB \cap CC_1 = \varnothing$; $AB \cap DD_1 = \varnothing$.

$BC \cap B_1C_1 = \varnothing$; $BC \cap AD = \varnothing$; $BC \cap A_1D_1 = \varnothing$; $BC \cap AA_1 = \varnothing$;
$BC \cap DD_1 = \varnothing$; $BC \cap D_1C_1 = \varnothing$; $BC \cap A_1B_1 = \varnothing$.

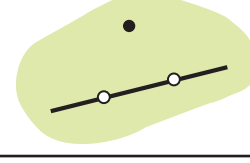
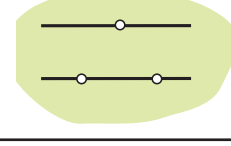
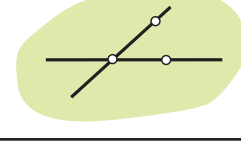
f) три пересекающиеся плоскости:

$ABB_1A_1 \cap BCC_1B_1 \cap ABCD = \{B\}$; $BCC_1B_1 \cap CDD_1C_1 \cap ABCD = \{C\}$;
$CDD_1C_1 \cap ADD_1A_1 \cap ABCD = \{D\}$; $ADD_1A_1 \cap ABB_1A_1 \cap ABCD = \{A\}$;
$ABB_1A_1 \cap BCC_1B_1 \cap A_1B_1C_1D_1 = \{B_1\}$; $BCC_1B_1 \cap CDD_1C_1 \cap A_1B_1C_1D_1 = \{C_1\}$;
$CDD_1C_1 \cap ADD_1A_1 \cap A_1B_1C_1D_1 = \{D_1\}$; $ADD_1A_1 \cap ABB_1A_1 \cap A_1B_1C_1D_1 = \{A_1\}$.

4.4. Прочитайте следующие предложения. Если предложение верное, поставьте рядом с ним «+», если неверное, поставьте «–».

1	У двух плоскостей может быть только одна общая точка.	–
2	У двух плоскостей могут быть только две общие точки.	–
3	У двух плоскостей могут быть две общие прямые.	–
4	Через две заданные пересекающиеся прямые можно провести только одну плоскость.	+
5	Через прямую и точку, не лежащую на ней, может проходить одна и только одна плоскость.	+
6	Если три точки не лежат на одной прямой, то через них можно провести одну плоскость.	+
7	Если две точки прямой лежат в одной плоскости, то все её точки лежат в этой плоскости.	+
8	Если две плоскости имеют общую точку, то эти плоскости также имеют общую прямую, проходящую через эту точку.	+

4.5. Найдите картинку, которая соответствует свойствам пространственных нижеприведённых фигур.

Свойства		Чертежи
Через прямую и точку, не лежащую на ней, может проходить одна и только одна плоскость.		
Через две пересекающиеся прямые может проходить одна и только одна плоскость.		
Через две параллельные прямые может проходить одна и только одна плоскость.		

4.6. Сколько прямых могут пройти через две точки в пространстве?

Ответ: через две точки в пространстве может пройти одна и только одна прямая.

4.7. Сколько плоскостей можно провести через три точки в пространстве?

a) Если три точки в пространстве лежат на одной прямой, то через них можно провести бесконечное количество плоскостей.

b) Если три точки в пространстве не лежат на одной прямой, то через них можно провести одну плоскость.

4.8. Сколько плоскостей можно провести через одну прямую в пространстве?

Ответ: Через одну прямую в пространстве можно провести бесконечное количество плоскостей.

4.9. Когда в пространстве расположены три точки, как через них можно провести бесконечное число плоскостей?

Ответ: Если три точки лежат на прямой, то через них можно провести бесконечное количество плоскостей.

Домашнее задание

4.10. В пространстве даны: а) две прямые; б) прямая и плоскость; в) две плоскости. Сколько общих точек может быть у двух плоскостей?

Ответы:

a) Сколько общих точек могут иметь в пространстве две прямые?

1) Если две прямые параллельны в пространстве, то у них нет общих точек.

2) Две прямые в пространстве при пересечении имеют одну общую точку.

3) Если две прямые совпадают в пространстве, то они имеют бесконечное множество общих точек.

b) Сколько общих точек может иметь в пространстве прямая и плоскость?

1) Прямая линия и плоскость в пространстве не имеют общих точек, если они параллельны.

2) Если прямая и плоскость пересекаются в пространстве, то они имеют одну общую точку.

3) Если прямая и плоскость совпадают в пространстве, то у них бесконечное множество общих точек.

c) Сколько общих точек могут иметь в пространстве две плоскости?

1) Если две плоскости параллельны в пространстве, то у них нет общих точек.

2) Если две плоскости пересекаются в пространстве, то они имеют бесконечное множество общих точек.

3) Если две плоскости совпадают в пространстве, то они имеют бесконечное множество общих точек.

4.11. В пространстве даны: а) две прямые; б) прямая и плоскость; в) две плоскости; г) три плоскости. Могут ли они иметь общую точку?

a) Могут ли две прямые в пространстве иметь одну общую точку?

Ответ: Если две прямые в пространстве не параллельны, то они имеют одну общую точку.

b) Могут ли прямая и плоскость иметь одну общую точку в пространстве?

Ответ: Прямая и плоскость в пространстве могут иметь только одну общую точку,

если они не параллельны.

c) Могут ли две плоскости в пространстве иметь одну общую точку?

Ответ: Две плоскости в пространстве не могут иметь одну общую точку. Могут иметь бесконечное множество общих точек.

УРОК 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТЕРЕОМЕТРИИ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.MM.01. Знает следствия из аксиом стереометрии и может их использовать.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

- знать следствия из аксиом стереометрии.

Навыки:

- уметь пользоваться следствиями из аксиом стереометрии.

III. Краткое описание содержания урока:

- следствия из аксиом стереометрии и их использование.

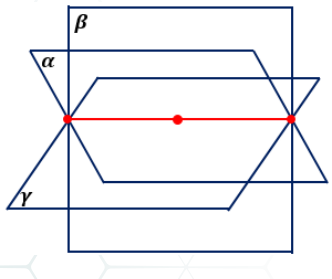
IV. Оборудование и наглядные пособия:

- линейка, карандаш.

V. Краткая технологическая карта урока:

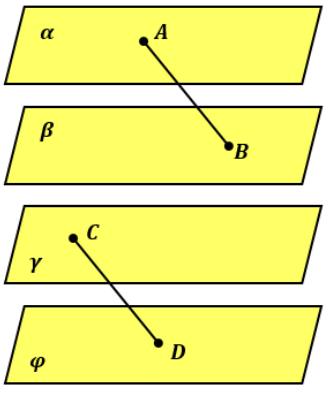
Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Чем отличаются аксиомы стереометрии от аксиом планиметрии?	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме 4 Практическое упражнение и приложение 4.12 - 4.13
Формирование и закрепление знаний	Следствия из аксиом стереометрии.	Работа по учебнику	Вопросы по теме: 5 Практическое упражнение и приложение 4.14 - 4.15
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 4.16 - 4.17
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 4.18 - 4.21		

4.12. Докажите, что через три точки, лежащие на прямой, можно провести плоскость. Сколько будет таких плоскостей?



Ответ: Через три точки α, β, γ, лежащие на прямой, может проходить бесконечное количество плоскостей.

4.13. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямые AB и CD не пересекаются.



$A \in \alpha;\ A \notin \beta;\ A \notin \gamma;\ A \notin \varphi;\ \alpha \cap AB = \{A\}$

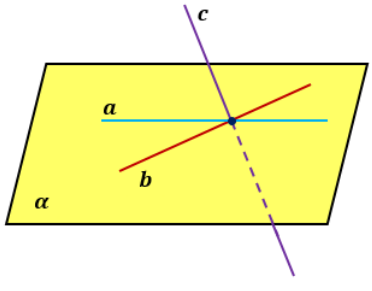
$B \notin \alpha;\ B \in \beta;\ B \notin \gamma;\ B \notin \varphi;\ \beta \cap AB = \{B\}$

$C \notin \alpha;\ C \notin \beta;\ C \in \gamma;\ C \notin \varphi;\ \gamma \cap CD = \{C\}$

$D \notin \alpha;\ D \notin \beta;\ D \notin \gamma;\ D \in \varphi;\ \varphi \cap CD = \{D\}$

$AB \parallel CD;\ AB \cap CD = \varnothing.$

4.14. Можно ли через точку пересечения двух данных прямых провести третью прямую, не лежащую с ними в одной плоскости? Обоснуйте свой ответ.



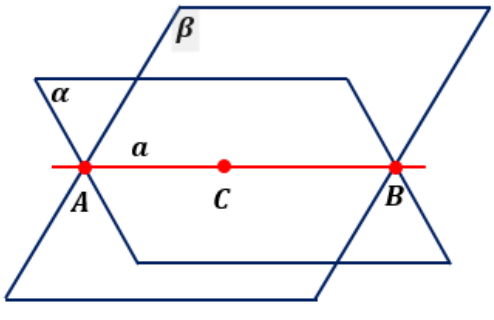
$a \in \alpha;\ b \in \alpha;$

$a \cap b = O;\ c \notin \alpha;$

$c \cap \alpha = O.$

Прямая c пересекает плоскость α в точке O.

4.15. Точки A, B, C лежат в каждой из двух различных плоскостей. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой.

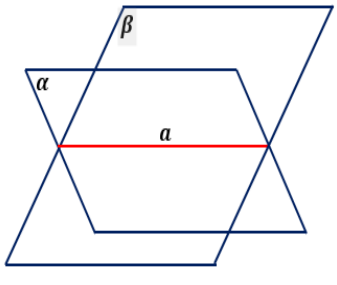


$$\begin{cases} A \in \alpha \\ A \in \beta \end{cases} \rightarrow A \in a;$$

$$\begin{cases} B \in \alpha \\ B \in \beta \end{cases} \rightarrow B \in a;$$

$$\begin{cases} C \in \alpha \\ C \in \beta \end{cases} \rightarrow C \in a.$$

4.16. Докажите, что две различные плоскости проходят через одну прямую.



$$\alpha \nparallel \beta \rightarrow \begin{cases} a \subset \alpha \\ a \subset \beta \end{cases} \rightarrow \alpha \cap \beta = a.$$

Плоскость α не параллельна плоскости β.
Плоскость α проходит через прямую a.
Плоскость β проходит через прямую a.
Прямая a – это пересечение плоскостей α и β.

4.17. Сколько прямых можно провести через а) три; б) четыре; в) пять; г) *n*-пар точек?

Правило. Чтобы провести прямые не более чем через n точек, любые 3 точки не должны лежать на одной прямой.

Следовательно, поскольку через 2 точки можно провести одну прямую, то можно провести не более n прямых $C\frac{2}{n}$ Здесь:

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} = \frac{n\cdot(n-1)}{2}.$$

$$a)\ n=3 \rightarrow \frac{n\cdot(n-1)}{2} = \frac{3\cdot(3-1)}{2} = \frac{3\cdot 2}{2} = \frac{6}{2} = 3;$$

$$b)\ n=4 \rightarrow \frac{n\cdot(n-1)}{2} = \frac{4\cdot(4-1)}{2} = \frac{4\cdot 3}{2} = \frac{12}{2} = 6;$$

$$c)\ n=5 \rightarrow \frac{n\cdot(n-1)}{2} = \frac{5\cdot(5-1)}{2} = \frac{5\cdot 4}{2} = \frac{20}{2} = 10;$$

$$d)\ n=n \rightarrow \frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

Домашнее задание

4.18. Сколько плоскостей можно провести через а) три; б) четыре; в) пять; г) *n* точек?

Правило. Чтобы провести плоскость из n точек, любые 3 точки не должны лежать на одной прямой.

Итак, поскольку через 3 точки можно провести одну плоскость, то можно провести не более n плоскостей $C\frac{3}{n}$. Здесь:

$$C_n^3 = \frac{n!}{3!\cdot(n-3)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}.$$

$$a)\ n=3 \rightarrow \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6} = \frac{3\cdot(3-1)\cdot(3-2)}{6} = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{6} = \frac{6}{6}\ 1;$$

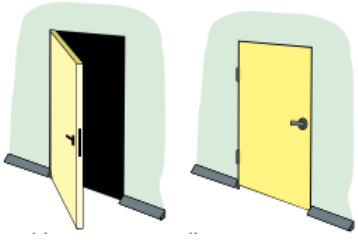
$$b)\ n=4 \rightarrow \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6} = \frac{4\cdot(4-1)\cdot(4-2)}{6} = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{6} = \frac{24}{6}\ 4;$$

$$c)\ n=5 \rightarrow \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6} = \frac{5\cdot(5-1)\cdot(5-2)}{6} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{6} = \frac{60}{6}\ 10;$$

$$d)\ n=n \rightarrow \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}.$$

4.19. . На какие аксиомы можно опираться для объяснения случаев на рис. 15? А) Почему открытая дверь то открывается, то закрывается во время грозы? Почему нет такого действия при закрытом замке? Б) Почему у камеры три

ножки? В) Как проверить ножки стула, чтобы он прочно стоял на полу? Г) Как проверяется ровность линейки? Д) Какую из двух теорем стереометрических аксиом вы можете объяснить?



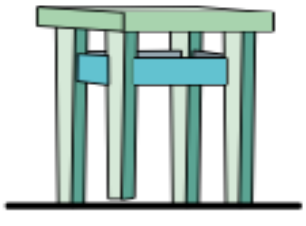
Аксиома S_1. **Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит только одна плоскость.**

Ответ. Через прямую и точку, не лежащую на ней, можно провести только одну плоскость.



Аксиома S_1. **Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит только одна плоскость.**

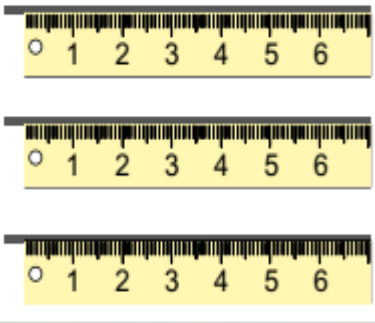
Ответ. Только одна плоскость проходит через три точки, не лежащие на одной прямой.



Аксиома S_1. **Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит только одна плоскость.**

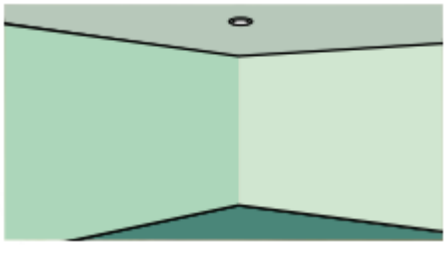
Аксиома S_2. **Если две точки прямой лежат в одной плоскости, то все её точки лежат в этой плоскости.**

Ответ: Чтобы убедиться, что ножки готового стула лежат в одной плоскости, плотники проверяют, натягивая веревку на противоположные ножки стула. Две пересекающиеся линии определяют одну плоскость.



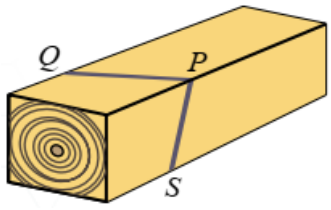
Аксиома S_2. **Если две точки прямой лежат в одной плоскости, то все её точки лежат в этой плоскости.**

Ответ. Если две точки прямой лежат в плоскости, то вся прямая лежит в этой плоскости.



Следствие 1. ***Через прямую и точку, не лежащую на ней, может проходить одна и только одна плоскость.***

4.20. На рисунке показаны линии, начерченные плотником перед распилом доски. Каким следствием аксиом стереометрии можно объяснить его работу?



Следствие 2. ***Через две заданные пересекающиеся прямые можно провести одну плоскость.***

Ответ: чертит отрезки AB и AC на двух соседних гранях деревянной доски и распиливает, помещая пилу в эти отрезки как можно ближе. В результате, поскольку плоскость, проходящая через две пересекающиеся прямые, является единственной, то поверхность получается плоской.

4.21. На рисунке показан кузнечный процесс выпрямления изогнутого железа. Железный прут сначала кладут на ровное место и выравнивают, ударяя молотком. Затем его переворачивают и снова расплющивают. Какое следствие аксиом стереометрии может объяснить этот процесс?



Следствие 1. ***Через прямую и точку, не лежащую на ней, можно провести одну и только одну плоскость.***

УРОК 3. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.GSH.02. Знает определение параллельных, пересекающихся и скрещивающихся прямых в пространстве и может изображать их на чертеже.

– M10.GO‘.GSH.03. Умеет описывать прямую линию, параллельную плоскости.

– M10.GO‘.GSH.03. Может разбираться в скрещивающихся и параллельных плоскостях.

– M10.GO‘.GSH.05. Знает понятие о параллельности прямой к плоскости.

– M10.GO‘.GSH.06. Имеет понятие о скрещивающихся и параллельных плоскостях

– M10.GO‘.MM.03. Знает свойства параллельности плоскости к прямой и применяет их при решении практических задач.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

- знать определение параллельных, пересекающихся и скрещивающихся прямых в пространстве;
- знать понятие о параллельности прямой к плоскости;
- знать понятие о параллельности плоскости к прямой .

Навыки:

- Знает свойства параллельности прямых к плоскости и применяет их при решении практических задач.

III. Краткое описание содержания урока:

- параллельные, пересекающиеся и скрещивающиеся прямые в пространстве. Параллельность прямой к плоскости. Свойства параллельности плоскости к прямой.

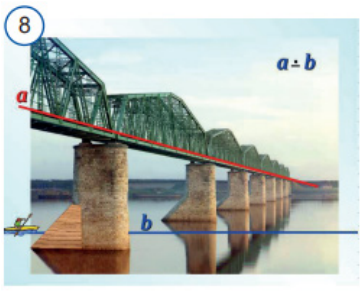
IV. Оборудование и наглядные пособия:

- модели различных плоских и пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

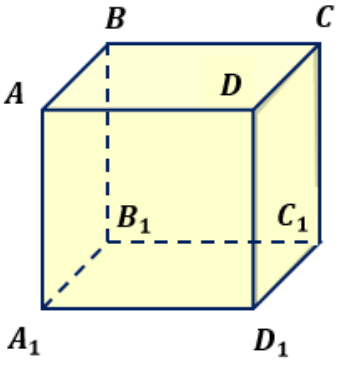
Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Приведите примеры на прямую и плоскость из окружающего пространства	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме 1-2
Формирование и закрепление знаний	Прямые в пространстве	Работа по учебнику	Вопросы по теме 3 Практическое упражнение и приложение 5.1-5.2
	Прямая и плоскость в пространстве	Работа по учебнику	Вопросы по теме 4 Практическое упражнение и приложение 5.3-5.4
	Плоскости в пространстве	Работа по учебнику	Вопросы по теме 5 Практическое упражнение и приложение 5.5-5.6
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 5.7-5.8
Домашнее задание	1. Вопросы по теме 6-7 2. Практическое упражнение и приложение 5.9-5.14		

5.2. Определите, что представляют собой прямые линии в пространстве на рисунке.



На рисунке в виде скрещивающихся прямых в пространстве указывается прямая a, показывающая дорогу, по которой движется автомобиль, а прямая b показывает направление, в котором плывёт лодка. Показано, что пересечение прямой a с прямой b обозначается как $a \div b$.

5.3. В модели куба отобразите следующие пары его элементов:



1) два ребра с одной общей точкой;
2) два ребра, не имеющие общей точки;
3) два ребра, не лежащие в одной плоскости;
4) ребро и сторона с общей точкой;
5) ребро и сторона, не имеющие общих точек;
6) сторона и лежащее на ней ребро;
7) две непересекающиеся стороны;
8) две пересекающиеся стороны.

1) два рёбра с одной общей точкой;

AB и BC; BC и CD; CD и DA; DA и AB;
A_1B_1 и B_1C_1; B_1C_1 и C_1D_1; C_1D_1 и D_1A_1; D_1A_1 и A_1B_1;
AA_1 и AB; AA_1 и A_1B_1; AA_1 и AD; AA_1 и A_1D_1;
BB_1 и AB; BB_1 и A_1B_1; BB_1 и BC; BB_1 и B_1C_1;
CC_1 и BC; CC_1 и B_1C_1; CC_1 и CD; CC_1 и C_1D_1;
DD_1 и AD; DD_1 и A_1D_1; DD_1 и CD; DD_1 и C_1D_1.

2) два ребра, не имеющие общей точки;

AA_1 и C_1D_1; AA_1 и B_1C_1; AA_1 и CC_1; AA_1 и BC;
AA_1 и CD; AA_1 и BB_1; AA_1 и DD_1.

DD_1 и AA_1; DD_1 и BB_1; DD_1 и CC_1; DD_1 и A_1B_1;
DD_1 и B_1C_1; DD_1 и AB; DD_1 и BC.

CC_1 и DD_1; CC_1 и AA_1; CC_1 и BB_1; CC_1 и A_1D_1;
CC_1 и AD; CC_1 и A_1B_1; CC_1 и AB.

BB_1 и AA_1; BB_1 и CC_1; BB_1 и DD_1; BB_1 и A_1D_1;
BB_1 и AD; BB_1 и C_1D_1; BB_1 и CD.

A_1B_1 и C_1D_1; A_1B_1 и CD; A_1B_1 и AB; A_1B_1 и CC_1;
A_1B_1 и DD_1; A_1B_1 и AD; A_1B_1 и BC.

B_1C_1 и A_1D_1; B_1C_1 и AD; B_1C_1 и BC; B_1C_1 и AB;
B_1C_1 и CD; B_1C_1 и AA_1; B_1C_1 и DD_1.

C_1D_1 и A_1B_1; C_1D_1 и AB; C_1D_1 и DC; C_1D_1 и AA_1;
C_1D_1 и BB_1; C_1D_1 и BC; C_1D_1 и AD.
A_1D_1 и B_1C_1; A_1D_1 и BC; A_1D_1 и AD; A_1D_1 и BB_1;
A_1D_1 и CC_1; A_1D_1 и AB; A_1D_1 и DC.

AB и A_1B_1; AB и D_1C_1; AB и DC; AB и CC_1;
AB и DD_1; AB и A_1D_1; AB и B_1C_1.

BC и B_1C_1; BC и A_1D_1; BC и AD; BC и AA_1;
BC и DD_1; BC и A_1B_1; BC и D_1C_1.

CD и C_1D_1; CD и A_1B_1; CD и AB; CD и BB_1;
CD и AA_1; CD и B_1C_1; CD и A_1D_1.

AD и A_1D_1; AD и B_1C_1; AD и BC; AD и A_1B_1;
AD и D_1C_1; AD и BB_1; AD и CC_1.

3) два ребра, не лежащие в одной плоскости;

AB и A_1D_1; AB и B_1C_1; AB и C_1D_1; AB и CC_1; AB и DD_1.

BC и D_1C_1; BC и A_1B_1; BC и A_1D_1; BC и AA_1; BC и DD_1.

CD и A_1D_1; CD и B_1C_1; CD и A_1B_1; CD и AA_1; CD и BB_1.

AD и A_1B_1; AD и D_1C_1; AD и B_1C_1; AD и BB_1; AD и CC_1.

A_1B_1 и AD; A_1B_1 и BC; A_1B_1 и DC; A_1B_1 и DD_1; A_1B_1 и CC_1.

B_1C_1 и AB; B_1C_1 и DC; B_1C_1 и AD; B_1C_1 и AA_1; B_1C_1 и DD_1.

C_1D_1 и CB; C_1D_1 и AB; C_1D_1 и AD; C_1D_1 и AA_1; C_1D_1 и BB_1.

A_1D_1 и AB; A_1D_1 и BC; A_1D_1 и DC; A_1D_1 и BB_1; A_1D_1 и CC_1.

AA_1 и D_1C_1; AA_1 и C_1B_1; AA_1 и CC_1; AA_1 и BC; AA_1

BB_1 и A_1D_1; BB_1 и D_1C_1; BB_1 и AD; BB_1 и DC; BB_1 и DD_1.

CC_1 и A_1D_1; CC и A_1B_1; CC_1 и AD; CC_1 и AB; CC_1 и AA_1.

DD_1 и A_1B_1; DD_1 и B_1C_1; DD_1 и AB; DD_1 и BC; DD_1 и BB_1.

4) ребро и сторона с общей точкой;

$$A \to \begin{cases} AB \\ AD \\ AA_1 \end{cases}; \quad B \to \begin{cases} BA \\ BC \\ BB_1 \end{cases}; \quad C \to \begin{cases} CB \\ CD \\ CC_1 \end{cases}; \quad D \to \begin{cases} DA \\ DC \\ DD_1 \end{cases}$$

$$A_1 \to \begin{cases} A_1B_1 \\ A_1D_1 \\ AA_1 \end{cases}; \quad B_1 \to \begin{cases} B_1A_1 \\ B_1C_1 \\ BB_1 \end{cases}; \quad C_1 \to \begin{cases} C_1B_1 \\ C_1D_1 \\ CC_1 \end{cases}; \quad D_1 \to \begin{cases} D_1A_1 \\ D_1C_1 \\ DD_1 \end{cases}$$

$$A \to \begin{cases} ABCD \\ ABB_1A_1 \\ ADD_1A_1 \end{cases}; \quad B \to \begin{cases} ABCD \\ ABB_1A_1 \\ BCC_1B_1 \end{cases}; \quad C \to \begin{cases} ABCD \\ BCC_1B_1 \\ CDD_1C_1 \end{cases}; \quad D \to \begin{cases} ABCD \\ ADD_1A_1 \\ DCC_1D_1 \end{cases}$$

$$A_1 \to \begin{cases} A_1B_1C_1D_1 \\ A_1D_1DA \\ A_1B_1BA \end{cases}; \quad B_1 \to \begin{cases} A_1B_1C_1D_1 \\ A_1B_1BA \\ B_1C_1CB \end{cases}; \quad C_1 \to \begin{cases} A_1B_1C_1D_1 \\ B_1C_1CB \\ D_1C_1CD \end{cases}; \quad D_1 \to \begin{cases} A_1B_1C_1D_1 \\ D_1C_1CD \\ A_1D_1DA \end{cases}$$

5.4. Соедините названия прямых с их свойствами.

Свойства прямых линий	Взаимное расположение
Лежат в плоскости и не имеют общей точки.	Скрещивающиеся
Лежат в одной плоскости и имеют общую точку.	Пересекающиеся
Не лежат в одной плоскости.	Параллельные

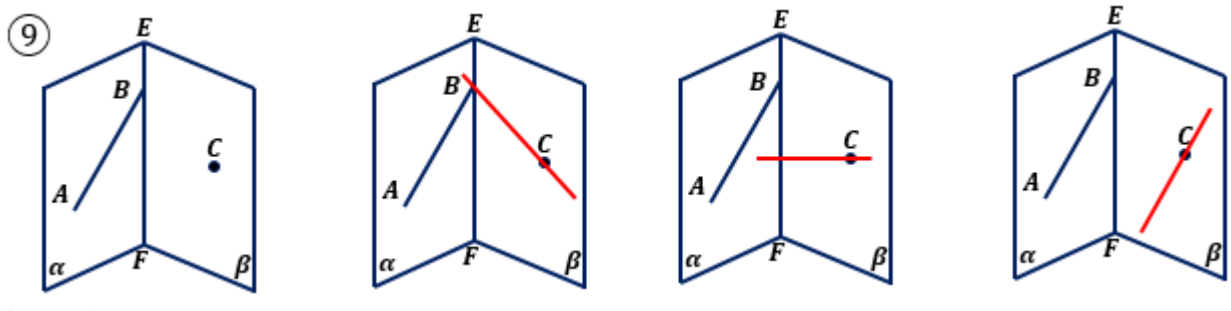
Ответ:

Свойства прямых линий	Взаимное расположение
Лежат в плоскости и не имеют общей точки.	Параллельные
Лежат в одной плоскости и имеют общую точку.	Пересекающиеся
Не лежат в одной плоскости.	Скрещивающиеся

5.5. Плоскости α и β на рисунке пересекаются по прямой EF. Прямая AB лежит в плоскости α. Проведите прямую через точку C, лежащую на плоскости β, так, чтобы она:

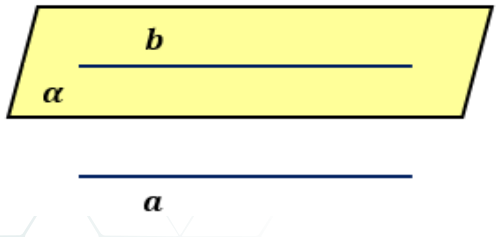
а) пересекала прямую AB; **б) с прямой AB были скрещивающимися;**

в) прямая AB была параллельна прямой.

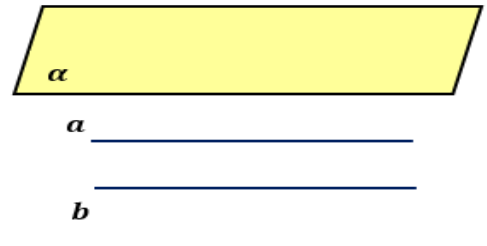


5.6. Известно, что $a \parallel b$ и $a \parallel \alpha$. Как могут быть взаимно расположены прямая b и плоскость α?

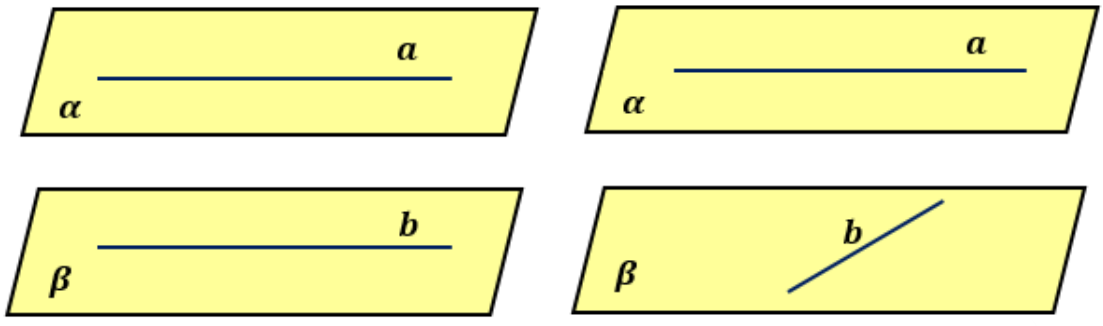
Положение 1. $a \parallel b;\ a \parallel \alpha;\ b \parallel \alpha.$



Положение 2. $a \parallel b;\ a \parallel \alpha;\ \alpha \parallel b.$



5.7. Известно, что $\alpha \parallel \beta$, $a \subset \alpha$ и $b \subset \beta$. Как могут быть взаимно расположены прямые a и b?

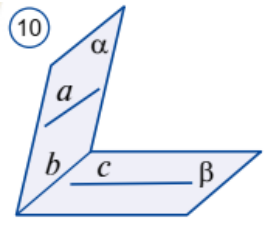


1) $\alpha \parallel \beta;\ a \subset \alpha;\ b \subset \beta;\ a \parallel b.$ 2) $\alpha \parallel \beta;\ a \subset \alpha;\ b \subset \beta;\ a \div b.$

Прямые a и b могут быть параллельными или скрещивающимися.

Ответ: $a \parallel b;\ a \div b.$

5.8. На рисунке 10 плоскости α и β пересекаются по прямой b. Если $a \,//\, b$, c и b не параллельны, то как могут быть расположены прямые a и c?



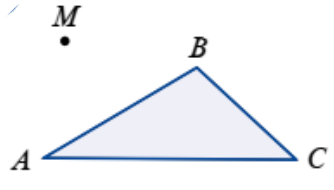
$\alpha \cap \beta = b;\quad a \parallel b;\quad c \nparallel b.$

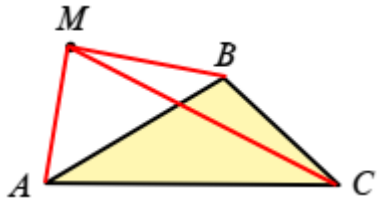
Прямые a и c могут быть взаимоскрещивающимися.

Ответ: $a \div c.$

Домашнее задание

5.9. На рисунке точка M лежит во внешней области треугольника ABC. Найдите скрещивающиеся прямые с прямыми MA, MC, MB.

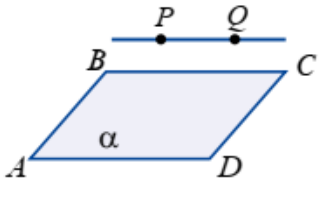




$MA \div BC;$
$MB \div AC;$
$MC \div AB.$

$\begin{cases} MA \text{ va } BC \\ MB \text{ va } AC \\ MC \text{ va } AB \end{cases}$ скрещивающиеся прямые

5.10. На рисунке прямая PQ лежит вне прямоугольника ABCD,но параллельно BC. Какими являются прямые: a) PQ и AB; b) PQ и CD; c) PQ и AD?

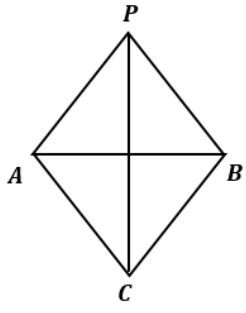


a) PQ и AB скрещивающиеся. $PQ \div AB.$

b) PQ и CD скрещивающиеся. $PQ \div CD.$

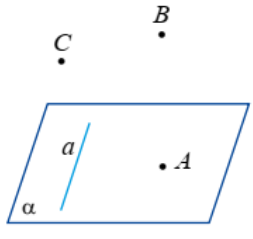
c) PQ и AD параллельные. $PQ \parallel AD.$

5.11. Дана треугольная пирамида (тетраэдр) $ABCP$. Как прямые линии в таблице ниже относятся друг к другу? Поставьте соответствующий символ (⊗ – пересекает, ⫟ – скрещенные, //– параллель) в соответствующую ячейку.



	AB	BC	AC	PA	PB	PC
AB		⊗	⊗	⊗	⊗	⫟
BC	⊗		⊗	⫟	⊗	⊗
AC	⊗	⊗		⊗	⫟	⊗
PA	⊗	⫟	⊗		⊗	⊗
PB	⊗	⊗	⫟	⊗		⊗
PC	⫟	⊗	⊗	⊗	⊗	

5.12. На рисунке прямая a и точка A принадлежат плоскости α. Точки C и B данной плоскости не принадлежат. Будет ли плоскость, проходящая через следующие точки и прямые, отличаться от данной плоскости α?



A) через прямую a и точку B;

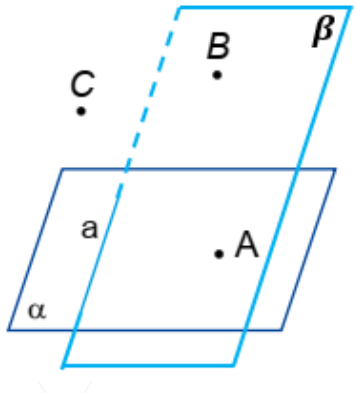
B) через прямую a и точку C;

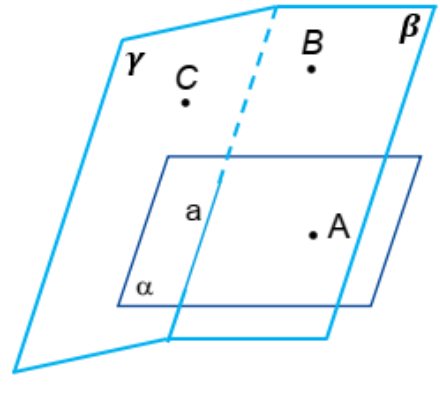
C) через прямые AB и AC;

D) через прямые AB и BC.

A) через прямую a и точку B можно провести плоскость β.

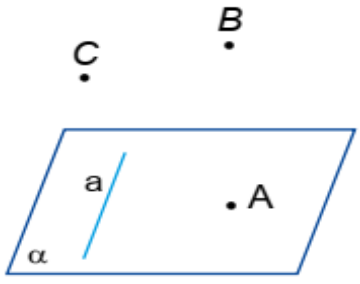
B) через прямую a и точку C можно провести плоскость γ.

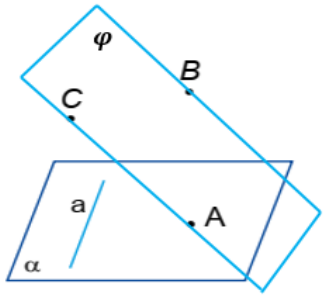




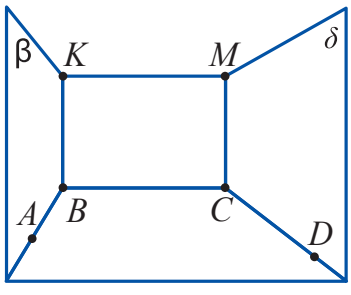
C) через прямые AB и AC нет точки D.

D) через прямые AB и BC можно провести плоскость φ.





5.13. Используя данные рисунка , заполните таблицу по образцу:



Плоскости	α и β	α и γ	α и δ	β и γ	γ и δ
Общие точки	*A* и *B*				
Общие прямые	*AB*				

Плоскости	α и β	α и γ	α и δ	β и γ	γ и δ
Общие точки	*A* и *B*	*B* и *C*	*C* и *D*	*B* и *K*	*C* и *M*
Общие прямые	*AB*	*BC*	*CD*	*BK*	*CM*

УРОК 4. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ. МНОГОГРАННИКИ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.GSH.07. Имеет основные понятия о пространственных телах, многогранниках – призме, параллелепипеде, кубе, пирамиде.

– M10.GO‘.GSH.08. Может изображать на чертеже элементы многогранников: призмы, параллелепипеда, куба, пирамиды.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

- знать многогранники – призму, параллелепипед, куб, пирамиду.

Навыки:

- изображение на чертеже элементов многогранников: призмы, параллелепипеда, куба, пирамиды.

III. Краткое описание содержания урока:

- многогранники: призма, параллелепипед, куб, пирамида.

IV. Оборудование и наглядные пособия:

- модели различных плоских и пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Приведите примеры многогранников	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме 1
Формирование и закрепление знаний	Пространственные тела	Работа по учебнику	Вопросы по теме 2 Практическое упражнение и приложение 6.1-6.2
	Призма и её виды	Чертежи и макеты	Вопросы по теме 3 Практическое упражнение и приложение 6.3-6.4
	Призма и её виды	Работа по учебнику. Чертежи и макеты	Вопросы по теме 4 Практическое упражнение и приложение 6.5-6.6
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 6.7-6.12
Домашнее задание	1. Вопросы по теме 5 2. Практическое упражнение и приложение 6.13-6.17		

6.1. В таблице содержится основная информация 5 темы. Внимательно изучите её и интерпретируйте.

1) Призма. Основание - треугольники ABC и $A_1\ B_1\ C_1$; боковые грани параллелограмма – $ABB_1\ A_1$; $BCC_1\ B_1$; $ACC_1\ A_1$. У призмы $n+2$ граней, n боковых граней и 2 основания. Количество вершин призмы $U = 2n$, количество граней $Y = n+2$, количество рёбер $Q = 3\ n$.

2) Прямоугольный параллелепипед. Основание – прямоугольники $ABCD$, $A_1 B_1 C_1$

D_1, боковые грани – прямоугольники ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, ADD_1A_1.

Прямоугольный параллелепипед имеет 6 граней, 4 боковых грани, 2 основания, 12 рёбер и 8 вершин.

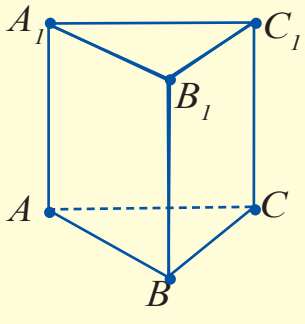
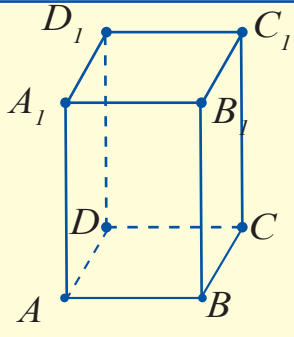
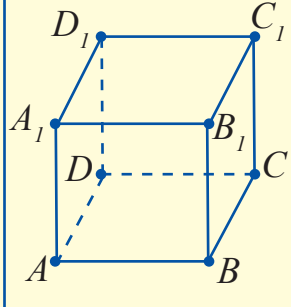
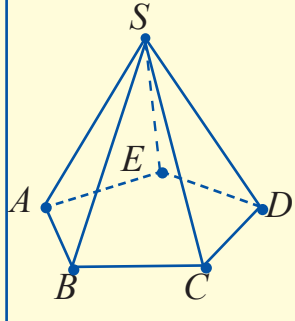
3) Куб. Основание – квадраты $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$; боковые грани квадрата – ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, ADD_1A_1. $S_{основания} = a^2$; $S_{бок} = 4a^2$; $S_{полная} = 6a^2$.

У куба 6 граней, 4 боковых грани, 2 основания, 12 рёбер и 8 вершин.

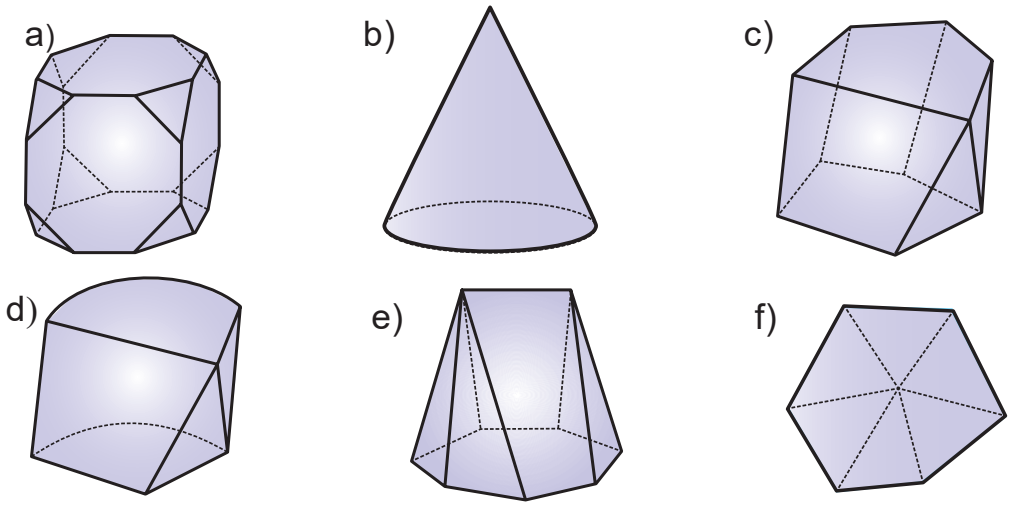
4) Пирамида. Основание — многоугольник $ABCDE$, грани — треугольники ABS, BCS, CDS, DES, AES.

Рёбра основания пирамиды AB, BC, CD, DE, AE. Рёбра боковых граней AS, BS, CS, DS, ES.

Если количество оснований пирамиды равно n: количество вершин равно $n+1$, количество рёбер равно $2n$, а количество граней равно $n+1$.

Многогранники			
Призма	**Прямоугольный параллелепипед**	**Куб**	**Пирамида**
			
Основание – многоугольник, грани – параллелограммы.	Основание – прямоугольник, грани – прямоугольники.	Основание – квадрат, грани – квадраты.	Основание – многоугольник, грани – треугольники.

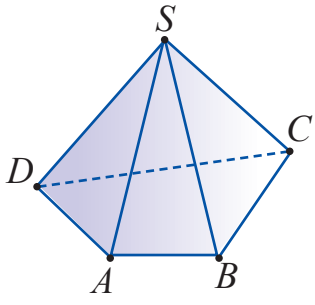
6.2. Какое из пространственных тел на рисунке является многогранником?



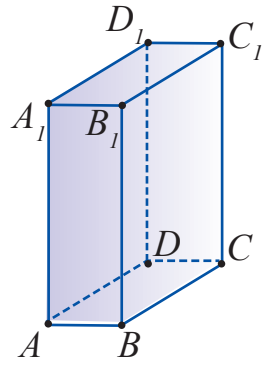
Ответ: a) многогранник; b) конус; c) многогранник; d) не является многогранником; e) многогранник; f) многогранник.

6.3. Какие из пространственных тел на рисунке: 1) куб; 2) пирамида; 3) призма?

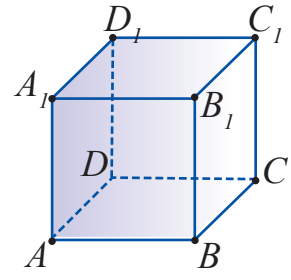
a)



b)



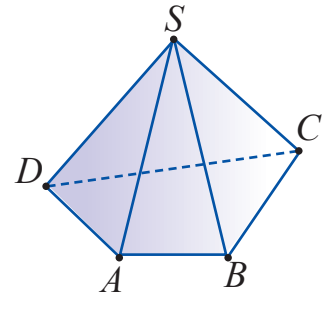
c)



Ответ: 1) *Куб – c; 2) пирамида – a; 3) призма – b.*

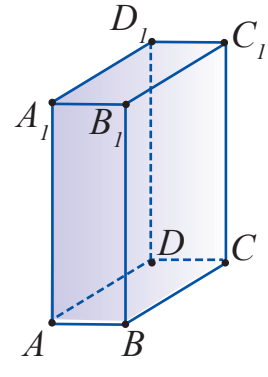
6.4. Сколько вершин, рёбер и граней имеет пирамида на рисунке? Из какого многоугольника состоит основание? А как насчёт сторон?

Вершина пирамиды: $U = 5$, то есть A, B, C, D, S.
Рёбра пирамиды $Q = 8$, то есть $AB, BC, CD, AD, AS, BS, CS, DS$.
Грани пирамиды: $Y = 5$, то есть $ASB, BSC, CSD, DSA, ABCD$.
Основание состоит из четырёхугольника, то есть $ABCD$.

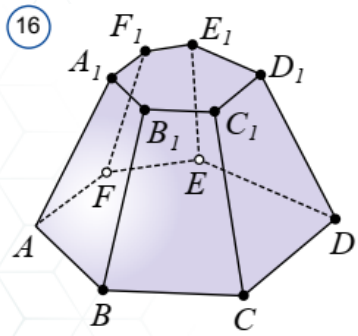


6.5. Сколько вершин, рёбер и граней имеет призма на рисунке? Из каких многоугольников состоят основания? А боковые грани?

Вершина призмы: $U = 8$, то есть $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$.
Рёбра призмы: $Q = 12$, то есть $AB, BC, CD, AD, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1$.
Грани призмы: $Y = 6$, то есть $ABCD, A_1B_1C_1D_1; ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, ADD_1A_1$.
Основание состоит из прямоугольника, то есть $ABCD, A_1B_1C_1D_1$.
Боковые грани состоят из прямоугольников $ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, ADD_1A_1$.



6.6. На рисунке показан многогранник $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ Назовите в нём:



a) стороны, общие с ребром CD;
b) стороны, общие с ребром DD_1;
c) три общие грани с E;
d) три общие грани с C_1;
e) три общих рёбра с A;
f) три общих рёбра с F_1.

Ответ: *a) Грани с общим ребром CD: CDD_1C_1 и $ABCDEF$;*
b) Грани с общим ребром DD_1: CDD_1C_1 и DD_1E_1E;
c) Грани с общей вершиной E: EDD_1E_1, EFF_1E_1, $ABCDEF$;
d) Грани с общей вершиной C_1: C_1CBB_1, C_1D_1DC, $C_1D_1E_1F_1A_1B_1$;
e) Рёбра с общей вершиной A: AB, AF, AA_1.
f) Рёбра с общей вершиной F_1: F_1A_1, F_1E_1, F_1F.

6.7. Может ли у призмы быть: а) 9; б) 16 вершин?

Количество вершин призмы: $U = 2 \cdot n$ (здесь n – количество оснований призмы).
a) $U = 9;\quad 2 \cdot n = U;\quad 2 \cdot n = 9;\quad n = 4{,}5;\quad 4{,}5 \notin N.$
b) $U = 16;\quad 2 \cdot n = U;\quad 2 \cdot n = 16;\quad n = 8.\quad 8 \in N.$
Ответ: a) не может быть; b) может быть.

6.8. Докажите, что число вершин любой призмы чётно.

Так как призма имеет 2 основания, то количество ее вершин равно $2n$. Следовательно, количество вершин может быть чётным.
Ответ: может быть.

6.9. Может ли у призмы быть: а) 14 рёбер; б) 15 рёбер?

Количество рёбер призмы: $Q = 3n$.
a) $Q = 14;\qquad 3n = 14;\qquad n = \frac{14}{3};\qquad \frac{14}{3} \notin N.$
b) $Q - 15;\qquad 3n = 15;\qquad n = 5;\qquad 5 \in N.$
Ответ: a) не может быть; b) может быть.

6.10. Докажите, что количество рёбер любой призмы кратно трём.

Количество рёбер первого основания призмы равно n; количество рёбер во втором основании равно n; количество рёбер боковых граней равно n. Значит, $n + n + n = 3n$.

6.11. Определите вид призмы, если у неё: а) 10 вершин; б) 18 рёбер; в) 18 граней.

Если количество углов в основании призмы равно n: количество вершин призмы: $U = 2n$; количество граней $Y = n + 2$; количество рёбер будет $Q = 3n$.
a) $U = 10;\qquad U = 2n;\qquad 2n = 10;\qquad n = 5;$
b) $Q = 18;\qquad Q = 3n;\qquad 3n = 18;\qquad n = 6;$
c) $Y = 8;\quad Y = n + 2;\quad n + 2 = 8;\quad n = 8 - 2 = 6.$
Ответ: a) пятиугольная призма. b) шестиугольная призма. c) шестиугольная призма.

6.12. Выведите формулу для расчёта а) вершин, б) рёбер; в) граней любой *n*-угольной призмы.

a) Произвольная n-угольная призма имеет n вершин на нижнем основании и n вершин на верхнем основании. Значит, общее количество вершин: $U = n + n = 2n$.
Ответ: $U = 2n$.

b) Произвольная n-угольная призма имеет n рёбер на нижнем основании, n рёбер на верхнем основании и n рёбер на боковых гранях. Значит, общее количество рёбер призмы равно:
$Q = n + n + n = 3n.$
Ответ: $Q = 3n$.

c) Произвольная n-угольная призма имеет n боковых граней и 2 основания. Значит, общее количество граней призмы: $Y = n + 2$.

Ответ: $Y = n + 2$.

Домашнее задание

6.13. Может ли у пирамиды быть: а) 3 вершины; б) 7 вершин?

Если основанием пирамиды является многоугольник с n углами, он имеет n вершин в основании и 1 вершину на вершине пирамиды. $n \geq 3$, всего вершин: $U = n + 1$.

$n=3;\quad U = n + 1 = 3 + 1 = 4;\quad n+1 \geq 4.$

a) $n+1 = 3;\quad 3<4.$ **Ответ:** $\varnothing$.

b) $n+1 = 7;\quad 7>4.$ **Ответ:** может быть.

6.14. Может ли у пирамиды быть: а) 20 рёбер; б) 21 ребро?

Если основание пирамиды n-угольное, то количество рёбер основания равно n, а количество боковых рёбер равно n. Таким образом, количество рёбер пирамиды равно $Q = n + n = 2n,\quad Q = 2n.$

a) $Q = 20;\quad 2n = Q;\quad 2n = 20;\quad n = 10;\quad 10 \in N.$

b) $Q = 21;\quad 2n = Q;\quad 2n = 21;\quad n = 10{,}5;\quad 10{,}5 \notin N.$

Ответ: а) может быть. b) не может быть.

6.15. Докажите, что количество рёбер любой пирамиды чётно.

Если основание произвольной пирамиды n-угольное, то количество рёбер в основании равно n, а количество боковых рёбер равно n. Таким образом, количество рёбер пирамиды равно $Q = n + n = 2n,\quad Q = 2n.$

Ответ: может быть чётно.

6.16. Определите вид пирамиды, если у неё: а) 6 вершин; б) 22 ребра; в) 10 граней.

Если основание пирамиды n-угольное, то будет n боковых граней и 1 основание. Итак, у пирамиды $n + 1$ грань. Количество вершин в пирамиде: $U = n + 1$, количество граней $Y = n + 1$, количество рёбер $Q = 2n$:

a) $U = 6;\quad U = n + 1;\quad n + 1 = 6;\quad n = 6 - 1;\quad n = 5.$

Ответ: пятиугольная пирамида.

b) $Q = 22;\quad Q = 2n;\quad 2n = 22;\quad n = 11.$

Ответ: десятиугольная пирамида.

c) $Y = 10;\quad Y = n + 1;\quad n + 1 = 10;\quad n = 10 - 1;\quad n = 9.$

Ответ: восьмиугольная пирамида.

6.17. Может ли у призмы быть: а) 9 граней; б) 16 граней?

Призма: $U = 2n;\quad Y = n + 2;\quad Q = 3n.$

a) $Y = 9;\quad n + 2 = 9;\quad n = 9 - 2;\quad n = 7;\quad 7 \in N.$

Ответ: может быть.

b) $Y = 16;\quad n + 2 = 16;\quad n = 16-2;\quad n = 14;\quad 14 \in N.$

Ответ: может быть.

УРОК 5. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ. МНОГОГРАННИКИ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.MM.02. Может решать задачи на нахождение площади поверхности призмы, параллелепипеда, куба, пирамиды.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

- знать формулы нахождения площади поверхности призмы, параллелепипеда, куба, пирамиды.

Навыки:

- вычислять площадь поверхности призмы, параллелепипеда, куба, пирамиды.

III. Краткое описание содержания урока:

- формулы нахождения площади поверхности призмы, параллелепипеда, куба, пирамиды.

IV. Оборудование и наглядные пособия:

- модели различных пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Привести примеры на боковую поверхность многогранников.	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме 6
Формирование и закрепление знаний	Площадь поверхности пространственных тел.	Работа по учебнику	Вопросы по теме 7 Практическое упражнение и приложение 6.20-6.21
	Правильная пирамида.	Чертежи и макеты	Вопросы по теме 3 Практическое упражнение и приложение: 6.22
	Боковая поверхность правильной пирамиды.	Работа по учебнику. Чертежи и макеты	Вопросы по теме 8 Практическое упражнение и приложение 6.29
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 6.30
Домашнее задание	1. Вопросы по теме 9 2. Практическое упражнение и приложение 6.31–6.32		

6.20. Выведите формулу для расчёта: а) вершин; б) рёбер; в) граней произвольной n-угольной пирамиды.

Так как основание n-угольной пирамиды представляет собой n-угольный многоугольник, то основание имеет n рёбер и n вершин, а боковые стороны имеют n граней и n рёбер. На вершине есть 1 вершина.

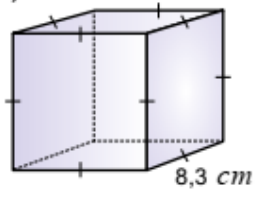
a) Вершины произвольной n-угольной пирамиды: $U = n + 1$.

b) Рёбра произвольной n-угольной пирамиды: $Q = n + n = 2n;$ $Q = 2n.$

c) Грани произвольной n-угольной пирамиды: $Y = 1 + n = n + 1;$ $Y = n + 1.$

6.21. Используя данные рисунка 17, найдите общую площадь поверхности многогранника.

a)

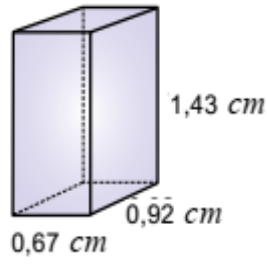


$a = 8{,}3$ cm.

$S_{общая} = 6a^2 = 6 \cdot (8{,}3 \text{ cm})^2 = 6 \cdot 68{,}89 \text{ cm}^2 = 413{,}34 \text{cm}^2.$

Ответ: $S_{общая} = 413{,}34 \text{ cm}^2.$

b)



$a = 0{,}67$ cm; $b = 0{,}92$ cm; $c = 1{,}43$ cm.

$S_{общая} = 2(ab + ac + bc) =$

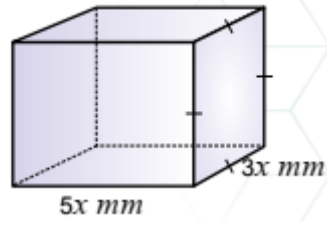
$= 2 \cdot (0{,}67 \cdot 0{,}92 + 0{,}67 \cdot 1{,}43 + 0{,}92 \cdot 1{,}43) =$

$= 2 \cdot (0{,}6164 + 0{,}9581 + 1{,}3156) = 2 \cdot 2{,}8901 =$

$= 5{,}7802 \text{ cm}^2.$

Ответ: $S_{общая} = 5{,}7802 \text{ cm}^2$

c)



$a = 5x$ mm; $b = 3x$ mm; $c = 3x$ mm.

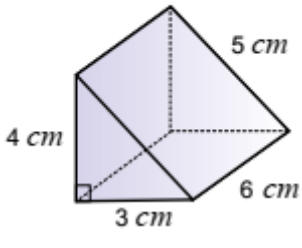
$S_{общая} = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) =$

$= 2 \cdot (5x \cdot 3x + 5x \cdot 3x + 5x \cdot 3x) =$

$= 2 \cdot (15x^2 + 15x^2 + 9x^2) = 2 \cdot 39\, x^2 = 78\, x^2.$

Ответ: $S_{общая} = 78x^2 \text{ mm}^2$

d)



$a = 3$ cm; $b = 4$ cm; $c = 6$ cm; $d = 5$ cm.

$$S_{\Delta} = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{3 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm}}{2} = \frac{12 \text{ cm}^2}{2} = 6 \text{ cm}^2;$$

$S_{ac} = a \cdot c = 3 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} = 18 \text{ cm}^2;$

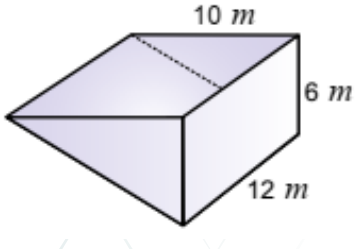
$S_{bc} = b \cdot c = 4 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} = 24 \text{ cm}^2;$

$S_{cd} = c \cdot d = 6 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 30 \text{ cm}^2;$

$S_{общая} = 2 \cdot S_{\Delta} + S_{ac} + S_{bc} + S_{cd} = 2 \cdot 6 \text{cm}^2 + 18 \text{cm}^2 + 24 \text{cm}^2 + 30 \text{cm}^2 = 12 \text{cm}^2 + 72 \text{cm}^2 = 84 \text{cm}^2.$

Ответ: $S_{общая} = 84 \text{ cm}^2.$

e)



$a = 6$ cm; $c = 10$ cm; $d = 12$ cm.

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ cm};$$

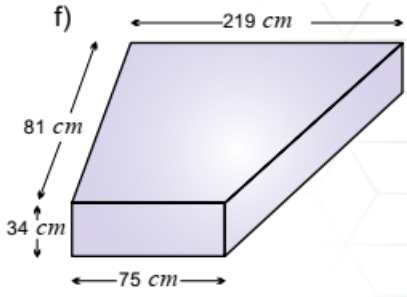
$$S_{ab} = \frac{ab}{2} = \frac{6 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm}}{2} = \frac{48 \text{ cm}^2}{2} = 24 \text{ cm}^2;$$

$S_{ad} = ad = 6 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm} = 72 \text{ cm}^2;$

$S_{bd} = b \cdot d = 8 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm} = 96 \text{ cm}^2;$ $S_{cd} = c \cdot d = 10 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm} = 120 \text{ cm}^2;$

$S_{общая} = 2 \cdot S_{ab} + S_{ad} + S_{bd} + S_{cd} = 2 \cdot 24\ cm^2 + 72\ cm^2 + 96\ cm^2 + 120\ cm^2 =$
$= 48\ cm^2 + 288\ cm^2 = 336\ cm^2$. **Ответ:** $S_{общая} = 336\ cm^2$.

f)



$a = 75\ cm;\ b = 219\ cm;\ c = 81\ cm;\ d = 34\ cm.$

$$e = \sqrt{c^2 + (b-a)^2} = \sqrt{81^2 + (219-75)^2} =$$
$$= \sqrt{81^2 + 144^2} = \sqrt{9^2 \cdot (9^2 + 12^2)} =$$
$$= 9 \cdot \sqrt{81 + 144} = 9 \cdot \sqrt{225} = 9 \cdot 15 = 135\ cm.$$

$$S_{abce} = \frac{a+b}{2} \cdot c = \frac{75+219}{2} \cdot 81 = \frac{294}{2} \cdot 81 = 147 \cdot 81 = 11907\ cm^2;$$

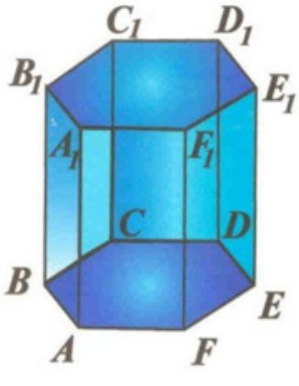
$S_{cd} = c \cdot d = 81 \cdot 34 = 2754\ cm^2$; $S_{bd} = b \cdot d = 219 \cdot 34 = 7446\ cm^2$;

$S_{ed} = e \cdot d = 135 \cdot 34 = 4590\ cm^2$; $S_{ad} = a \cdot d = 75 \cdot 34 = 2550\ cm^2$;

$S_{общая} = 2 \cdot S_{abce} + S_{cd} + S_{bd} + S_{ed} + S_{ad} = 2 \cdot 11907\ cm^2 + 2754\ cm^2 + 7446\ cm^2 + 4590\ cm^2 + 2550\ cm^2 = 23814\ cm^2 + 17340\ cm^2 = 41154\ cm^2$.

Ответ: $S_{общая} = 41154\ cm^2$.

6.22. Докажите, что у прямой призмы все боковые грани – прямоугольники.



$ABCDEF \parallel A_1\ B_1\ C_1\ D_1\ E_1\ F_1$.

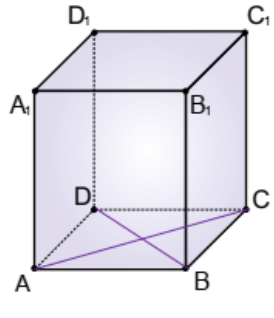
Так как боковые грани прямой призмы перпендикулярны основанию, то они являются прямоугольниками.

ABB_1A_1 – прямоугольник. Доказано.

6.23. Докажите, что площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на боковое ребро.

Доказательство. Боковые грани прямой призмы - прямоугольники. Основаниями этих прямоугольников являются стороны многоугольника, лежащего в основании призмы, а их высота равна длинам их рёбер. Отсюда следует, что боковая поверхность призмы равна $S = a^1\ l + a^2\ l + \cdots + a_n\ l = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \cdot l = pl$, где $a1 \ldots a_n$ – длины рёбер основания, p – периметр основания призмы, l – длина боковых рёбер.

6.24. Основание прямого параллелепипеда – ромб с диагоналями 10 m и 24 m, боковое ребро параллелепипеда 8 m. Найдите полную поверхность параллелепипеда.



$BD = 10\ m;\ AC = 24\ m;\ h = AA_1 = 8\ m.$

$BD^2 + AC^2 = 4a^2;\ 4a^2 = 10^2 + 24^2;$

$4a^2 = 100 + 576;\ 4a^2 = 676;$

$(2a)^2 = 26^2;\ \ 2a = 26;\ \ a = 13\ m.$

$$S_{ABCD} = S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{10 \cdot 24}{2} = 120\ m^2\ ;$$

$S_{боковая} = 4a \cdot h = 4 \cdot 13\ m \cdot 8\ m = 416\ m^2;$

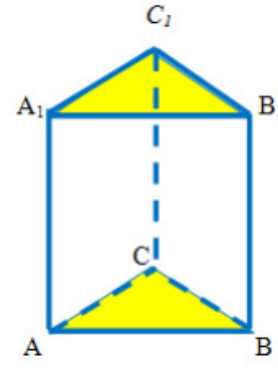
$S_{общая} = 2 \cdot S_{основания} + S_{боковая} = 2 \cdot 120\ m^2 + 416\ m^2 = 240\ m^2 + 416\ m^2 = 656\ m^2.$

Ответ: $S_{общая} = 656\ m^2.$

6.25. Докажите, что все грани прямоугольного параллелепипеда являются прямоугольниками.

Прямоугольный параллелепипед имеет основание - прямоугольник, а так как все боковые рёбра перпендикулярны основанию, то все боковые грани тоже прямоугольники.

6.26. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 6 cm, а боковое ребро – 11 cm. Найдите полную поверхность призмы.



Дано: $a = AB = BC = AC = 6\ cm;$

$h = AA_1 = BB_1 = CC_1 = 11\ cm.$ Найти: $S_{общая} = ?$

$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}\ cm^2;$$

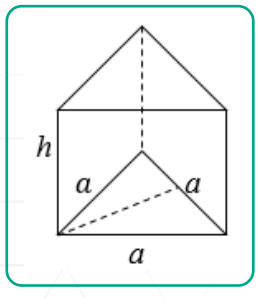
$$S_{общая} = 2 \cdot S_{ABC} = 2 \cdot 9\sqrt{3} = 18\sqrt{3}\ cm^2;$$

$$S_{боковая} = 3 \cdot a \cdot h = 3 \cdot 6 \cdot 11 = 198\ cm^2;$$

$$S_{общая} = S_{основания} + S_{боковая} = 18\sqrt{3} + 198 = 18\left(\sqrt{3} + 11\right)cm^2.$$

Ответ: $S_{общая} = 18\left(\sqrt{3} + 11\right)cm^2.$

6.27. Сторона основания правильной *n*-угольной призмы равна *a*, а боковое ребро равно *h*. Найдите боковую поверхность и полную поверхность призмы, учитывая, что: a) *n* = 3, *a* = 5, *h* = 10; b) *n* = 4, *a* = 10, *h* = 30; c) *n* = 6, *a* = 18, *h* = 32; d) *n* = 5, *a* = 16, *h* = 25.



Решение: a) $n = 3,\ a = 5,\ \ h = 10.$

$S_{боковая} = p \cdot h = n \cdot a \cdot h = 3 \cdot 5 \cdot 10 = 15 \cdot 10 = 150;$

Так как $S_{основания} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1 \cdot \sin\alpha\ ,\ \ n = 3$

Тогда $\alpha = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$

$$h_1 = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{25 - \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{100 - 25}{4}} = \sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2};$$

$$S_{основания} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{25 \cdot \sqrt{3}}{4};$$

$$S_{общая} = S_{боковая} + S_{основания} = 150 + 2 \cdot \frac{25 \cdot \sqrt{3}}{4} = 150 + \frac{25 \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $S_{боковая} = 150;\ S_{общая} = 150 + \frac{25 \cdot \sqrt{3}}{2}.$

Решение: b) $n = 4;\ a = 10;\ h = 30.$

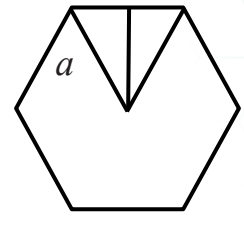
$S_{боковая} = p \cdot h = n \cdot a \cdot h = 4 \cdot 10 \cdot 30 = 40 \cdot 30 = 1200;$

Так как $n = 4\ \ \alpha = \frac{360°}{4} = 90°$ Значит, основанием призмы является квадрат

$S_{основания} = a \cdot a = 10 \cdot 10 = 100$

$S_{общая} = S_{боковая} + 2S_{основания} = 1200 + 2 \cdot 100 = 1200 + 200 = 1400;$

Ответ: $S_{боковая} = 1200;\ \ S_{общая} = 1400.$



Решение: c) $n = 6;\ a = 18;\ h = 32.$

$S_{боковая} = p \cdot h = n \cdot a \cdot h = 6 \cdot 18 \cdot 32 = 108 \cdot 32 = 3456;$

$$h_1 = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{18^2 - \left(\frac{18}{2}\right)^2} = \sqrt{324 - \frac{324}{4}} = \sqrt{243} = 9\sqrt{3}$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} a \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 9\sqrt{3} = 9 \cdot 9\sqrt{3} = 81\sqrt{3};$$

$S_{основания} = n \cdot S_{\Delta} = 6 \cdot 81\sqrt{3} = 486\sqrt{3};$

$S_{основания} = S_{боковая} + 2S_{основания} = 3456 + 2 \cdot 486\sqrt{3} = 3456 + 972\sqrt{3} = 108(32 + 9\sqrt{3}).$

Ответ: $S_{боковая} = 3456;\ S_{основания} = 108(32 + 9\sqrt{3}).$

$$\alpha = \frac{180°}{5} = 36°;\quad tg\,36° = \frac{\frac{a}{2}}{y} = \frac{\frac{16}{2}}{y} = \frac{8}{y};\quad tg\,36° = \frac{8}{y};\quad y = 8 \cdot ctg\,36°;$$

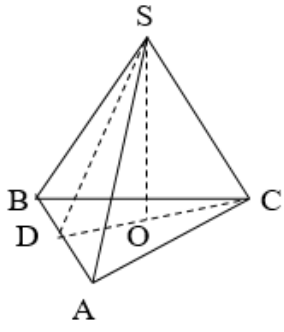
$$S_{основания} = S_5 = n \cdot \frac{ay}{2} = 5 \cdot \frac{16 \cdot 8 \cdot ctg\,36°}{2} = 5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot ctg\,36° = 320 \cdot ctg\,36°;$$

$S_{боковая} = p \cdot h = n \cdot a \cdot h = 5 \cdot 16 \cdot 25 = 80 \cdot 25 = 2000;$

$S_{основания} = S_{боковая} + 2S_{основания} = 2000 + 2 \cdot 320 \cdot ctg\,36° = 2000 + 640 \cdot ctg\,36°.$

Ответ: $S_{боковая} = 2000;\ S_{основания} = 2000 + 640 \cdot ctg\,36°.$

6.28. Апофема правильной треугольной пирамиды равна 15 cm, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, – 12 cm. Найдите: а) боковую грань и основание пирамиды; б) боковую поверхность пирамиды; в) полную поверхность пирамиды.



$SD = 15;\quad SO = 12.$

$a)\ AS = BS = CS = ?;\quad AB = BC = AC = ?$

$OD = \sqrt{SD^2 - SO^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{225 - 144} = 9;$

$AB = 2 \cdot OD \cdot tg\frac{180^\circ}{2} = 2 \cdot 9 \cdot tg60^\circ = 18\sqrt{3};$

$AD = \frac{AB}{2} = \frac{18\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3};$

$AS = \sqrt{SD^2 + AD^2} = \sqrt{15^2 + \left(9\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{225 + 81 \cdot 3} = \sqrt{225 + 243} =$

$= \sqrt{468} = 6\sqrt{13}.$

Ответ: $AS = 6\sqrt{13};\quad AB = 18\sqrt{3}.$

$b)\ \ CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{\left(18\sqrt{3}\right)^2 - \left(9\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{324 \cdot 3 - 81 \cdot 3} =$

$= \sqrt{972 - 243} = \sqrt{729} = 27;$

$S_{основания} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 27 \cdot 18\sqrt{3} = 27 \cdot 9\sqrt{3} = 243\sqrt{3};$

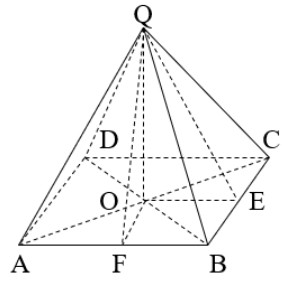
$S_{боковая} = \frac{1}{2} \cdot n \cdot AB \cdot SD = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 18\sqrt{3} \cdot 15 = 45 \cdot 9\sqrt{3} = 405\sqrt{3}.$

Ответ: $S_{боковая} = 405\sqrt{3}$

c) $S_{общая} = S_{боковая} + S_{основания} = 405\sqrt{3} + 243\sqrt{3} = (405 + 243)\sqrt{3} = 648\sqrt{3}.$

Ответ: $S_{общая} = 648\sqrt{3}.$

6.29. Основание пирамиды – параллелограмм со сторонами 10 cm и 8 cm и меньшей диагональю 6 cm. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания, а её длина равна 4 cm. Найдите площадь: а) бокового ребра; б) боковой грани; в) полной поверхности пирамиды.



$a = AD = BC = 8;\quad b = AB = CD = 10;$

$d_1 = BD = 6;\quad h = QO = 4.$

a) $l_1 = QB = QD = ?;\quad l_2 = QA = QC = ?$

b) $S_{боковая} = ?$ c) $S_{основания} = ?$

$a)\ d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2);\quad 6^2 + d_2^2 = 2(8^2 + 10^2);\quad 36 + d_2^2 = 2(64 + 100);$

$36 + d_2^2 = 2 \cdot 164;$ $36 + d_2^2 = 328;$ $d_2^2 = 328 - 36;$ $d_2^2 = 292;$

$36 + d_2^2 = 2 \cdot 164;$ $36 + d_2^2 = 328;$ $d_2^2 = 328\text{-}36;$ $d_2^2 = 292;$

$d_2 = \sqrt{292};$ $d_2 = 2\sqrt{73};$ $d_2 = AC = 2\sqrt{73};$

$$l_1 = \sqrt{h^2 + \left(\frac{d_1}{2}\right)^2} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2} = \sqrt{16 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5;$$

$$l_2 = \sqrt{h^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{2\sqrt{73}}{2}\right)^2} = \sqrt{16 + 73} = \sqrt{89};$$

Ответ: $l_1 = 5;$ $l_2 = \sqrt{89}.$

b) $a = AD = BC = 8;$ $b = AB = CD = 10;$ $d_1 = BD = 6;$ $h = QO = 4.$

$AC = 2\sqrt{73};$ $\angle BOC = \alpha;$ $BO = \frac{d_1}{2} = \frac{6}{2} = 3;$ $CO = \frac{d_2}{2} = \frac{2\sqrt{73}}{2} = \sqrt{73};$

$BC^2 = BO^2 + CO^2 - 2 \cdot BO \cdot CO \cdot \cos\alpha;$ $8^2 = 3^2 + \left(\sqrt{73}\right)^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{73} \cdot \cos\alpha;$

$64 = 9 + 73 - 6\sqrt{73} \cdot \cos\alpha;$ $64 = 82 - 6\sqrt{73} \cdot \cos\alpha;$

$6\sqrt{73} \cdot \cos\alpha = 82 - 64;$ $6\sqrt{73} \cdot \cos\alpha = 18;$ $\sqrt{73} \cdot \cos\alpha = 3;$

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{73}}; \quad \sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{\sqrt{73}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{73}} = \sqrt{\frac{73 - 9}{73}} = \sqrt{\frac{64}{73}} = \frac{8}{\sqrt{73}};$$

$$S_{ABCD} = \frac{BD \cdot AC}{2} \cdot \sin\alpha = \frac{6 \cdot 2\sqrt{73}}{2} \cdot \frac{8}{\sqrt{73}} = 48; \quad a \cdot h_a = S_{ABCD};$$

$$h_a = \frac{S_{ABCD}}{a} = \frac{48}{8} = 6; \quad b \cdot h_b = S_{ABCD}; \quad h_b = \frac{S_{ABCD}}{b} = \frac{48}{10} = 4{,}8;$$

$$f_a = QE = \sqrt{h^2 + BO^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5;$$

$$f_b = QF = \sqrt{h^2 + \left(\frac{h_b}{2}\right)^2} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{4{,}8}{2}\right)^2} = \sqrt{4^2 + (2{,}4)^2} = \sqrt{16 + \frac{144}{25}} =$$

$$= 4\sqrt{1 + \frac{9}{25}} = 4\sqrt{\frac{34}{25}} = \frac{4\sqrt{34}}{5}; \qquad S_{BCQ} = S_{ADQ} = \frac{a \cdot f_a}{2} = \frac{8 \cdot 5}{2} = \frac{40}{2}$$

$$= 20;$$

$$S_{ABQ} = S_{DCQ} = \frac{b \cdot f_b}{2} = \frac{10 \cdot \frac{4\sqrt{34}}{5}}{2} = \frac{2 \cdot 4\sqrt{34}}{2} = 4\sqrt{34};$$

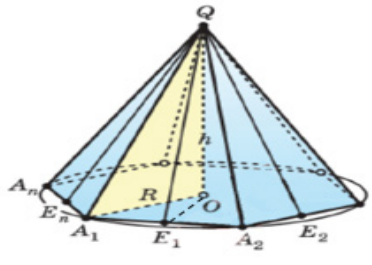
$$S_{\text{боковая}} = 2 \cdot \left(S_{BCQ} + S_{ABQ}\right) = 2 \cdot (20 + 4\sqrt{34} = 40 + 8\sqrt{34}.$$

Ответ: $S_{\text{боковая}} = 40 + 8\sqrt{34}.$ = *40 + 8√34.*

c) $S_{\text{общая}} = S_{\text{основания}} + S_{\text{боковая}} = 48 + 40 + 8\sqrt{34} = 88 + 8\sqrt{34}.$

Ответ: $S_{\text{общая}}$ = *88 + 8√34*

6.30. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 10 cm. Длина отрезка, соединяющего вершину пирамиды с центром основания, равна √69. Найдите: а) боковое ребро и апофему; б) боковую поверхность; в) полную поверхность пирамиды.



Дано: $n = 6;\ a = A_1A_2 = \ldots = A_5A_6 = 10\ cm;$
$h = QO = \sqrt{69}.\ R = OA_1;\ r = OE_1.$
Найти: а) $l = QA_1 = ?,\ f = QE_1 = ?$
b) $S_{\text{боковая}} = ?$, c) $S_{\text{общая}} = ?$

$$l = \sqrt{R^2 + h^2} = \sqrt{10^2 + \left(\sqrt{69}\right)^2} = \sqrt{100 + 69} = \sqrt{169} = 13\ cm.$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{10\ cm \cdot \sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\ cm;$$

$$f = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{\left(5\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{69}\right)^2} = \sqrt{75 + 69} = \sqrt{144} = 12\ cm.$$

Ответ: *l – 13 cm; f – 12 cm.*

b) $S_{\text{боковая}} = \frac{n \cdot a \cdot f}{2} = \frac{6 \cdot 10 \cdot 12}{2} = 3 \cdot 120 = 360\ cm^2;$

Ответ: $S_{\text{боковая}}$ = *360 cm²;*

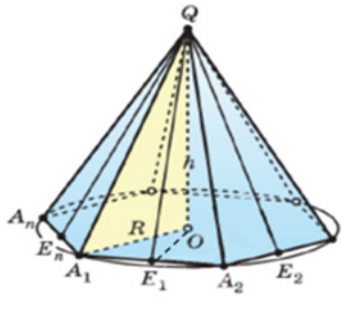
$$S_{\text{боковая}} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\cdot 10^2\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{3\cdot 100\cdot\sqrt{3}}{2} = 3\cdot 50\cdot\sqrt{3} = 150\sqrt{3}\ cm^2;$$

$$S_{\text{общая}} = S_{\text{основания}} + S_{\text{боковая}} = 150\sqrt{3}\ cm^2 + 360\ cm^2 = 30\left(5\sqrt{3}+12\right)\ cm^2.$$

Ответ: $S_{\text{общая}} = 30\left(5\sqrt{3}+12\right)\ cm^2.$

Домашнее задание

6.31. Правильная шестиугольная пирамида имеет площадь боковой поверхности 150 m², апофему 8 m и боковое ребро 10 m. Найдите площадь основания пирамиды.



$n = 6;\ S_{\text{боковая}} = 150m^2;\quad l = QA_1 = 10\ m$

$a = A_1O = OA_2 = A_1A_2;\qquad a = R;\qquad r = \frac{a\sqrt{3}}{2};$

$p = 6a;\qquad \frac{1}{2}\cdot P\cdot f = S_{\text{боковая}};\qquad \frac{1}{2}\cdot 6a\cdot f = 150;$

$3a\cdot f = 150;\qquad a = \frac{150}{3\cdot f};\qquad a = \frac{50}{f};$

$$\begin{cases} R^2 + h^2 = l^2 \\ r^2 + h^2 = f^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h^2 = l^2 - R^2 \\ h^2 = f^2 - r^2 \end{cases} \rightarrow l^2 - R^2 = f^2 - r^2;$$

$$l^2 - a^2 = f^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2; \qquad 10^2 - \left(\frac{50}{f}\right)^2 = f^2 - \left(\frac{\frac{50}{f}\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^2;$$

$$100 - \frac{2500}{f^2} = f^2 - \frac{2500\cdot 3}{4\cdot f^2}; \qquad \frac{100\cdot f^2 - 2500}{f^2} = f^2 - \frac{625\cdot 3}{f^2};$$

$$\frac{100\cdot f^2 - 2500}{f^2} = \frac{f^4 - 1875}{f^2}; \qquad 100\cdot f^2 - 2500 = f^4 - 1875;$$

$$f^4 - 100\cdot f^2 - 1875 + 2500 = 0; \qquad f^4 - 100\cdot f^2 + 625 = 0;$$

$$f^2 = \frac{100 \pm \sqrt{10\,000 - 2\,500}}{2} = 50 \pm 25\sqrt{3}; \qquad f^2 = 50 \pm 25\sqrt{3};$$

$$f = \sqrt{50 \pm 25\sqrt{3}} = \sqrt{25(2 \pm \sqrt{3})} = 5\sqrt{2 \pm \sqrt{3}};$$

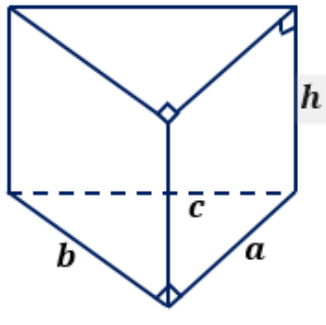
$$a = \frac{50}{f} = \frac{50}{5\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}} = \frac{10}{\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}} = 10 \cdot \sqrt{2 \mp \sqrt{3}};$$

$$S_{основания} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot \left(10 \cdot \sqrt{2 \mp \sqrt{3}}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot 100 \cdot (2 \mp \sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}}{2} =$$

$$= 150(2\sqrt{3} \mp \sqrt{3}).$$

Ответ: $S_{основания} = 150(2\sqrt{3} \mp \sqrt{3})\ м^2$.

6.32. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с гипотенузой 5 cm и катетом 4 cm. Найдите площадь боковой поверхности, если грань, содержащая наименьший катет, – квадрат.



Дано: $c = 5\ cm;\ b = 4\ cm.$

Найти: $S_{общая} = ?$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3\ cm.$$

$$a = h = 3\ cm; \quad S_{основания} = \frac{ab}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{12}{2} = 6\ cm^2;$$

$S_{боковая} = (a+b+c) \cdot h = (3\ cm + 4\ cm + 5\ cm) \cdot 3\ cm = 12\ cm \cdot 3\ cm = 36\ cm^2.$

$S_{общая} = 2 \cdot S_{основания} + S_{боковая} = 2 \cdot 6\ cm^2 + 36\ cm^2 = 12\ cm^2 + 36\ cm^2 = 48\ cm^2.$

Ответ: $S_{общая} = 48\ cm^2.$

УРОК 6. ОПИСАНИЕ И СОЗДАНИЕ МОДЕЛИ МНОГОГРАННИКОВ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.YM.01. Может создавать модели пространственных форм на основе их развёрток и чертить их на плоскости.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

- уметь чертить многогранники на плоскости;

-уметь создавать модели пространственных форм на основе их развёрток.

Навыки:

- создавать модели простых пространственных форм на основе их развёрток и чертить их на плоскости.

III. Краткое описание содержания урока:

- Описание многогранников на плоскости. Развёртка многогранников и создание по ним их моделей.

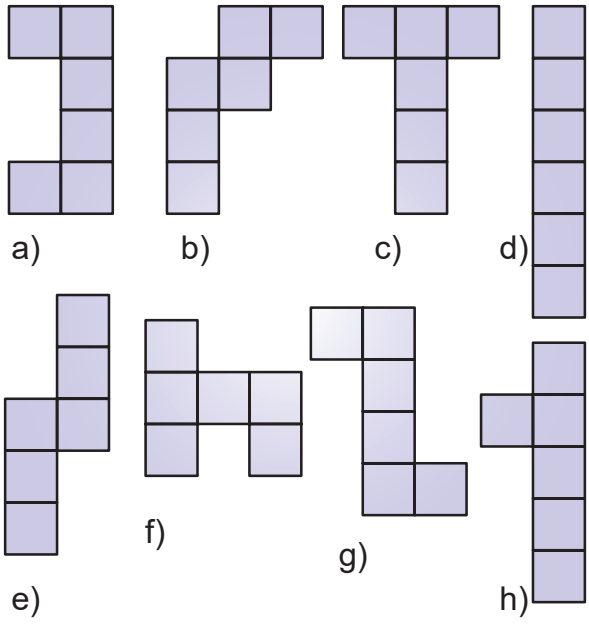
IV. Оборудование и наглядные пособия:

- модели различных плоских и пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Какие развёртки пространственных форм знаете?	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме Что понимаете под разверткой многогранника?
Формирование и закрепление знаний	Развёртка призмы.	Работа по учебнику.	Вопросы по теме: Как создаётся развёртка призмы? Практическое упражнение и приложение 7.1.
	Развёртка пирамиды.	Работа по учебнику	Вопросы по теме: Как создаётся развёртка пирамиды? Практическое упражнение и приложение 7.2.
	Развёртка различных многогранников	Привести примеры, использование макетов	Вопросы по теме: Как создаётся макет многогранника? Практическое упражнение и приложение 7.3-7.4
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	
Домашнее задание	1. Практическое упражнение и приложение 7.5		

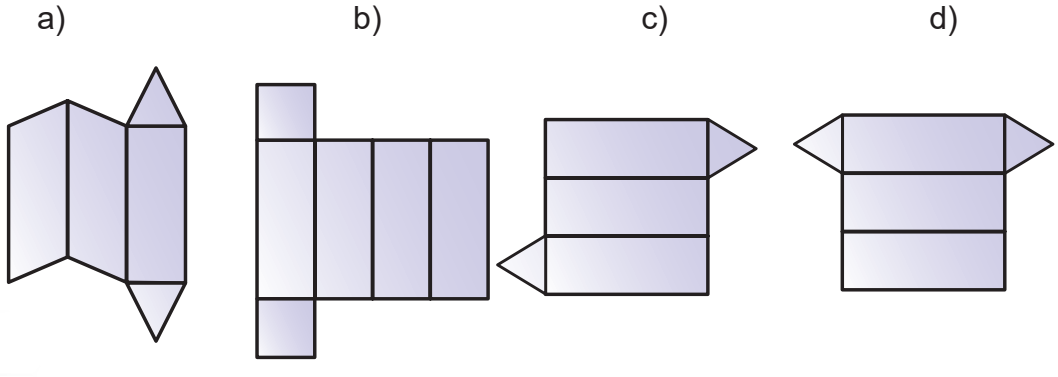
7.4. Какая из развёрток на рисунке является развёрткой куба?



Ответ: c), e), g).

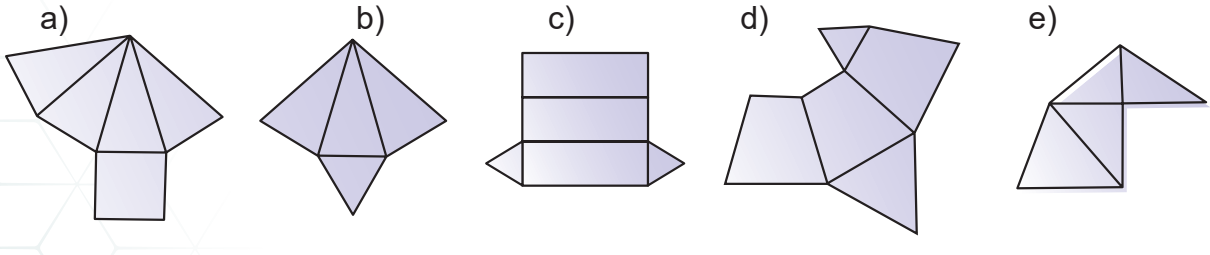
Домашнее задание

7.5. Какие из развёрток на рисунке являются развёртками призм? Определите вид призмы.



Ответ: a), b), d)

7.6. Какие из развёрток на рисунке 8 являются развёртками пирамид? Определите вид пирамид.



Ответ: на рисунке a — правильная пирамида с прямоугольным основанием, на рисунке b — правильная пирамида с равносторонним треугольным основанием.

УРОК 7. ОПИСАНИЕ И СОЗДАНИЕ МОДЕЛИ МНОГОГРАННИКОВ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.YM.01. Может создавать модели пространственных форм на основе их развёрток и чертить их на плоскости.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

- уметь чертить многогранники на плоскости;

-уметь создавать модели пространственных форм на основе их развёрток.

Навыки:

- создавать модели простых пространственных форм на основе их развёрток и чертить их на плоскости.

III. Краткое описание содержания урока:

- Описание многогранников на плоскости. Развёртка многогранников и создание по ним их моделей.

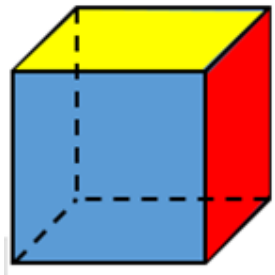
IV. Оборудование и наглядные пособия:

- модели различных плоских и пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Какие развёртки пространственных форм знаете?	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме: Чем отличаются развёртки пирамиды и призмы?
Формирование и закрепление знаний	Развёртка призмы.	Работа по учебнику	Вопросы по теме: Можно ли по развёртке определить вид пирамиды? Практическое упражнение и приложение 7.6
	Развёртка пирамиды.	Работа по учебнику	Вопросы по теме: Можно ли по развёртке определить вид призмы? Практическое упражнение и приложение 7.7
	Развёртка различных многогранников.	Привести примеры, использование макетов.	Вопросы по теме: Сколько видов развёрток есть у куба? Практическое упражнение и приложение 7.8-7.9.
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	
Домашнее задание	1. Практическое упражнение и приложение 7.10-7.11		

7.7. Можно ли раскрасить куб тремя разными цветами так, чтобы его смежные рёбра были окрашены в разные цвета? Сделайте модель куба и покрасьте её в подходящий цвет.

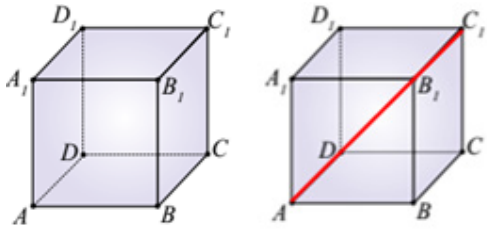


Ответ: Параллельные грани куба нужно закрасить одним цветом, переднюю и заднюю стороны – синим, две стороны красным, а нижнюю и верхнюю – жёлтым.

7.8. Постройте 7 равных треугольников из 9 спичек.



7.9. $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ **Найдите кратчайший путь из точки** A **в точку** C_1 **на поверхности куба.**



$$a = AB = BC = CD = AD = A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1A_1 = AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1;$$

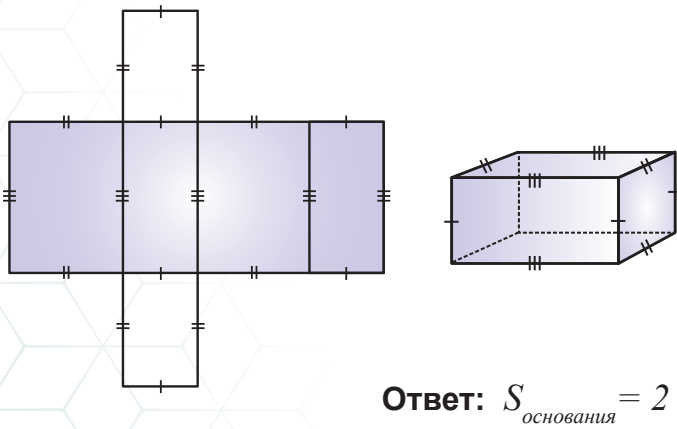
$$AC_1 = \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2 + (CC_1)^2} =$$

$$= \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}.$$

Ответ: $AC_1 = a\sqrt{3}.$

Домашнее задание

7.10. Найдите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, развёртка которого изображена на рисунке.



Ответ: $S_{основания} = 2\,(ab + bc + ac).$

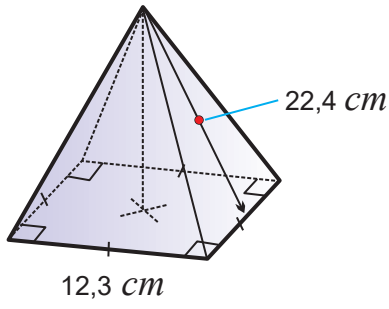
7.11. Найдите и рассчитайте поверхность прямоугольной правильной пирамиды, изображённой на рисунке.

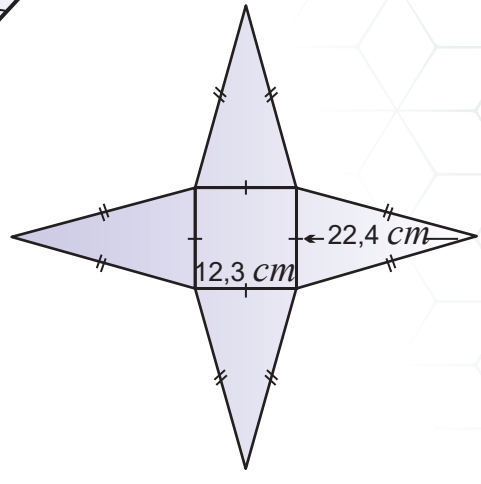
$a = 12{,}3\ см;\ f = 22{,}4\ см.$

$S_{основания} = a^2;\qquad P_{основания} = 4a;$

$S_{боковая} = \frac{1}{2} \cdot P \cdot f;$

$S_{общая} = S_{основания} + S_{боковая};$





$S_{основания} = a^2 = (12{,}3\ см)^2 = 151{,}29\ см^2;\quad P_{основания} = 4a = 4 \cdot 12{,}3\ см = 49{,}2\ см;$

$$S_{боковая} = \frac{1}{2} \cdot P \cdot f = \frac{1}{2} \cdot 49{,}2\ см \cdot 22{,}4\ см = 49{,}2\ см \cdot 11{,}2\ см = 551{,}04\ см^2;$$

$$S_{общая} = S_{основания} = S_{боковая} = 151{,}29\ см^2 + 551{,}04\ см^2 = 702{,}33\ см^2$$

Ответ: $S_{общая} = 702{,}33\ см^2.$

УРОК 8. ПОСТРОЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ СЕЧЕНИЙ МНОГОГРАННИКОВ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.YM.01. Может создавать модели пространственных форм на основе их развёрток и чертить их на плоскости.

M10.GO‘.YM.02.Может изображать многогранники на плоскости.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

- знать понятие о сечении;
- знать методы построения простых сечений.

Навыки:

- создавать модели простых пространственных форм на основе их развёрток и чертить их на плоскости.

III. Краткое описание содержания урока:

- модели и развёртки пространственных геометрических фигур.

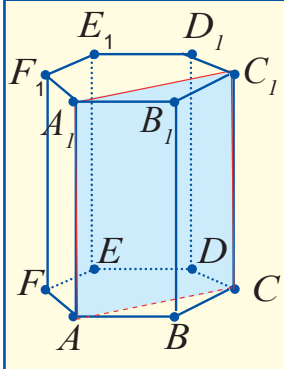
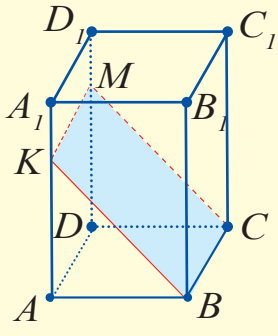
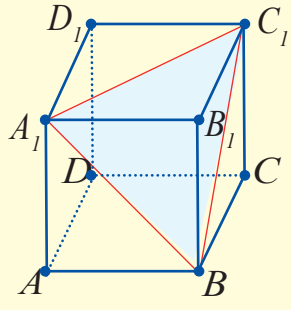
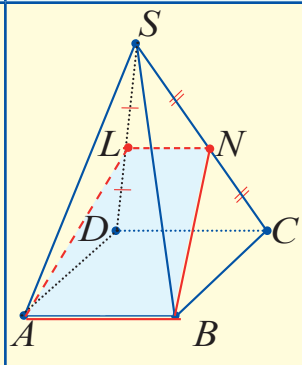
IV. Оборудование и наглядные пособия:

- модели пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Какой формы может быть поперечное сечение куска доски при распиливании по диагонали?	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме: Какой формы может быть поперечное сечение куба, призмы и пирамиды при параллельном разрезе к основанию этих форм?
Формирование и закрепление знаний	Понятие сечения	Работа по учебнику	Вопросы по теме 1. Практическое упражнение и приложение 8.1-8.2.
	Простые сечения многогранников.	Чему равно максимальное количество сторон сечения? Провести практическое занятие	Вопросы по теме:2 Практическое упражнение и приложение: 8.3-8.4
	Метод следа	Работа по учебнику	Вопросы по теме 3 Практическое упражнение и приложение 8.5-8.6
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 8.7
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 8.8-8.10		

8.1. В таблице содержится основная информация 8-й темы. Внимательно изучите её и интерпретируйте.

Простейшие сечения многогранников			
Многоугольная призма	**Прямоугольный параллелепипед**	**Куб**	**Пирамида**
			
ACC_1 – Пересекающая плоскость, проходящая через точки A, C, C_1. ACC_1A_1 – сечение.	CBK – пересекающая плоскость, проходящая через точки K и прямую CB. $CBKM$ – сечение	A_1BC_1 – плоскость, пересекающая прямые BC_1 и BA_1. A_1C_1B – сечение	ABN – секущая плоскость, проходящая через параллельные прямые AB и LN. $ABNL$ – сечение

Многоугольная призма.

Пусть основание n-угольное: 1) количество рёбер $3 \cdot n$; 2) количество граней $n+2$; 3) количество вершин $2 \cdot n$; 4) количество диагоналей $n \cdot (n-3)$; 5) количество диагональных сечений $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$.

На чертеже сечение ACC_1A_1 представляет собой прямоугольник с диагональным поперечным сечением. Стороны AA_1 и CC_1 этого прямоугольника являются боковыми рёбрами призмы, а AC и A_1C_1 – диагоналями основания призмы.

Прямоугольный параллелепипед. На чертеже сечение представляет собой прямоугольник $BCMK$, пересекающий сторону основания BC и грань ADD_1A_1. Потому что $BC \| AD \| KM$;

$$\begin{cases} BC \| KM \\ BC = KM \end{cases}; \quad KB \perp BC \perp MC, KB \| MC.$$

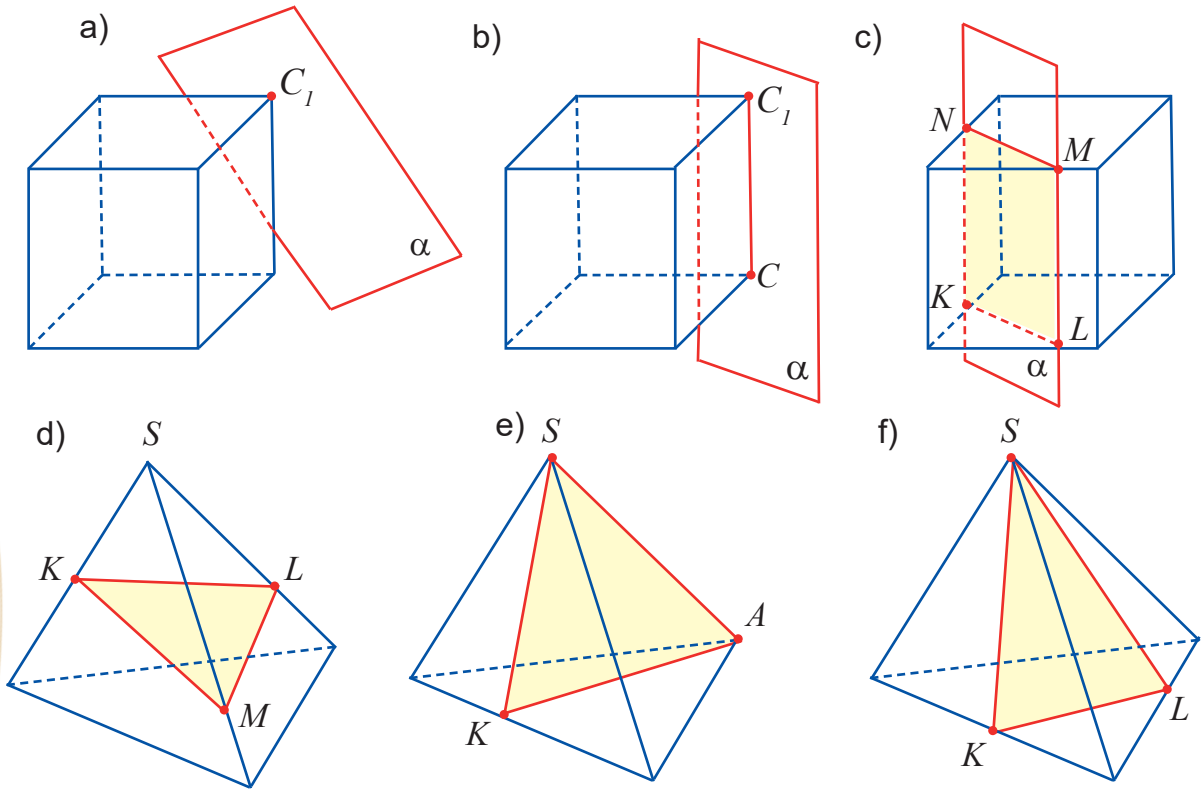
Куб. Сечение куба A_1C_1B – равносторонний треугольник, так как $BA_1 = a\sqrt{2}$; $BC_1 = a\sqrt{2}$; $A_1C_1 = a\sqrt{2}$; $A_1B = BC_1 = A_1C_1 = a\sqrt{2}$.

Пирамида. В пирамиде сечение $ABNL$ представляет собой трапецию

$$\begin{cases} SN = NC \\ SL = LD \end{cases} \rightarrow LN = \frac{DC}{2}; \quad \begin{cases} AB = 2 \cdot LN \\ AL = BN \end{cases}$$

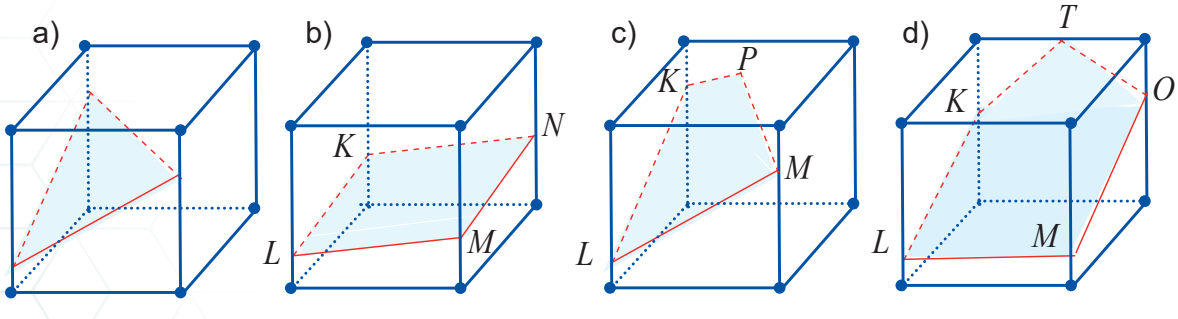
у которой большое основание в 2 раза больше малого основания и представляет собой равнобедренную трапецию.

8.2. Объясните, какое сечение пространственных форм изображено в случаях, представленных на рисунке.



1. На рисунке a изображена точка $C1$, представляющая сечение пространственных форм.
2. На рисунке b изображен отрезок $CC1$, представляющий сечение пространственных форм.
3. На рисунке c изображена плоскость $KLMN$, представляющая сечение пространственных форм.
4. На рисунке d изображён треугольник KLM, представляющий сечение пространственных форм.
5. На рисунке e изображён треугольник SKA, представляющий сечение пространственных форм.
6. На рисунке f изображён треугольник SKL, представляющий сечение пространственных форм.

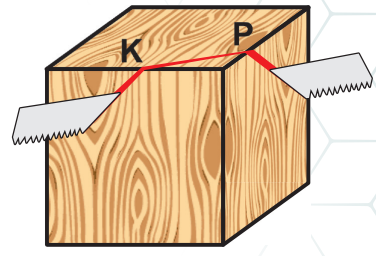
8.3. Какую из следующих ситуаций можно описать на рисунке, когда куб пересекается плоскостью? Какие из них невозможны?



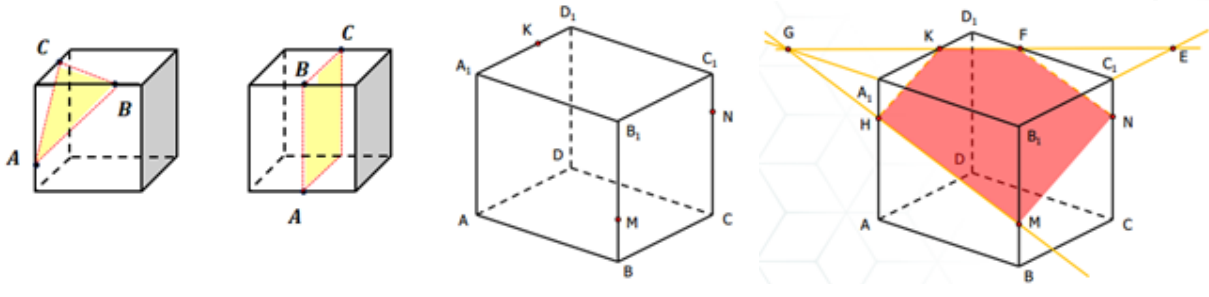
Ответ: Ситуация b возможна. Ситуации на рисунках a, c, d невозможны.

8.4. При распиливании деревянного куба, показанного на рисунке 15, образуется сечение через точки K, P и T. Какова форма полного сечения?

Ответ: форма полного сечения – шестиугольник.

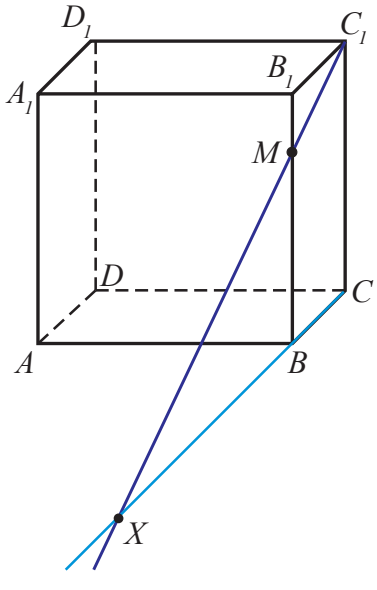


8.5. Нарисуйте куб. На его краях отметьте три точки таким образом, чтобы плоскость, проходящая через эти точки, находилась в поперечном сечении. Пусть они образуют: а) треугольник; б) прямоугольник; в) пятиугольник.



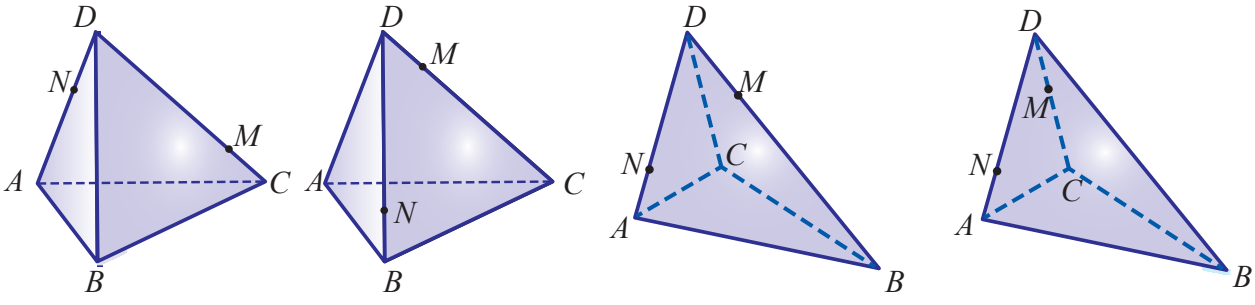
8.6. Выполните построение по следующему алгоритму и объясните процесс построения. Даны куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и $M \in BB_1$ Алгоритм нахождения точки пересечения $ABCD$ куба с прямой C_1M: продолжая пересечения C_1M и BC, обозначим точку их пересечения X.

X – искомая точка.



Если продолжим прямые линии через CB и C_1M, найдём точку X (точку пересечения).

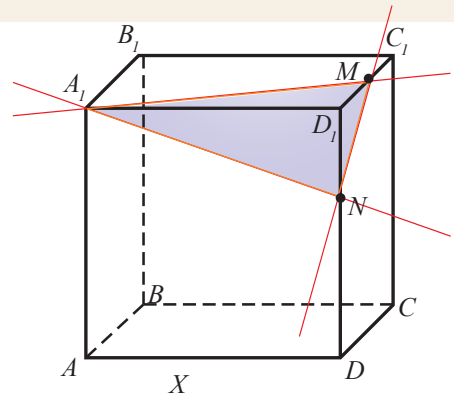
8.7. Точки M и N отмечены на рёбрах тетраэдра $ABCD$, изображённого на рисунке. Определите, на какой прямой лежит точка пересечения прямой MN с плоскостью ABC.



1. Точка пересечения в продолжении NM и AC. **Ответ:** На прямой AC.
2. Точка пересечения в продолжении MN и CB. **Ответ:** На прямой CB.
3. Точка пересечения в продолжении MN и BA. **Ответ:** На прямой BA.
4. Точка пересечения в продолжении MN и CA. **Ответ:** На прямой CA.

Домашнее задание

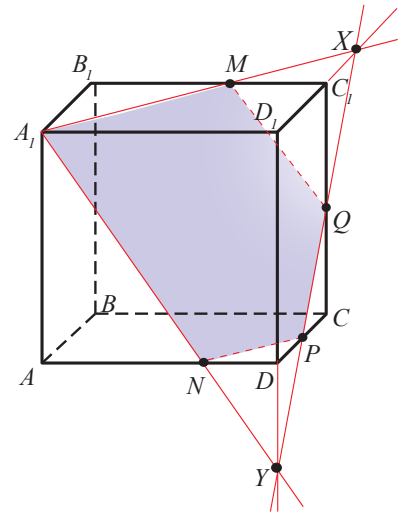
8.8. На основе следующего алгоритма составьте и объясните сечение куба, проходящее через заданные точки. Алгоритм построения сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходящего через точки A_1, $M \in D_1C_1$ и $N \in DD_1$.



1) Соедините точку A_1 с точкой M.
2) Соедините точку A_1 с точкой N.
3) Соедините точку M с точкой N.

Треугольник A_1MN будет искомым сечением.

8.9. На основе следующего алгоритма создайте сечение куба, проходящее через заданные точки, и объясните процесс создания. Алгоритм построения сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходящего через точки M, Q и P.



1. Проведём прямую, проходящую через точки A_1 и M. Точку пересечения прямых A_1M и D_1C_1 обозначим X.
2. Из точек A_1 и N проведём прямую. Точку пересечения прямых A_1N и DD_1 обозначим Y.
3. Точку X соединяем с точкой Y. Точку пересечения прямых XY и CC_1 обозначим Q.
4. Точку пересечения прямых XY и DC обозначим P.
5. Проведём прямую, проходящую через точки M и Q. Проведём прямую, проходящую через точки N и P.
6. Искомым сечением пятиугольника A_1MQPN будет P.

УРОК 9. ПОСТРОЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ СЕЧЕНИЙ МНОГОГРАННИКОВ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.YM.01. Может создавать модели пространственных форм на основе их развёрток и чертить их на плоскости.

M10.GO‘.YM.02.Может изображать многогранники на плоскости.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

- знать понятие о сечении;
- знать методы построения простых сечений.

Навыки:

- создавать модели простых пространственных форм на основе их развёрток и чертить их на плоскости.

III. Краткое описание содержания урока:

- модели и развёртки пространственных геометрических фигур.

IV. Оборудование и наглядные пособия:

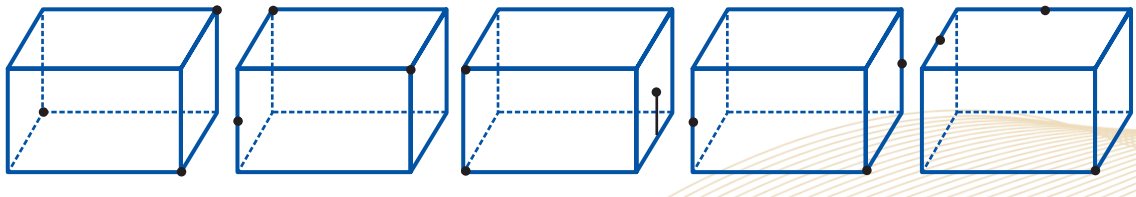
- модели пространственных геометрических фигур.

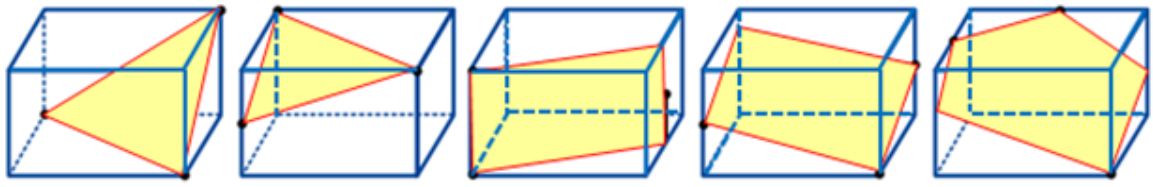
V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Где в жизни можно использовать сечение многогранника?	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме 4
Формирование и закрепление знаний	Построение сечения многогранников.	Работа по учебнику	Вопросы по теме 5 Практическое упражнение и приложение 8.11-8.12
	Метод следа.	Работа по учебнику	Вопросы по теме: 6 Практическое упражнение и приложение 8.13-8.14
	Метод параллельного переноса.	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 8.15-8.16
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 8.17
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 8.18-8.20		

8.10. Сделайте поперечное сечение прямоугольного параллелепипеда, изображённого на рисунке 20, проходящего через три заданные точки.

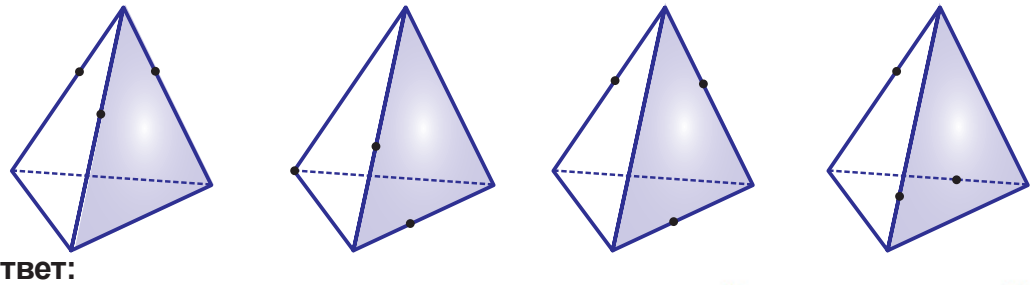
a) b) c) d) e)





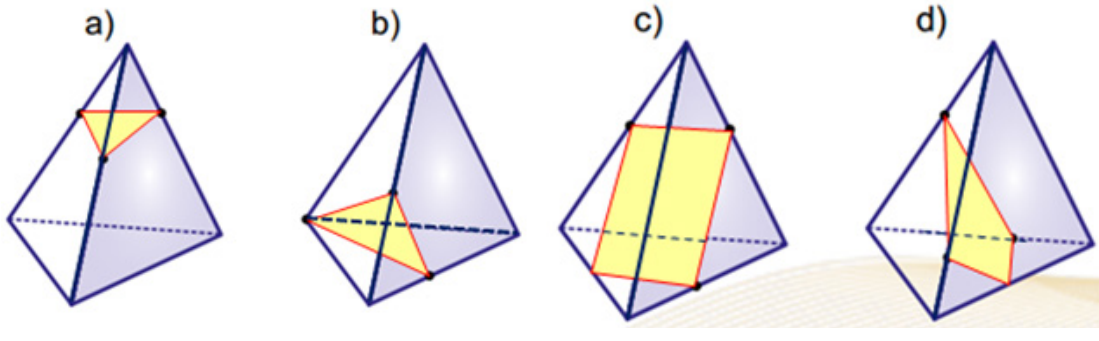
8.11. Сделайте поперечное сечение пирамиды, которое проходит через три заданные точки, изображённые на рисунке.

a) b) c) d)

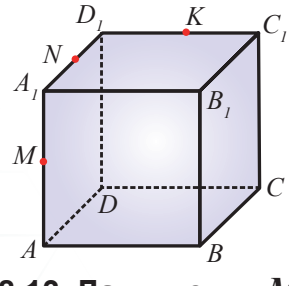


Ответ:

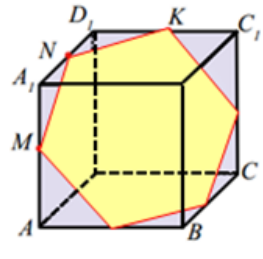
a) b) c) d)



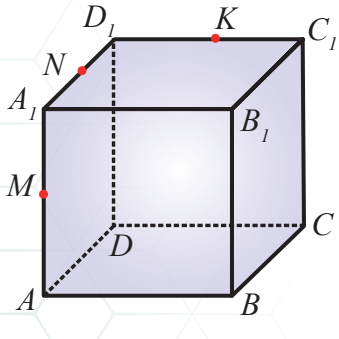
8.12. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки M, N и K методом параллельного переноса.



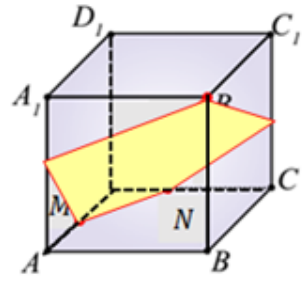
Ответ:



8.13. Даны точки M и N на рёбрах AD и CD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение, которое получится, если вы разрежете куб плоскостью MNB_1.



Ответ:

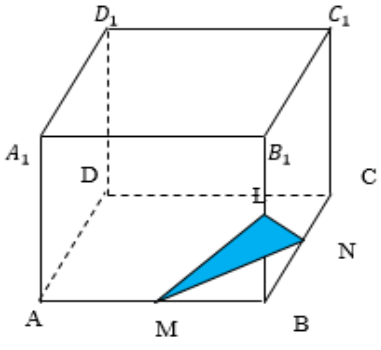


8.14. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и отметьте точки M, N и L, являющиеся серединами рёбер AB, BC и BB_1. Затем:

a) постройте сечение, образованное пересечением куба плоскостью MNL;

b) докажите, что треугольник MNL правильный;

c) найдите грань треугольника MNL, если сторона куба равна 1 cm.



$$b)\ BM = BN = BL = \frac{a}{2}$$

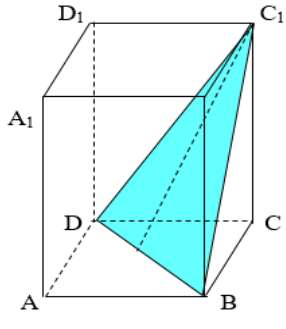
$$ML = LN = MN = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

Значит, MNL – правильный треугольник.

$$c)\ a = 1\ cm;\quad ML = LN = MN = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ cm;$$

$$S_{MNL} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}\ cm^2.$$

8.15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямоугольный параллелепипед со сторонами $AB = 6\ cm$, $AD = 6\ cm$ и $AA_1 = 8cm$. Докажите, что пересечение параллелепипеда BC_1D с плоскостью является равносторонним треугольником, и найдите высоту этого треугольника.



$$AB = 6\ cm,\quad AD = 6\ cm,\quad AA_1 = 8\ cm.\quad h = OC_1 = ?$$

$$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{36 + 36} = 6\sqrt{2}\ cm;$$

$$AA_1 = CC_1 = 8\ cm;\quad AD = BC = 6\ cm;$$

$$BC_1 = \sqrt{BC^2 + {CC_1}^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = 10\ cm;$$

$$AA_1 = DD_1 = 8\ cm;\qquad AB = D_1C_1 = 6\ cm;$$

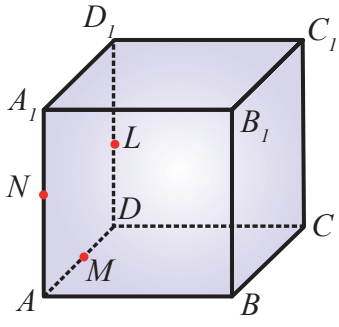
$$DC_1 = \sqrt{{DD_1}^2 + {D_1C_1}^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10\ cm;$$

$BC_1 = DC_1 = 10\ cm$. Значит, пересечение параллелепипеда BC_1D с плоскостью является равносторонним треугольником .

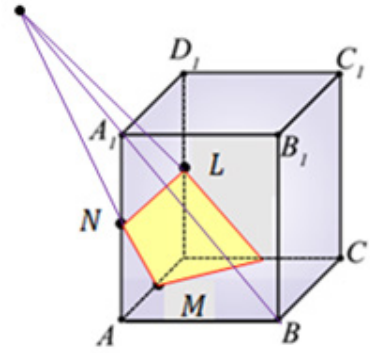
$$h = OC_1 = \sqrt{{DC_1}^2 - \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = \sqrt{10^2 - \left(\frac{6\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{100 - \frac{36\cdot 2}{4}} = \sqrt{82}\ cm.$$

Ответ: $h = \sqrt{82}\ cm$.

8.16. Нарисуйте призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки M, N и L.

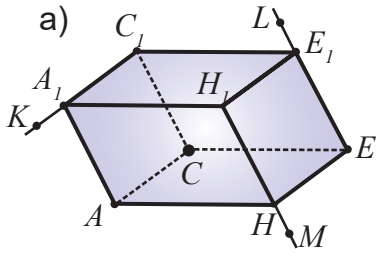


Ответ:

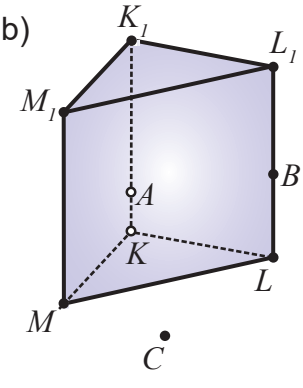


8.17. На основании данных, приведённых на рисунке , постройте соответствующие сечения пространственных фигур, проходящих через точки: a) M, N и L; b) A, B и C; c) A, B и C.

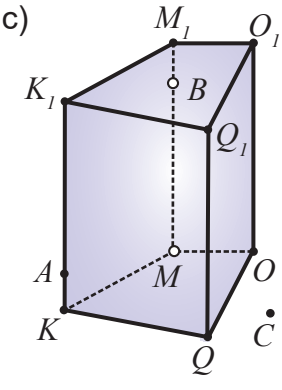
a)



b)

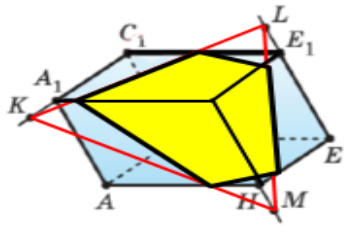


c)

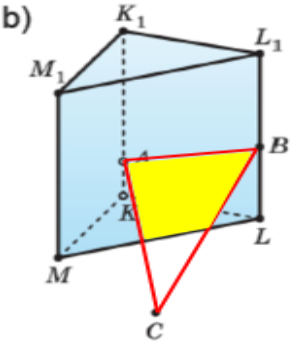


Ответ:

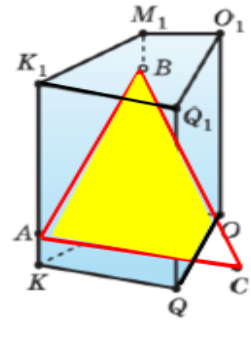
a)



b)

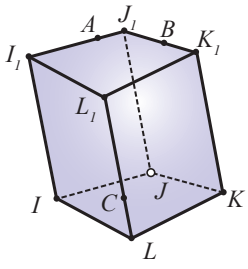


c)

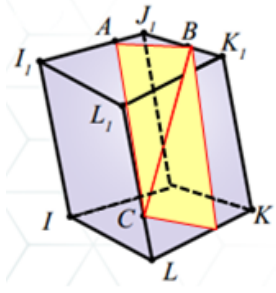


Домашнее задание

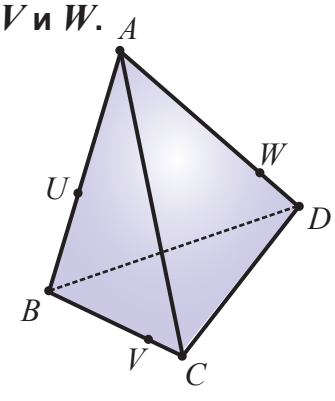
8.18. Возьмём точки A, B и C, лежащие на рёбрах $IJKLI_1J_1K_1L_1$ призмы JI_1, J_1K_1 и LL_1. Постройте сечение призмы плоскостью ABC



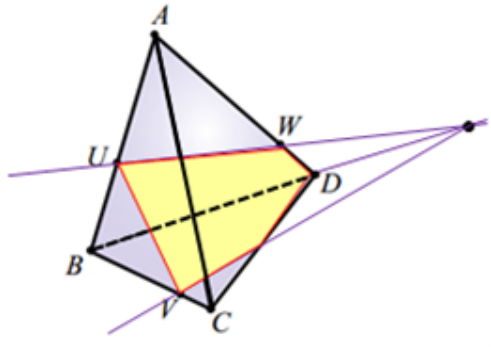
Ответ:



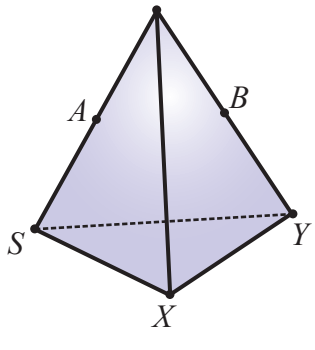
8.19. На основе данных на рисунке постройте сечение пространственной фигуры, полученное при пересечении её плоскостью, проходящей через точки *U*, *V* и *W*.



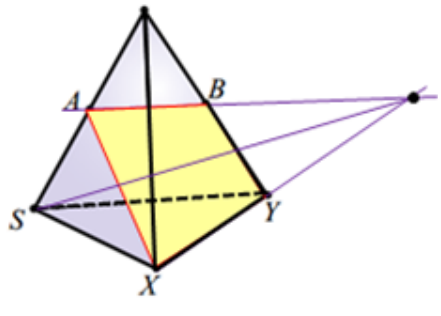
Ответ:



8.20. На основе данных на рисунке постройте сечение пространственной фигуры, полученное при пересечении её плоскостью, проходящей через точки *A*, *B* и *X*.



Ответ:



УРОК 10. ПРАКТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ НА ПОВТОРЕНИЕ ГЛАВЫ

I. Стандарты:

– иметь основные понятия о пространственных телах, многогранниках – призме, параллелепипеде, кубе, пирамиде; описывать их на плоскости, изображать на чертеже и решать задачи, связанные с нахождением площади поверхности.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

- знать основные понятия о многогранниках;
- находить площади поверхности многогранников.

Навыки:

- решать задачи на нахождение площади поверхности многогранников.

III. Краткое описание содержания урока:

- многогранники и площади их поверхностей.

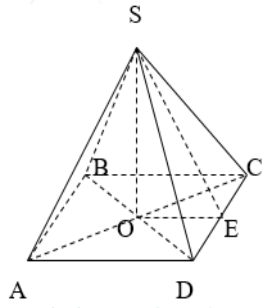
IV. Оборудование и наглядные пособия:

- модели различных пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Чем отличаются плоские и пространственные ломаные?	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме 6 Приведите приме плоских и пространственных ломаных.
Формирование и закрепление знаний	Боковая площадь поверхности пирамиды	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 10.1
	Общая площадь поверхности пирамиды.	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 10.2
	Сечение многогранника.	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 10.3
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 10.4
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 10.5-10.6		

10.2. Сторона основания правильной прямоугольной пирамиды равна 12 cm,а длина сечения, соединяющего вершину пирамиды с центром основания –16 cm. Найдите: а) боковое ребро и апофему; б) площадь боковой поверхности;в) площадь полной поверхности пирамиды.



$AB = BC = CD = AD = 12\ cm;\ \ SO = 16\ cm.$

a) $SA = SB = SC = SD = ?;\ \ SE = ?;$ b) $S_{боковая} = ?$

c) $S_{основания} = ?$

a) $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{12^2 + 12^2} = \sqrt{144 + 144} =$

$= \sqrt{144 \cdot 2} = 12\sqrt{2}\ cm;$ $\qquad BD = 12\sqrt{2}\ cm.$

$$OD = \frac{BD}{2} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}\ cm;$$

$$SD = \sqrt{SO^2 + OD^2} = \sqrt{16^2 + \left(6\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{256 + 72} = \sqrt{328} = 2\sqrt{82}\ cm.$$

Ответ: *SD – 2√82 cm;*

$$b)\quad OE = \frac{AD}{2} = \frac{12}{2} = 6;$$

$$SE = \sqrt{SO^2 + OE^2} = \sqrt{16^2 + 6^2} = \sqrt{256 + 36} = \sqrt{292} = 2\sqrt{73}\ cm;$$

$$S_{CDS} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot SE = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2\sqrt{73} = 12\sqrt{73}\ cm^2;$$

$$S_{боковая} = 4 \cdot S_{CDS} = 4 \cdot 12\sqrt{73} = 48\sqrt{73}\ cm^2;$$

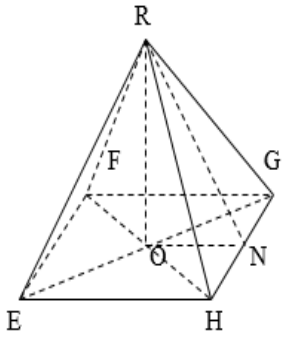
Ответ: *SE – 2√73 cm²;*

c) $S_{основания} = AD^2 = 12^2 = 144\ cm^2;$

$S_{основания} = S_{основания} + S_{боковая} = 144 + 48\sqrt{73}\ cm^2.$

Ответ: $S_{основания} = 144 + 48\sqrt{73}\ cm^2.$

10.3. Основание пирамиды *REFGH* состоит из параллелограмма *EFGH* со сторонами 10 cm и 18 cm и площадью грани 90 cm². Длина участка, соединяющего вершину пирамиды *R* с точкой пересечения диагоналей основания *O*, равна 6 cm и перпендикулярна этим диагоналям. Найдите: а) боковые рёбра; б) площадь боковой поверхности; в) площадь полной поверхности.



$a = EF = GH = 10\ cm;\ b = FG = EH = 18\ cm;$

$S_{EFGH} = 90\ cm^2;\ h = RO = 6\ cm;$

Найти: a) $RE = RF = RG = RH = ?$

b) $S_{боковая} = ?;$ c) $S_{основания} = ?$

$a \cdot b \cdot \sin\alpha = S_{EFGH};\quad 10 \cdot 18 \cdot \sin\alpha = 90;$

$$180 \cdot \sin\alpha = 90; \qquad \sin\alpha = \frac{90}{180}; \qquad \sin\alpha = \frac{1}{2}; \qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$HF = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\alpha} = \sqrt{10^2 + 18^2 - 2 \cdot 10 \cdot 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \sqrt{100 + 324 - 180\sqrt{3}} = \sqrt{424 - 180\sqrt{3}} = 2\sqrt{106 - 45\sqrt{3}}\ cm;$$

$$EG = HF = \sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\alpha} = \sqrt{10^2 + 18^2 + 2 \cdot 10 \cdot 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$a)\ \ RH = HF = \sqrt{(HO)^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{HF}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{106 - 45\sqrt{3}}}{2}\right)^2 + 6^2} =$$

$$= \sqrt{106 - 45\sqrt{3} + 36} = \sqrt{142 - 45\sqrt{3}}\ cm\,;$$

$$RE = RG = \sqrt{(EG)^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{EG}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{106 + 45\sqrt{3}}}{2}\right)^2 + 6^2} =$$

$$= \sqrt{106 + 45\sqrt{3} + 36} = \sqrt{142 + 45\sqrt{3}}\ cm;$$

Ответ: $RH = \sqrt{142 - 45\sqrt{3}}\ cm\,;\quad RE = \sqrt{142 + 45\sqrt{3}}\ cm\,.$

$$b)\ \ S_{asos} = a \cdot b \cdot \sin\alpha = 10 \cdot 18 \cdot \frac{1}{2} = \frac{180}{2} = 90\ cm^2;\qquad a \cdot h_a = S_{asos}\,;$$

$$h_a = \frac{S_{asos}}{a} = \frac{90}{10} = 9\ cm;\qquad h_b = \frac{S_{asos}}{b} = \frac{90}{18} = 5\ cm;$$

$$f_a = \sqrt{h^2 + \left(\frac{h_a}{2}\right)^2} = \sqrt{6^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{36 + \frac{81}{4}} = 3\sqrt{4 + \frac{9}{4}} = 3\sqrt{\frac{16 + 9}{4}} =$$

$$= 3\sqrt{\frac{25}{4}} = 3 \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5\ cm;$$

$$f_b = \sqrt{h^2 + \left(\frac{h_b}{2}\right)^2} = \sqrt{6^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{36 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{144 + 25}{4}} = \sqrt{\frac{169}{4}} =$$

$$= \frac{13}{2} = 6{,}5\ cm;$$

$$S_{\text{боковая}} = 2\left(\frac{a \cdot f_a}{2} + \frac{b \cdot f_b}{2}\right) = 2\left(\frac{a \cdot f_a + b \cdot f_b}{2}\right) = a \cdot f_a + b \cdot f_b =$$

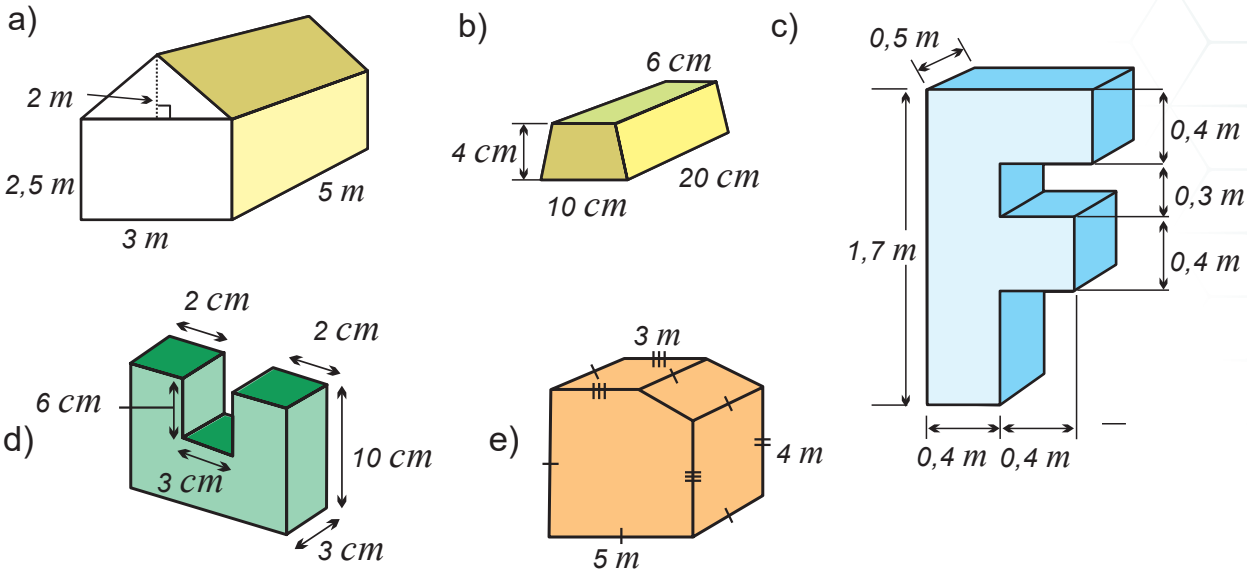
$$= 10 \cdot 7{,}5 + 18 \cdot 6{,}5 = 75 + 117 = 192\ см^2.$$

Ответ: $S_{\text{боковая}} - 192\ см^2$.

c) $S_{\text{общая}} = S_{\text{основания}} = S_{\text{боковая}} = 90\ см^2 + 192\ см^2 = 282\ см^2$.

Ответ: $S_{\text{основания}} = 282\ см^2$.

10.4. Найдите общую площадь поверхности предметов, изображённых на рисунке 2.



a) $\boldsymbol{h_1 = 2\ m;\ \ h_2 = 2{,}5\ m;\ \ a = 3\ m;\ \ b = 5\ m.}$ $S_{\text{общая}} = ?$

$$a_1 = \frac{a}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5\ m;$$

$$c = \sqrt{(a_1)^2 + (h_1)^2} = \sqrt{(1{,}5)^2 + 2^2} = \sqrt{2{,}25 + 4} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5\ m;$$

$$S_1 = S_2 = \frac{a_1 \cdot h_1}{2} = \frac{1{,}5\ m \cdot 2\ m}{2} = 1{,}5\ m^2; \quad S_2 = S_3 = a \cdot h_1 = 3 \cdot 2{,}5 = 7{,}5\ m^2;$$

$$S_3 = S_4 = h_2 \cdot b = 2{,}5 \cdot 5 = 12{,}5\ m^2; \qquad S_5 = S_6 = c \cdot b = 2{,}5 \cdot 5 = 12{,}5\ m^2;$$

$$S_{\text{общая}} = 2(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) = 2 \cdot (1{,}5 + 7{,}5 + 12{,}5 + 12{,}5) = 2 \cdot 34 = 68\ m^2.$$

Ответ: $S_{\text{основания}} = 68\ см^2$.

b) $\boldsymbol{a = 10\ cm;\ \ b = 6\ cm;\ \ h = 4\ cm;\ \ c = 20\ cm;}$ $S_{\text{общая}} = ?$

$$S_1 = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{10+6}{2} \cdot 4 = \frac{16}{2} \cdot 4 = 8 \cdot 4 = 32\ cm^2;$$

$$l = \sqrt{(a-b)^2 + h^2} = \sqrt{(10-6)^2 + 4^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}\ cm;$$

$$S_2 = c \cdot l = 20\ cm \cdot 4\sqrt{2}\ cm = 80\sqrt{2}\ cm^2;\ \ S_3 = a \cdot c = 10 \cdot 20 = 200\ cm^2;$$

$$S_4 = b \cdot c = 6\ cm \cdot 20\ cm = 120\ cm^2;$$

$$S_{общая} = 2S_1 + 2S_2 + S_3 + S_4 = 2 \cdot 32 + 2 \cdot 80\sqrt{2} + 200 + 120 =$$

$$= 64 + 160\sqrt{2} + 320 = \left(384 + 160\sqrt{2}\right) cm^2.$$

Ответ: $S_{основания} - (384 + 160\sqrt{2})cm^2$.

c) $a = 1{,}7\ m$; $a_1 = a_3 = 0{,}4\ m$; $a_2 = 0{,}3\ m$;
$b_1 = b_2 = 0{,}4\ m$; $b_3 = 0{,}3\ m$; $c = 0{,}5\ m$. $S_{общая} = ?$

$a_4 = a-(2a_1+a_2) = 1{,}7-(2 \cdot 0{,}4+0{,}3) = 1{,}7-(0{,}8+0{,}3) = 1{,}7-1{,}1 = 0{,}6\ m;$

$b = 2b_1+b_2 = 2 \cdot 0{,}4+0{,}3 = 0{,}8+0{,}3 = 1{,}1\ m;$

Боковые грани: $S_1 = S_2 = a \cdot c = 1{,}7\ m \cdot 0{,}5\ m = 0{,}85\ m^2;$

Передние и задние грани: $S_3 = S_4 = a \cdot b_1 + a_3 \cdot b_2 + a_1 \cdot (b_2 + b_3) =$
$= 1{,}7 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot (0{,}4 + 0{,}1) = 0{,}68 + 0{,}16 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 =$
$= 0{,}84 + 0{,}2 = 1{,}04\ m^2;$

Основания: $S_5 = b \cdot c + 2 \cdot b_2 \cdot c + b_1 \cdot c = (b + 2 \cdot b_2 + b_1) \cdot c =$
$= (1{,}1 + 2 \cdot 0{,}4 + 0{,}4) \cdot 0{,}5 = (1{,}1 + 0{,}8 + 0{,}4) \cdot 0{,}5 = 2{,}3 \cdot 0{,}5 = 1{,}15\ m^2;$

$S_{общая} = 2S_1 + 2S_3 + S_5 = 2 \cdot 0{,}85 + 2 \cdot 1{,}04 + 1{,}15 = 1{,}7 + 2{,}08 + 1{,}15 = 4{,}93\ m^2.$

Ответ: $S_{общая} = 4{,}93\ m^2.$

d) Дано: $a = 5\ m$; $b = 5\ m$; $c = 5\ m$; $a_1 = 3\ m$; $b_1 = 4\ m$.
Найти: $S_{общая} = ?$

$$d = \sqrt{(a-a_1)^2 + (b-b_1)^2} = \sqrt{(5-3)^2 + (5-4)^2} =$$

$$= \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5};$$

$$S_1 = S_2 = \frac{a+a_1}{2} \cdot b = \frac{5+3}{2} \cdot 5 = \frac{8}{2} \cdot 5 = 4 \cdot 5 = 20\ m^2;$$

$$S_3 = S_4 = a \cdot c = 5\ m \cdot 5\ m = 25\ m^2;$$

$$S_5 = c \cdot b_1 = 5\ m \cdot 4\ m = 20\ m^2;$$

$$S_6 = a_1 \cdot c = 3\ m \cdot 5\ m = 15\ m^2; \qquad S_7 = c \cdot d = 5\ m \cdot \sqrt{5}\ m = 5\sqrt{5}\ m^2;$$

$$S_{общая} = 2 \cdot S_1 + 2 \cdot S_3 + S_5 + S_6 + S_7 = \left(2 \cdot 20 + 2 \cdot 25 + 20 + 15 + 5\sqrt{5}\right)m^2 =$$

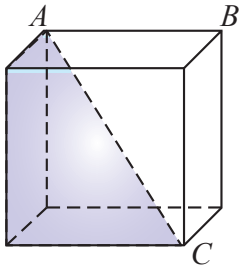
$= (40 + 50 + 35 + 5\sqrt{5})m^2 = (125 + 5\sqrt{5})m^2 = 5(25 + \sqrt{5})\ m^2.$

Ответ: $S_{основания} - 5(25 + \sqrt{5})m^2.$

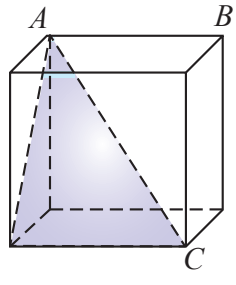
Домашнее задание

10.5. Какая из ситуаций, описанных на рисунке, может возникнуть при разрезании куба плоскостью? Какие из них невозможны?

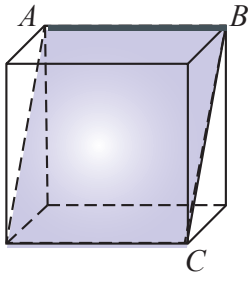
a)



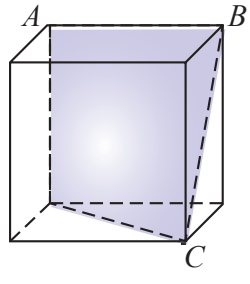
b)



c)



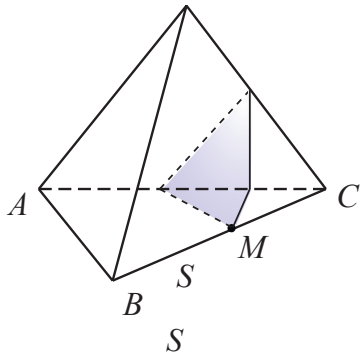
d)



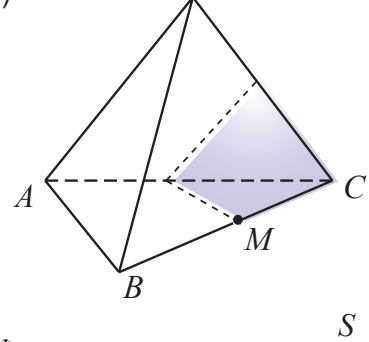
Ответ: *a) не может быть; b) может быть; c) может быть; d) может быть.*

10.6. На каком рисунке изображено сечение, проходящее через точку M и параллельное углу SAB тетраэдра?

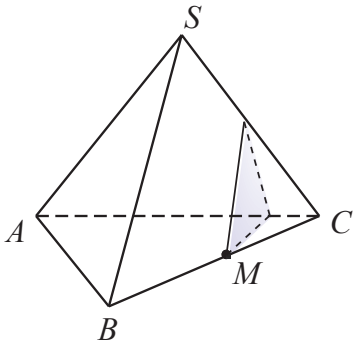
a)



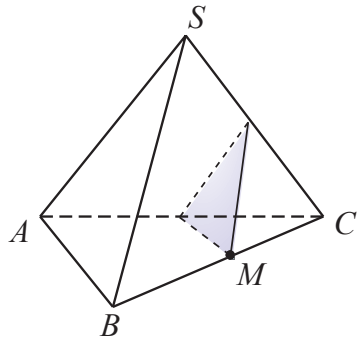
b)



c)



d)



Ответ: a) нет; b) нет; c) нет; d) да.

УРОК 11. ПРАКТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ НА ПОВТОРЕНИЕ ГЛАВЫ

I. Стандарты:

– иметь основные понятия о пространственных телах, многогранниках – призме, параллелепипеде, кубе, пирамиде; описывать их на плоскости, изображать на чертеже и решать задачи, связанные с нахождением площади поверхности.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

- знать основные понятия о многогранниках;
- находить площади поверхности многогранников.

Навыки:

- решать задачи на нахождение площади поверхности многогранников.

III. Краткое описание содержания урока:

- многогранники и площади их поверхностей.

IV. Оборудование и наглядные пособия:

- модели различных пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

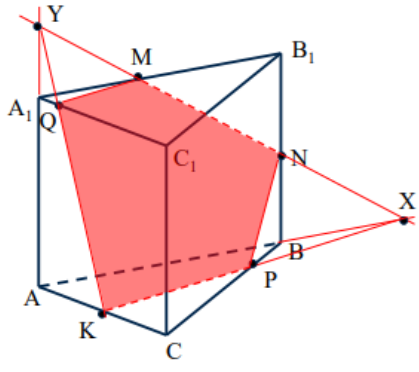
Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Чем отличаются плоские и пространственные ломаные?	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме: Приведите примеры плоских и пространственных ломаных.
Формирование и закрепление знаний	Боковая площадь поверхности пирамиды. Общая площадь поверхности пирамиды	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 10.7
	Сечение многогранника	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 10.8
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 10.9
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 1-2		

10.7. На основе следующего алгоритма постройте сечение призмы, проходящее через заданные точки, и объясните процесс его построения. Алгоритм построения сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$, проходящего через точки M, N, P и Q –искомое.

1) $M \longleftrightarrow N,\ MN \cap AB = X;$ 2) $X \longleftrightarrow K,\ XK \cap BC = P;$ 3) $MN \cap AA_1 = Y$

4) $Y \longleftrightarrow K,\ YK \cap A_1C_1 = Q;$ 5) $P \longleftrightarrow N,\ Q \longleftrightarrow M;$

6. $MNKPQ$ – искомое сечение.

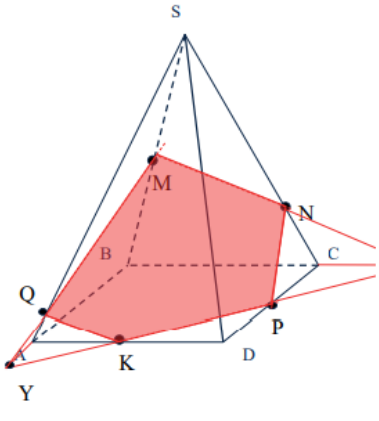


Здесь отметка $M\ N$ означает, что мы проводим прямую, проходящую через точки – M и N, а отметка $MN \cap AB = X$ означает, что мы отмечаем точку пересечения прямых MN и AB с X.

10.8. На основе следующего алгоритма создайте сечение куба, проходящее через заданные точки, и объясните процесс создания. Алгоритм построения сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ по точкам: $M \in A_1B_1$, $N \in B_1C_1$ и $K \in CC_1$.

1) $M \longleftrightarrow N;$
2) $MN \cap D_1C_1 = X;$
3) $N \longleftrightarrow K,\ X \longleftrightarrow K;$
4) $XK \cap DC = P;$
5) $KP \cap DD_1 = Y;$
6) $MN \cap A1D1 = Z;$
7) $Y \longleftrightarrow Z;$
8) $YZ \cap AD = Q;$
9) $YZ \cap AA_1 = R;$
10) $Q \longleftrightarrow P,\ R \longleftrightarrow M;$
11) $MNKPQR$ искомое сечение.

10.9. На основе следующего алгоритма составьте сечение пирамиды, проходящее через заданные точки, и объясните процесс построения. Алгоритм построения сечения пирамиды $SABCD$, проходящего через точки $M \in SB$, $N \in SC$ и $K \in AD$:

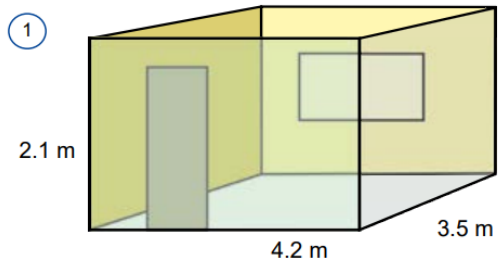


1) $M \longleftrightarrow N;$
2) $MN \cap BC = X;$
3) $X \longleftrightarrow K;$
4) $XK \cap DC = P;$
5) $XK \cap AB = Y;$
6) $Y \longleftrightarrow M;$
7) $YM \cap SA = Q;$
8) $P \longleftrightarrow N,\ K \longleftrightarrow Q;$
9) $MNPKQ$ искомое сечение.

Домашнее задание

2. Комната, показанная на рисунке , нуждается в ремонте. В ней есть дверь размерами 0,8 m и 2,2 m и окно размерами 183 cm и 91 cm. Обе стороны двери должны быть окрашены. В таблице указаны цены двух видов красок. Используйте эту информацию, чтобы рассчитать, сколько вам нужно краски для недорогого ремонта.

Тип краски	Объём	Площадь покраски	Стоимость (в сумах)
Для стен	4 l	16 m^2	32450
	2 l	8 m^2	20800
Для двери	2 l	10 m^2	23600
		5 m^2	15400



1) $a = 4{,}2\ m;\ b = 3{,}5\ m;\ c = 2{,}1\ m.$

$S_{боковая} = 2\,(ac+bc) = 2c(a+b) = 2\cdot 2{,}1\cdot (4{,}2 + 3{,}5) = 4{,}2\cdot 7{,}7 = 32{,}34\ m^2;$

2) $a = 0{,}8\ m;\ b = 2{,}2\ m.$

$S_{двери} = a\cdot b = 0{,}8\ m\cdot 2{,}2\ m = 1{,}76\ m^2;$

3) $a = 183\ cm = 1{,}83\ m;\ \ b = 91\ cm = 0{,}91\ m;$

$S_{окна} = a\cdot b = 1{,}83\ m\cdot 0{,}91\ m = 1{,}6653\ m^2;$

$S_{стены} = S_{боковая} - S_{двери} - S_{окна} = 32{,}34\ m^2 - 1{,}76\ m^2 - 1{,}6653\ m^2 = 28{,}9147\ m^2;$

$S_{внутренней\ и\ наружной\ стены} = 2\cdot S_{стены} = 2\cdot 28{,}9147\ m^2 = 57{,}8294\ m^2;$

Краски для стены:

4 литровых: $n_1 = \dfrac{S_{внутренней\ и\ наружной\ стены}}{S_{стены}} = \dfrac{57{,}8294\ m^2}{16\ m^2} = 3{,}6143375 \approx 4;$

$m_1 = n_2 \cdot k_1 = 4 \cdot 32450\ сум = 129800\ сум;$

2 литровых: $n_2 = \dfrac{S_{внутренней\ и\ наружной\ стены}}{S_{стены}} = \dfrac{57{,}8294\ m^2}{8\ m^2} = 7{,}228675 \approx 8;$

$m_2 = n_2 \cdot k_2 = 8 \cdot 20800 \text{ сум} = 166400 \text{ сум};$

Краски для двери:

2 литровых: $n_1 = \dfrac{S_{двери}}{S_{покраски}} = \dfrac{1{,}76 \text{ м}^2}{10 \text{ м}^2} = 0{,}176 \approx 1;$

$m_3 = n_3 \cdot k_3 = 1 \cdot 23600 \text{ сум} = 23600 \text{ сум};$

1 литровых: $n_1 = \dfrac{S_{двери}}{S_{покраски}} = \dfrac{1{,}76 \text{ м}^2}{5 \text{ м}^2} = 0{,}352 \approx 1;$

$m_4 = n_4 \cdot k_4 = 1 \cdot 15400 \text{ сум} = 15400 \text{ сумов};$

Для недорогого ремонта $m_1 = n_4 = 129800 \text{ сум} + 15400 \text{ сум} = 145200 \text{ сумов}.$

Ответ: 145200 сумов.

Глава III. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

УРОК 1. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.YM.03. может представлять параллельные прямые в пространстве.

– M10.GO‘.MM.04. знает свойства параллельных прямых и может использовать их при решении практических задач.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

- знать свойства параллельных прямых;

Навыки:

- может использовать свойства параллельных прямых при решении практических задач.

III. Краткое описание содержания урока:

- свойства параллельных прямых.

IV. Оборудование и наглядные пособия:

- модели различных пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

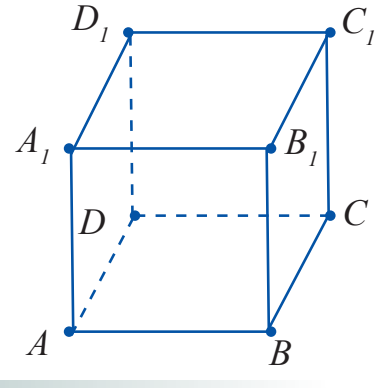
Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Что такое параллельность?	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме: Приведите примеры параллельности.
Формирование и закрепление знаний	Параллельные прямые в пространстве.	Работа по учебнику	Вопросы по теме 1 Практическое упражнение и приложение 11.1
	Признаки параллельности.	Работа по учебнику	Вопросы по теме 2 Практическое упражнение и приложение 11.2-11.3
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 11.4-11.5
Домашнее задание	1. Вопросы по теме 3 2. Практическое упражнение и приложение 11.6–11.8		

11.3. Определите на рисунке парные параллельные рёбра на: a) параллелепипеде a) $ABCDA_1B_1C_1D_1$; b) призме $ABCA_1B_1C_1$.

Парные параллельные рёбра на $ABCDA_1B_1C_1D_1$:

1) $AB \parallel DC$; 2) $AB \parallel A_1B_1$; 3) $AB \parallel D_1C_1$;

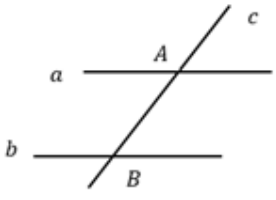
4) $DC \parallel D_1C_1$; 5) $DC \parallel A_1B_1$; 6) $D_1C_1 \parallel A_1B_1$;



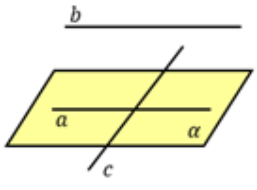
7) $AA_1 \parallel DD_1$; 8) $AA_1 \parallel CC_1$; 9) $AA_1 \parallel BB_1$;

10) $BB_1 \parallel CC_1$; 11) $BB_1 \parallel DD_1$; 12) $CC_1 \parallel DD_1$.

11.5. Известно, что если прямая пересекает одну из параллельных прямых на плоскости, то она пересекает и другую. Уместно ли это свойство в пространстве?



На плоскости $\begin{cases} a \parallel b \\ a \nparallel c \end{cases} \rightarrow \quad b \nparallel c$.



В пространстве $a \parallel b, \quad c \div b.$

Ответ: неуместно.

Домашнее задание

11.6. Прямые a и b параллельны прямой c. Как можно расположить прямые a и b между собой?

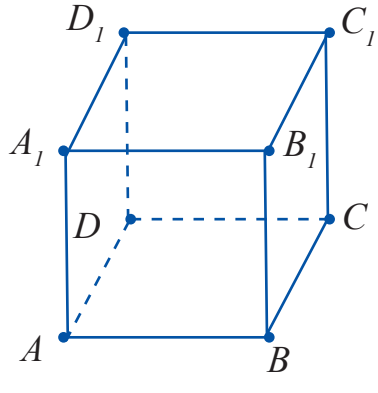
a _____

b _____

c _____

$\begin{cases} a \parallel c \\ b \parallel c \end{cases} \rightarrow \quad a \parallel b$.

11.7. Докажите, что в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, изображённом на рисунке, диагонали BC_1 и AD_1 равны и параллельны друг другу.



$BCC_1B_1 \parallel ADD_1A_1$; $BC = AD$;

$\begin{cases} BC_1 = BC \cdot \sqrt{2} \\ AD_1 = AD \cdot \sqrt{2} \end{cases} \rightarrow \quad AD_1 = BC_1$.

Так как ABC_1D_1 – прямоугольник, то $AD_1 \parallel BC_1$.

Урок 2. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.MM.05. знает свойства параллельных прямых и может использовать их при решении практических задач.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

- знать свойства параллельных прямых;

Навыки:

- может использовать свойства параллельных прямых при решении практических задач.

III. Краткое описание содержания урока:

- свойства параллельных прямых.

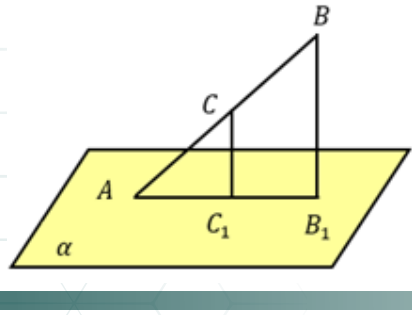
IV. Оборудование и наглядные пособия:

- модели различных пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Что такое параллельность?	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме: Приведите примеры параллельности.
Формирование и закрепление знаний	Параллельные прямые в пространстве	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 11.9
	Признаки параллельности	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 11.10-11.11
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 11.12-11.13
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 11.14–11.15		

11.8. На отрезке AB, где точка A лежит в плоскости a, выбрана точка C. Параллельные прямые, проведённые из точек B и C, пересекают плоскость a в точках B_1 и C_1 соответственно. Найдите длину сечения CC_1, если: a) точка C – середина отрезка B, а $BB_1 = 14$ см; b) $AC : CB = 3 : 2$ и $BB_1 = 50$ см.



a) $AC = CB$; $BB_1 = 14$ см. $CC_1 = ?$

$\Delta ACC_1 \sim \Delta ABB_1$; $AB = 2 \cdot AC$;

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CC_1}{BB_1}; \quad \frac{AC}{2 \cdot AC} = \frac{CC_1}{14}; \quad \frac{1}{2} = \frac{CC_1}{14};$$

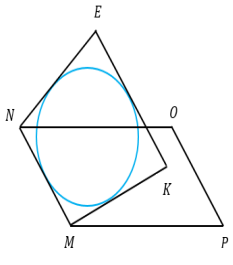
$CC_1 = \frac{14}{2} = 7\ cm$; **Ответ:** $CC_1 = 7cm.$

$b)\ AC : CB = 3 : 2;\quad BB_1 = 50\ cm.\quad CC_1 = ?$

$AB = AC + CB = 3 + 2 = 5;\quad \frac{AC}{CB} = \frac{3}{2};\quad \frac{AC}{AB} = \frac{CC_1}{BB_1};\quad \frac{3}{5} = \frac{CC_1}{50};$

$CC_1 = \frac{3 \cdot 50}{5} = 3 \cdot 10 = 30\ cm.$ **Ответ:** $CC_1 = 30\ cm.$

11.9. Даны параллелограмм *MNOP* и трапеция *MNEK* с основанием *EK*, не лежащие в одной плоскости. a) Определите взаимное положение прямых *PO* и *EK*. b) Основания трапеции равны *MN = 45 cm, EK = 55 cm*, и в ней можно построить внутреннюю окружность. Найдите периметр трапеции.



$a)\ \begin{cases} EK \| MN \\ PO \| MN \end{cases} \rightarrow\ PO \| EK.$

b) $MN = 45\ cm;\ EK = 55\ cm.$

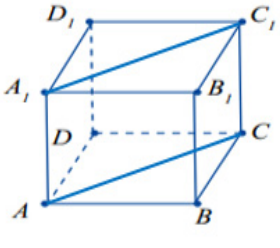
$NE + MK = MN + EK;$

$MN + EK = 45\ cm + 55\ cm = 100\ cm;$

$P_{PNEK} = NE + MK + MN + EK = 100\ cm + 100\ cm = 200\ cm.$

Ответ: $P_{PNEK} = 200\ cm.$

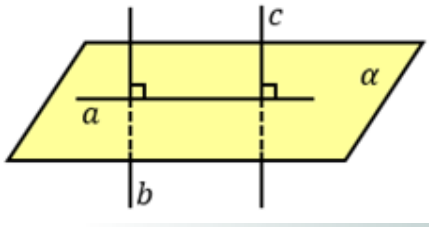
11.10. Какие из следующих свойств относятся к параллелепипеду? Отметьте правильные ответы.



D) Все его диагонали пересекаются в одной точке и делятся в этой точке на две равные части;
E) Противоположные грани параллельны друг другу;
F) Все грани представляют собой прямоугольник;
G) Противоположные грани равны между собой.
H) Рёбра взаимоскрещиваются.
I) Среди рёбер есть взаимоскрещивающиеся рёбра.

ACC_1A_1 является параллелограммом. **Ответ:** *A, B, D, E, F, G, J.*

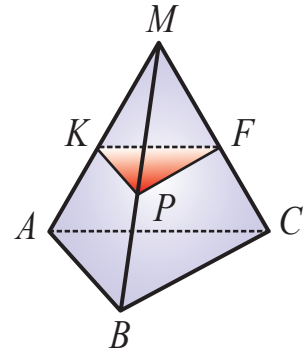
11.11. Параллельны ли друг другу прямые, перпендикулярные одной прямой в пространстве?



$\begin{cases} a \subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ \begin{cases} a \perp b \\ c \perp a \\ c \perp \alpha \end{cases} \end{cases} \rightarrow\ b \div c$ являются скрещивающимися

Не всегда являются параллельными. Только при $\begin{cases} a, b, c \subset \alpha \\ a \perp b \\ a \perp c \end{cases} \rightarrow b \parallel c$.

11.12. На рисунке 11 точка M лежит во внешней области треугольника ABC. Центры отрезков MA, MB, MC отмечены точками K, F, P соответственно. Какие из прямых параллельны друг другу? 1) KP; 2) PF;3) KF; 4) KM; 5) PM;6) FM;7) AB;8) BC; 9) AC.



Ответ: $AB \parallel KP;$

$AC \parallel KF;$

$BC \parallel PF.$

11.13. Прочитайте следующие предложения. Если предложение правильное, поставьте рядом с ним знак «+», а если неверное, поставьте рядом с ним знак «–».

1	В пространстве к прямой можно провести множество параллельных ей прямых из точки, не лежащей на ней.	–
2	Две прямые, параллельные третьей прямой, пересекаются между собой.	–
3	Если две прямые лежат на плоскости, они пересекаются.	–
4	Через прямую и точку, не лежащую на ней, можно провести две плоскости.	–
5	Из точки пространства, не лежащей на плоскости, можно провести множество прямых, пересекающих эту плоскость.	+

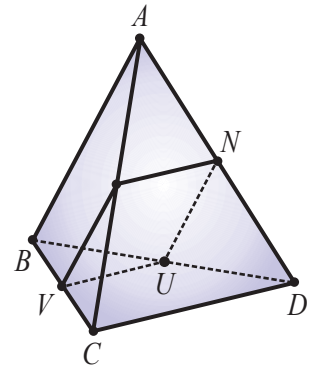
Домашнее задание

11.14.Точки M, N, U, V – это середины рёбер AC, AD, BD и BC пирамиды $ABCD$ соответственно. Если $AB = 20$ см, $CD = 30$ см, найдите периметр прямоугольника.

$AB = 20$ см, $CD = 30$ см.

$P_{MNUV} = ?$

MN-средняя линия в ΔACD.



В ΔBCD $\quad MN = \frac{CD}{2} = \frac{30}{2} = 15$ см;

В ΔABC $\quad MV = \frac{AB}{2} = \frac{20}{2} = 10$ см;

скачано с сайта www.idum.uz

В ΔABD $NU = \frac{AB}{2} = \frac{20}{2} = 10\ cm;$

$P_{MNUV} = MN + NU + UV + VM = 2(MN + MV) = 2 \cdot (15 + 10) = 50\ cm.$

Ответ: $P_{MNUV} = 50\ cm.$

11.15. Точки *H, G, F, S* – это середины рёбер *MN, ML, LK* и *KN* треугольной пирамиды *KLMN* соответственно . Найдите периметр прямоугольника *HGFS*, если *LK = 18 mm, MN = 22 mm*.

$LK = 18\ mm,\ \ MN = 22\ mm.$ $\qquad P_{NGFS} = ?$

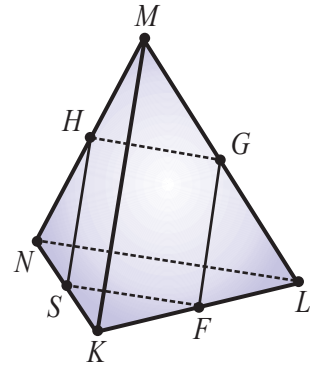
$LK = ML = 18\ mm;\ \ MN = MK = 22\ mm;$

В ΔMNK $HS = \frac{MK}{2} = \frac{22\ mm}{2} = 11\ mm;$

В ΔMKL $GF = \frac{MK}{2} = \frac{22\ mm}{2} = 11\ mm;$

В ΔNKL $SF = \frac{NL}{2} = \frac{18\ mm}{2} = 9\ mm;$

В ΔNLM $HG = \frac{NL}{2} = \frac{18\ mm}{2} = 9\ mm;$



$P_{NGFS} = 2(HS + GF) = 2 \cdot (11\ mm + 9\ mm) = 2 \cdot 20\ mm = 40\ mm.$

Ответ: $P_{NGFS} = 50\ cm.$

УРОК 3. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМЫХ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.GSH.04. Знает определение скрещивающихся, параллельных и пересекающихся прямых в пространстве и может начертить их.
– M10.GO‘.YM.04. Может представлять скрещивающиеся прямые.
– M10.GO‘.MM.06.Знает признаки скрещивающихся прямых и применяет их при решении задач.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

- Знать определение скрещивающихся, параллельных и пересекающихся прямых в пространстве.
-Знает признаки скрещивающихся прямых .

Навыки:

Знает признаки скрещивающихся прямых и применяет их при решении задач.

III. Краткое описание содержания урока:

- скрещивающиеся, параллельные и пересекающиеся прямые в пространстве. Признаки скрещивающихся прямых

IV. Оборудование и наглядные пособия:
- модели различных плоских и пространственных геометрических фигур.

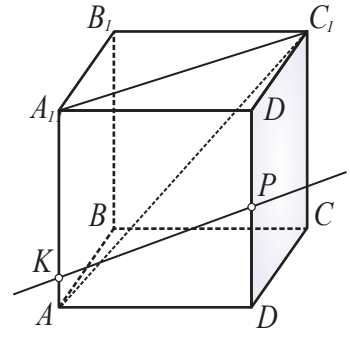
V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Какие прямые называются параллельными и пересекающимися?	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме Приведите примеры на параллельные и пересекающиеся прямые.
Формирование и закрепление знаний	Параллельные и пересекающиеся прямые в пространстве	Работа по учебнику	Вопросы по теме 1 Практическое упражнение и приложение 12.1
	Скрещивающиеся прямые в пространстве	Работа по учебнику	Вопросы по теме 2 Практическое упражнение и приложение 12.2
	Угол между скрещивающимися прямыми	Работа по учебнику	Вопросы по теме 3 Практическое упражнение и приложение 12.3
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 12.4
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение: 12.5–12.6		

12.2. На рис. 6 изображён прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки K и P на его рёбрах AA_1 и DD_1 соответственно. Исходя из взаимного расположения прямых, представленных в таблице, отметьте соответствующие ячейки таблицы (÷ – пересекаются, ⊗ – скрещиваются). Найдите ошибки в таблице.

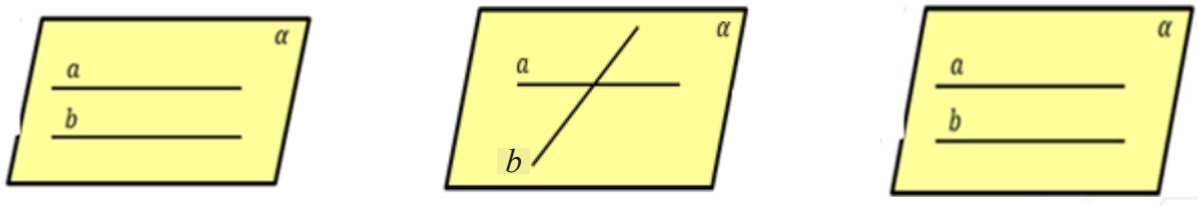
	AB	BB_1	A_1D_1
KP	⊗	÷	⊗
C_1A_1	÷	÷	⊗
C_1B	⊗	⊗	÷

	AB	BB_1	A_1D_1
KP	÷	÷	⊗
C_1A_1	÷	÷	⊗
C_1B	⊗	⊗	÷



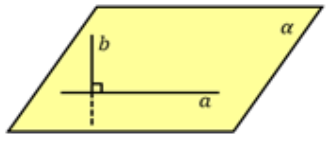
12.3. Прямые a и b лежат в одной плоскости. Покажите возможные пересечения этих прямых.

A) a и b параллельные; B) a и b пересекаются, в) a и b не пересекаются,



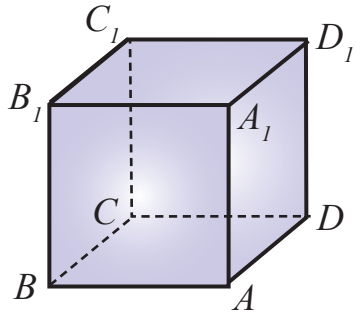
D) a и b скрещиваются, д) перпендикулярны.

На одной плоскости не скрещиваются



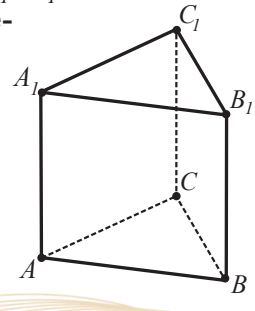
12.4. Нарисуйте: а) параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$; б) призму $ABCA_1B_1C_1$; в) тетраэдр $ABCD$; г) пирамиду $SABCD$, и найдите в ней пары скрещивающихся рёбер.

а) Нарисуйте параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и найдите в нём пары скрещивающихся рёбер:



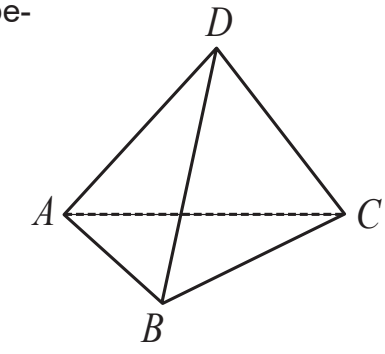
1) $AB \div A_1D_1$; 2) $AB \div B_1C_1$; 3) $AB \div DD_1$;
4) $AB \div CC_1$; 5) $BC \div AA_1$; 6) $BC \div DD_1$;
7) $BC \div A_1B_1$; 8) $BC \div C_1D_1$; 9) $CD \div C_1B_1$;
10) $CD \div A_1D_1$; 11) $CD \div AA_1$; 12) $CD \div BB_1$;
13) $AD \div BB_1$; 14) $AD \div CC_1$; 15) $AD \div A_1B_1$;
16) $AD \div C_1D_1$; 17) $A_1B_1 \div AD$; 18) $A_1B_1 \div BC$;
19) $A_1B_1 \div DD_1$; 20) $A_1B_1 \div CC_1$; 21) $B_1C_1 \div AA_1$;
22) $B_1C_1 \div DD_1$; 23) $B_1C_1 \div AB$; 24) $B_1C_1 \div CD$;
25) $C_1D_1 \div AA_1$; 26) $C_1D_1 \div BB_1$; 27) $C_1D_1 \div BB_1$; 28) $C_1D_1 \div BC$;
29) $A_1D_1 \div BB_1$; 30) $A_1D_1 \div CC_1$; 31) $A_1D_1 \div AB$; 32) $A_1D_1 \div DC$.

b) Нарисуйте призму $ABCA_1B_1C_1$ и найдите в ней пары скрещивающихся рёбер.



1) $AB \div A_1C_1$; 2) $AB \div B_1C_1$; 3) $AB \div CC_1$;
4) $BC \div AA_1$; 5) $BC \div A_1C_1$; 6) $BC \div A_1B_1$;
7) $AC \div BB_1$; 8) $AC \div B_1C_1$; 9) $AC \div A_1B_1$;
10) $A_1C_1 \div BB_1$; 11) $A_1B_1 \div CC_1$; 12) $B_1C_1 \div AA_1$.

c) Нарисуйте тетраэдр $ABCD$ и найдите в нём пары скрещивающихся рёбер.



1) $AB \div DC$;

2) $BC \div AD$;

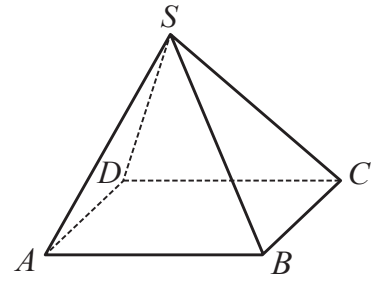
3) $AC \div BD$.

d) Нарисуйте пирамиду $SABCD$ и найдите в ней пары скрещивающихся рёбер.

1) $SA \div DC$; 2) $SA \div BC$; 3) $SB \div AD$;

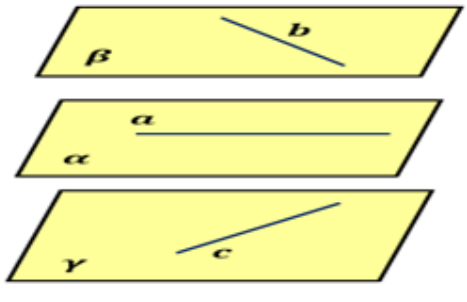
4) $SB \div DC$; 5) $SC \div AD$; 6) $SC \div AB$;

7) $SD \div AB$; 8) $SD \div BC$.



Домашнее задание

12.5. Если прямая a перпендикулярна прямой b, а прямая b перпендикулярна прямой c, перпендикулярна ли прямая a прямой c?

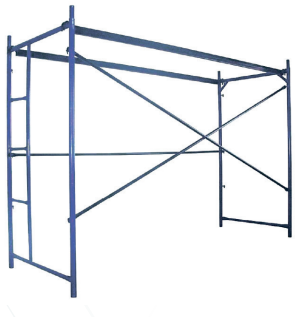


$$\begin{cases} a \div b \\ b \div c \end{cases} \rightarrow a \| c \text{ или } a \div c.$$

Ответ: прямые a и c скрещивающиеся.

12.6. На рисунке найдите примеры скрещивающихся прямых.

a)



b)



Любая из прямых линий в двух положениях X должна скрещиваться с железными трубами, отличными от плоскости этих прямых линий.

Железнодорожный и автомобильный мосты пересекаются.

УРОК 4. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМЫХ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.MM.06. Знает признаки скрещивающихся прямых и применяет их при решении задач.
– M10.GO‘.GSH.05. Знает определение параллельности прямой к плоскости.
– M10.GO‘.GSH.06. Знает определение параллельных и пересекающихся плоскостей.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

- знать признаки скрещивающихся прямых
- знать определение параллельности прямой к плоскости.
- знает определение параллельных и пересекающихся плоскостей.

Навыки:

- знать признаки скрещивающихся прямых и применять их при решении задач.

III. Краткое описание содержания урока:

- параллельности прямой к плоскости. Параллельные и пересекающиеся плоскости.

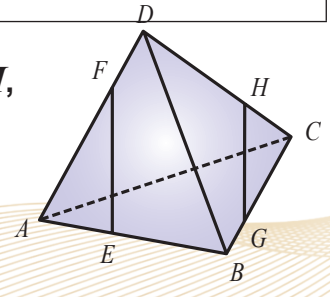
IV. Оборудование и наглядные пособия:

- модели различных плоских и пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	В каких случаях прямые параллельны плоскости?	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме: Приведите примеры пересекающихся плоскостей.
Формирование и закрепление знаний	Признаки скрещивающихся прямых	Работа по учебнику	Вопросы по теме 4 Практическое упражнение и приложение 12.7
	Параллельность прямой к плоскости	Работа по учебнику	Вопросы по теме 5 Практическое упражнение и приложение 12.8
	Параллельные и пересекающиеся плоскости	Работа по учебнику	Вопросы по теме 6 Практическое упражнение и приложение: 12.9
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 12.10
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 12.11-12.12		

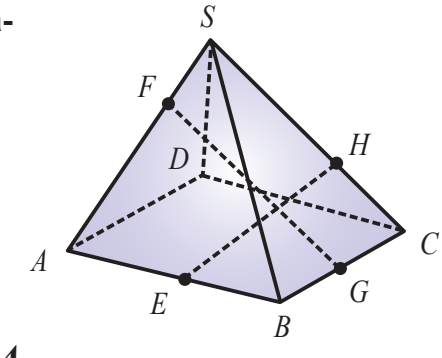
12.7. Каково взаимное расположение отрезков EF и GH, изображённых на рисунке?



$EF \div GH$.

Ответ: EF и GH взаимно скрещиваются.

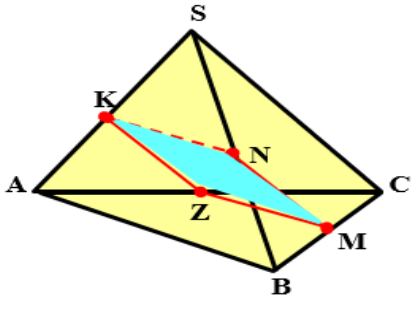
12.8. Пересекаются ли отрезки EH и FG, изображённые на рисунке?



Если точки E, H, G, F лежат в одной плоскости, то прямые EH и GF пересекаются.

Если точки E и H лежат в одной плоскости, а точки G и F – в другой плоскости, то EH и GF пересекутся.

12.9. Точки K, Z, M, N – это середины рёбер SA, AC,BC, SB треугольной правильной пирамиды $SABC$ соответственно. Найдите периметр прямоугольника $KZMN$, если боковые грани пирамиды равны B, а сторона основания равна A.



$AB = AC = BC = a$; $SA = SB = SC = b$;

$\Delta ACS \quad KZ = \frac{SC}{2} = \frac{b}{2}$;

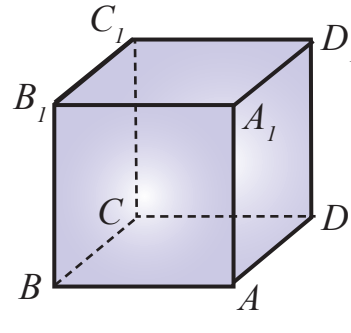
$\Delta BCS \quad NM = \frac{SC}{2} = \frac{b}{2}$;

$\Delta ABC \quad ZM = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$; $\quad\quad \Delta ABS \quad KN = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$;

$$P_{KZMN} = 2(ZM + KZ) = 2\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) = 2 \cdot \frac{a+b}{2} = a + b.$$

Ответ: $P_{KZMN} = a + b.$

12.10. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на рисунке найдите углы между следующими прямыми: a) DC и BC; b) AB и BB_1; c) AA_1 и D_1C; d) AA_1 и D_1C_1; e) A_1C_1 и AC; f) AB и B_1D_1.



a) $DC \perp BC$; $\angle BCD = 90°$;

b) $AB \perp BB_1$; $\angle ABB_1 = 90°$;

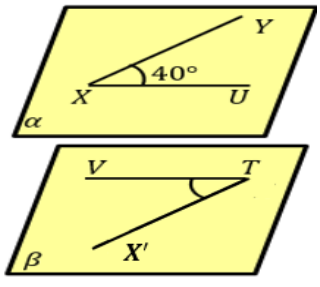
c) $\begin{cases} AA_1 \parallel DD_1 \\ \angle DD_1C = 45° \end{cases} \rightarrow 45°$;

d) $\begin{cases} AA_1 \parallel DD_1 \\ DD_1 \perp C_1D_1 \end{cases} \rightarrow 90°$;

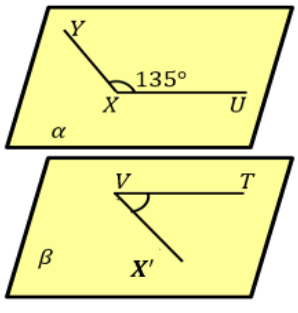
e) $A_1C_1 \parallel AC \rightarrow 0°$; $\quad$ f) $\begin{cases} AB \parallel A_1B_1 \\ \angle A_1B_1D_1 = 45° \end{cases} \rightarrow 45°$.

Домашнее задание

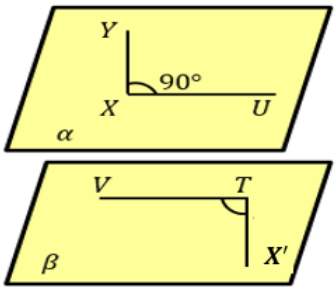
12.11. Прямые XU и VT параллельны, а прямые XY и VT пересекаются. Если: a) $\angle YXU = 40°$; b) $\angle YXU = 135°$; c) $\angle YXU = 90°$ найдите угол между прямыми XY и VT.



a) $\alpha \parallel \beta$; $XU \parallel VT$; $XY \div VT$; $\angle YXU = 40°$.
$\angle X'TV = ?$
$XU \parallel VT$; $X'T \div XU$; $X'T \parallel XY$;
$\angle YXU = \angle X'TV$; **Ответ:** $\angle X'TV = 40°$.

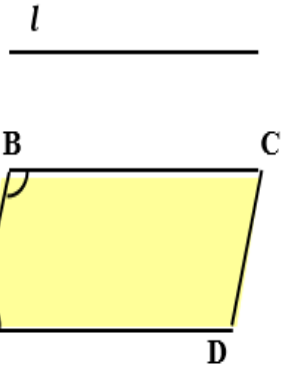


b) $\alpha \parallel \beta$; $XU \parallel VT$; $XY \div VT$; $\angle YXU = 135°$.
$\angle X'VT = ?$
$XU \parallel VT$; $X'V \div XU$; $X'V \parallel XY$;
$\angle YXU = \angle X'TV$;
$\angle X'VT = 180° - \angle YXU = 180° - 135° = 45°$.
Ответ: $\angle X'VT = 45°$



c) $\alpha \parallel \beta$; $XU \parallel VT$; $XY \div VT$; $\angle YXU = 90°$.
$\angle X'TV = ?$
$XU \parallel VT$; $X'T \div XU$; $X'T \parallel XY$;
$\angle YXU = \angle X'TV$;
Ответ: $\angle X'TV = 90°$.

12.12. Прямая l параллельна стороне BC параллелограмма $ABCD$ и не лежит в его плоскости. Докажите, что прямые l и CD – скрещивающиеся. Найдите угол между l и CD, если один из углов параллелограмма равен: а) 58°; б) 133°.



$l \parallel BC$; $CD \nparallel BC$; $l \notin ABCD$, значит, $l \div CD$.
a) $\angle A = 58°$; $l \parallel BC$, $BC \parallel AD$, $l \div CD$.
$\angle B = 180° - \angle A = 180° - 58° = 122°$;
$(l, CD) = 180° - \angle B = 180° - 122° = 58°$.
Ответ: $(l, CD) = 58°$.
b) $\angle B = 133°$; $l \parallel BC$, $l \div CD$.
$(l, CD) = 180° - \angle B = 180° - 133° = 47°$.
Ответ: $(l, CD) = 47°$.

УРОК 4. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.MM.06. Знает свойства параллельных прямых к плоскости и применяет их при решении практических задач.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

- знать свойства параллельных прямых к плоскости.

Навыки:

- знать признаки скрещивающихся прямых и применять их при решении задач.

III. Краткое описание содержания урока:

- плоскости с параллельными прямыми и их свойства. Параллельные прямые к плоскости и их свойства.

IV. Оборудование и наглядные пособия:

- модели различных плоских и пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Как могут взаимно располагаться прямая и плоскость в пространстве? Приведите примеры.	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме: В каких случаях прямые параллельны плоскости?
Формирование и закрепление знаний	Плоскости с параллельными прямыми и их свойства	Работа по учебнику	Вопросы по теме 1 Практическое упражнение и приложение 13.1
	Параллельные прямые к плоскости и их свойства	Работа по учебнику	Вопросы по теме 2 Практическое упражнение и приложение 13.2
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 13.3-13.4
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 13.5		

13.2. По рисунку определите параллельные рёбра и стороны: a) куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$; b) правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

a) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ определите параллельные рёбра и стороны куба.

Параллельные рёбра:

1) $AB,\ CD,\ A_1B_1,\ C_1D_1;$

Параллельные грани:

1) $ABCD,\ A_1B_1C_1D_1;$

2) $AD,\ BC,\ B_1C_1,\ A_1D_1$; 2) $ADD_1A_1,\ BCC_1B_1$.

3) $AA_1,\ BB_1,\ CC_1,\ DD_1$. 3) $ABB_1A_1,\ CDD_1C_1$.

b) Определите параллельные рёбра и стороны правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

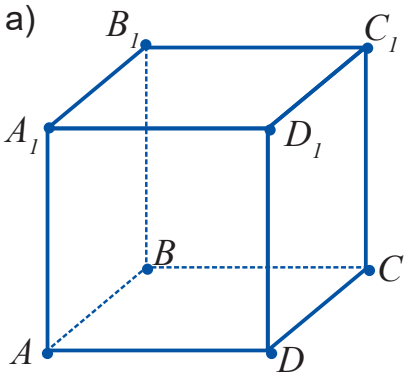
b) Параллельные рёбра: Параллельные грани:

1) $AB,\ A_1B_1,\ DE,\ D_1E_1$; 1) $ABB_1A_1,\ DEE_1D_1$;

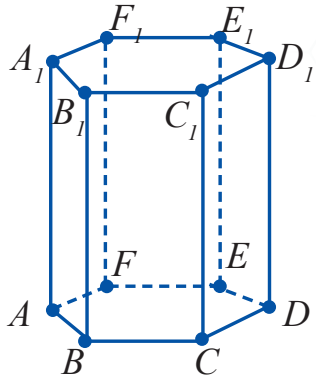
2) $BC,\ B_1C_1,\ FE,\ F_1E_1$; 2) $BCC_1B_1,\ EFF_1E_1$;

3) $CD,\ C_1D_1,\ AF,\ A_1F_1$. 3) $CDD_1C_1,\ AFF_1A_1$.

a)



b)



Домашнее задание

13.5. Прочитайте следующие предложения. Поставьте «+», если предложение верно, и «–», если оно неверно.

1	Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна прямой в этой плоскости, то эта прямая параллельна и самой плоскости.	+
2	Прямые, параллельные одной плоскости, параллельны друг другу.	–
3	Прямая, параллельная плоскости, параллельна и любой прямой, лежащей в этой плоскости.	–
4	Если одна плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, то линия пересечения этих плоскостей также параллельна данной прямой.	+
5	Если прямая и плоскость не пересекаются, то говорят, что прямая и плоскость параллельны.	+
6	Прямые линии с углом 90° называются перпендикулярными прямыми.	+
7	Угол между скрещивающимися прямыми – это угол между пересекающимися прямыми, параллельными этим прямым.	+

УРОК 5. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.MM.06. Знает свойства параллельных прямых к плоскости и применяет их при решении практических задач.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

- Знать свойства параллельных прямых к плоскости.

Навыки:

-Знать признаки скрещивающихся прямых и применять их при решении задач.

III. Краткое описание содержания урока:

- плоскости с параллельными прямыми и их свойства. Параллельные прямые к плоскости и их свойства.

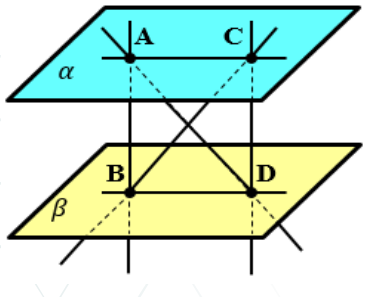
IV. Оборудование и наглядные пособия:

- модели различных плоских и пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	В каких случаях прямые параллельны плоскости? Приведите примеры	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме: Назовите признаки параллельности прямых к плоскости.
Формирование и закрепление знаний	Плоскости с параллельными прямыми и их свойства	Работа по учебнику	Вопросы по теме 3 Практическое упражнение и приложение 13.6
	Параллельные прямые к плоскости и их свойства.	Сколько вершин, рёбер и граней у кирпича?	Вопросы по теме 4 Практическое упражнение и приложение: 13.7
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 13.8-13.9
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение: 13.10-13.11		

13.6. Точки A и C лежат в плоскости α. Точки B и D лежат в плоскости. Какие из прямых AC, CD, BD, AB, BC и AD пересекают плоскость β?



$a \in A$, $a \in c$, $AC \in \alpha$;

$b \in B$, $b \in D$, $BD \in \beta$;

$\alpha \parallel \beta$, $AC \parallel BD$, $AB \parallel CD$.

Прямые AB, BC, CD, AD пересекают плоскость β.

13.7. Треугольник ABC пересекает плоскость α в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка B_1C_1, если $AB_1 : BB_1 = 2 : 3$ $BC = 15$ см $BC \parallel B_1C_1$.

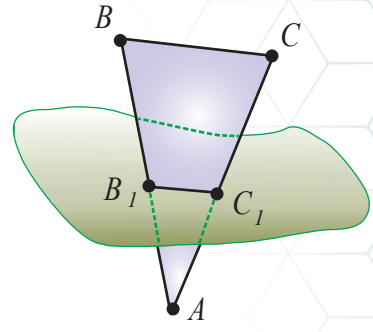
$AB_1 : BB_1 = 2:3$, $BC = 15$ см, $BC \parallel B_1C_1$.

$B_1C_1 = ?$ $AB_1 = 2x$; $BB_1 = 3x$;

$AB = AB_1 + BB_1 = 2x + 3x = 5x$;

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC}; \qquad \frac{2}{5} = \frac{B_1C_1}{15\ см};$$

$$B_1C_1 = \frac{2 \cdot 15\ см}{5} = 2 \cdot 3\ см = 6\ см.$$



Ответ: $B_1C_1 = 6$ см.

13.8. Плоскость α пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка BC, если $AB_1 : BB_1 = 3:1$, $B_1C_1 = 12$ см, $BC \parallel \alpha$.

$AB_1 : BB_1 = 3:1$, $B_1C_1 = 12$ см, $BC \parallel \alpha$.

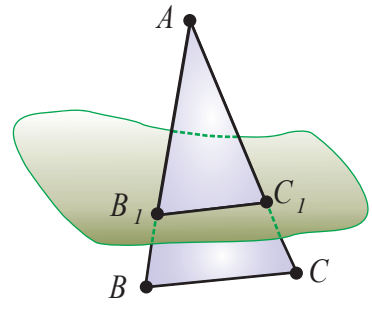
$BC = ?$ $AB_1 = 3x$; $BB_1 = x$;

$AB = AB_1 + BB_1 = 3x + x = 4x$;

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC}; \qquad \frac{3}{4} = \frac{12\ см}{BC}; \qquad BC = \frac{4 \cdot 12\ см}{3} =$$

$= 4 \cdot 4$ см $= 16$ см.

Ответ: $BC = 36$ см.

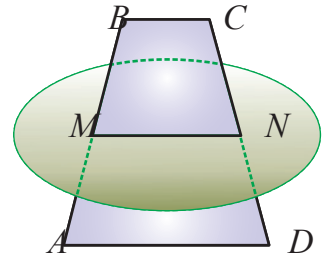


13.9. Плоскость α пересекает трапецию $ABCD$ параллельно её основанию AD и в серединах M и N её сторон . Если $AD = 17$ см, $BC = 9$ см, найдите длину отрезка MN.

$AD = 17$ см, $BC = 9$ см. $MN = ?$

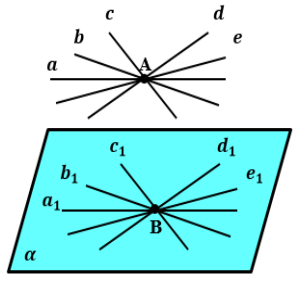
$$MN = \frac{AD + BC}{2} = \frac{17\ см + 9\ см}{2} = 13\ см.$$

Ответ: $MN = 13$ см.



Домашнее задание

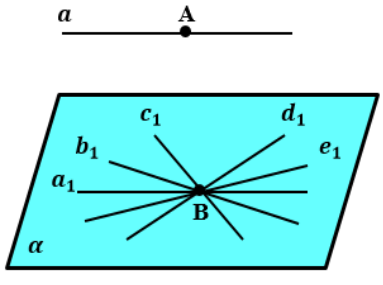
13.10. Сколько параллельных прямых можно провести к плоскости из точки, не лежащей на ней?



$\alpha \not\ni A$. $A \in a$, $A \in b$, $A \in c$, $A \in d$, $A \in e$;
$B \in a_1$, $B \in b_1$, $B \in c_1$, $B \in d_1$, $B \in e_1$;
$B \in \alpha$. $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$, $c \parallel c_1$, $d \parallel d_1$, $e \parallel e_1$.
$\alpha \parallel a$, $\alpha \parallel b$, $\alpha \parallel c$, $\alpha \parallel d$, $\alpha \parallel e$.

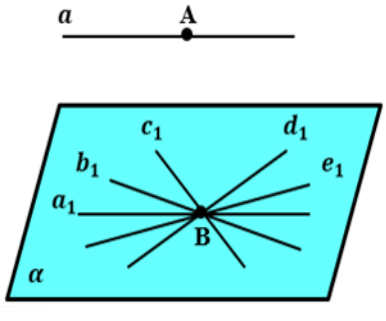
Ответ: к плоскости из точки, не лежащей на ней, можно провести бесконечное множество параллельных прямых.

13.11. Прямая параллельна плоскости α. Найдите правильные утверждения.
a) прямая *a* параллельна только одной прямой плоскости α.



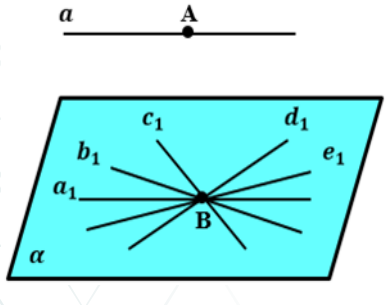
Ответ: Утверждение верное. Прямая a параллельна плоскости α. Прямая a параллельна только одной прямой плоскости α.

b) прямая *a* пересекает все прямые, кроме одной прямой плоскости α.



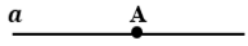
Ответ: Утверждение верное. Прямая a параллельна плоскости. Прямая a – это пересечение плоскости со всеми прямыми, кроме одной прямой a_1.

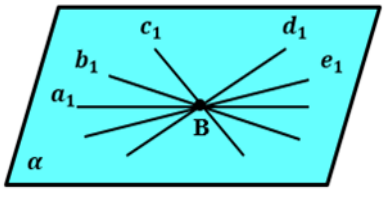
c) На плоскости α имеется множество прямых, параллельных и пересекающих прямую *a*.



Ответ: Утверждение верное. Прямая параллельна плоскости. В плоскости α имеется множество прямых, параллельных прямой a и пересекающихся a_1.

d) В плоскости α имеется только одна прямая, параллельная прямой a и проходящая через произвольную точку этой плоскости.





Ответ: Утверждение верное. Прямая параллельна плоскости. Существует только одна прямая a_1, параллельная прямой a в плоскости α, и нет прямой a_1, проходящей через произвольную точку этой плоскости.

УРОК 5. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.MM.06. Знает свойства параллельных прямых к плоскости и применяет их при решении практических задач.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

- знать свойства параллельных прямых к плоскости.

Навыки:

- знать признаки скрещивающихся прямых и применять их при решении задач.

III. Краткое описание содержания урока:

- плоскости с параллельными прямыми и их свойства. Параллельные прямые к плоскости и их свойства.

IV. Оборудование и наглядные пособия:

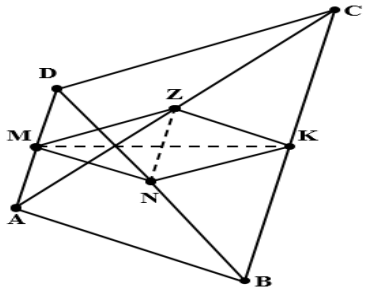
- модели различных плоских и пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	В каких случаях прямые параллельны плоскости? Приведите примеры	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме: Назовите признаки параллельности прямых к плоскости.
Формирование и закрепление знаний	Плоскости с параллельными прямыми и их свойства	Работа по учебнику	Вопросы по теме 3 Практическое упражнение и приложение 13.12
	Параллельные прямые к плоскости и их свойства	Сколько вершин, рёбер и граней у кирпича?	Вопросы по теме 4 Практическое упражнение и приложение 13.13

Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 13.14–13.15
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 13.16–13.17		

13.12. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Точки M, N, K, Z являются серединами отрезков AD, BD, BC, AC соответственно. Если $CD = AB$, докажите, что прямые MK и NZ перпендикулярны.



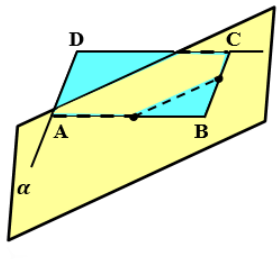
$$AB = CD = a; \qquad \begin{cases} MN \parallel AB \\ ZK \parallel AB \end{cases} \rightarrow MN \parallel ZK;$$

$$MN = ZK = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}; \qquad \begin{cases} MZ \parallel CD \\ MK \parallel CD \end{cases} \rightarrow MZ \parallel NK;$$

$$MZ = NK = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}.$$

Значит, $MNKZ$ является ромбом. Диагонали ромба $MK \perp NZ$.

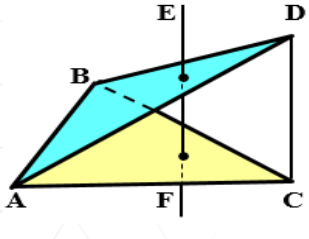
13.13. Стороны AB и BC параллелограмма $ABCD$ пересекают плоскость α. Докажите, что прямые AD и DC также пересекают плоскость α.



$AB \parallel CD;\ AB \nparallel \alpha$. Значит,прямая CD пересекает α.

$BC \parallel AD;\ BC \nparallel \alpha$. Значит,прямая CD пересекает α.

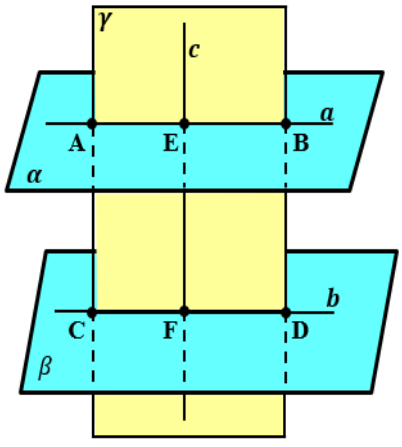
13.14. Треугольники ABC и ABD не лежат в одной плоскости. Докажите, что произвольная прямая, параллельная прямой CD, пересекает плоскости этих треугольников.



$$\begin{cases} CD \nparallel \Delta ABC \\ CD \nparallel \Delta ABD \\ EF \parallel CD \end{cases} \rightarrow \begin{cases} EF \nparallel \Delta ABC \\ EF \nparallel \Delta ABD \end{cases} \rightarrow$$

Значит, прямая EF пересекает плоскости треугольников ABC и ABD

13.15. Докажите, что прямые, пересекающие две заданные прямые, лежат в одной плоскости.



$A \in a;\ B \in a;\ a \in \alpha;$

$C \in b;\ D \in b;\ b \in \beta;\ a \parallel b,\ \alpha \parallel \beta;$

$E \in c;\ a \cap c = E;\ a \perp c;\ \alpha \perp \gamma;$

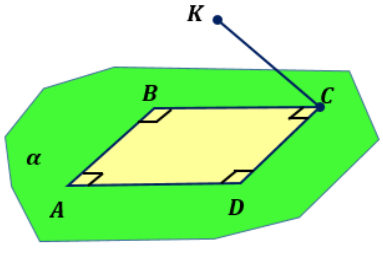
$F \in b;\ b \cap c = F;\ b \perp c;\ \beta \perp \gamma;$

$c \in \gamma.$

Домашнее задание

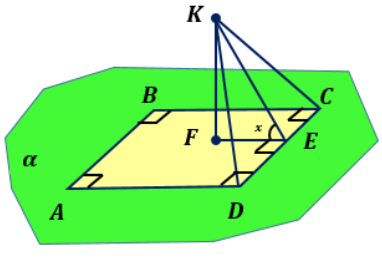
13.16. Прямая CK, не лежащая в плоскости квадрата, проходит через вершину C квадрата $ABCD$:

a) докажите, что CK и AD – скрещивающиеся прямые.



$$\begin{cases} ABCD \subset \alpha \\ AD \parallel BC \\ K \notin \alpha \end{cases} \rightarrow \quad CK \nmid AD\,.$$

b) найдите угол между прямыми CK и AD.



$$\begin{cases} CD \perp KE \\ KF \perp \alpha \end{cases} \rightarrow \quad FE \perp CD \quad \rightarrow FE \parallel AD.$$

ΔKFE в $\angle KEF = x.$

Угол $x = \angle KEF$ – угол между скрещивающимися прямыми AD и KC.

13.17. Предприниматель хочет изготовить лестницу, показанную на рисунке 10, из алюминия. Лестница состоит из двух частей, по 6 ступеней в каждой, скреплённых между собой.

1) определите, какие части лестницы параллельны, а какие пересекаются;

2) если известно, что ширина лестницы 0,5 m, высота в 3,5 раза больше ширины, сколько m алюминиевого профиля понадобится для изготовления одной лестницы?

3) Если цена 1 m алюминиевого профиля 20 000 сумов, то на какую сумму его потребуется приобрести для изготовления одной лестницы.

a) 1) ступени лестницы параллельны друг другу;

2) 2 детали, прикреплённые друг к другу, параллельны;

3) Непересекающиеся колонны 2-х лестниц взаимно скрещиваются;

4) Скреплённые произвольные ступеньки лестницы взаимно скрещиваются.

b) Длина лестницы 0,5 m ,а колонны 0,5 m · 3,5 = 1,75 m.

На одну лестницу требуется 7·0,5 m + 2·3,5 m = 3,5 m + 7 m = 10,5 m трубы.

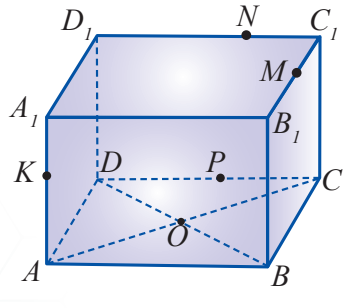
в) 10,5 m · 20 000 сум = 210 000 сумов потребуется на приобретение алюминиевого профиля.

Ответ: b) 1,75 m; 10,5 m; c) 210 000 сумов.



ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ (Контрольная работа 2)

1. На рисунке изображён прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ середины его рёбер B_1C_1, C_1D_1, CD и AA_1 – точки M, N, P, K соответственно. Точка O является центром основания $ABCD$. Определите взаимное расположение приведённых в таблице прямых по рисунку, запишите соответствующий символ (⊗ – пересечение, // – параллельность и ÷ – скрещивание) в соответствующей ячейке таблицы.



Прямые линии	MN	NP	C_1O	NO
AA_1	÷	÷	÷	÷
BC_1	÷	÷	⊗	÷
BD	∥	÷	⊗	⊗
AC	÷	÷	⊗	⊗

2. Точки A, B, C, D лежат в одной плоскости. А как насчёт прямых AB и CD?

A) они параллельны; B) они пересекаются; C) они скрещиваются?

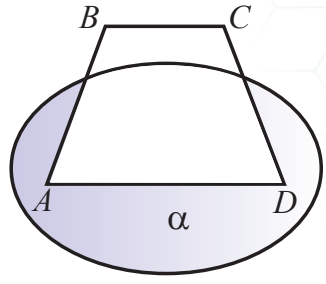
Прямые AB и CD проходящие через точки A, B, C, D лежащие в одной плоскости, могут быть параллельны и пересекаться, но не являются скрещивающимися.

Ответ: A и B.

3. Через сторону AD прямоугольника $ABCD$ проведена плоскость. Если $\angle BCA = \angle CAD$, докажите, что сторона BC параллельна плоскости α.

$\angle BAC = \angle CAD \rightarrow BC \parallel AD;$

$$\begin{cases} AD \subset \alpha \\ BC \| AD \end{cases} \rightarrow \quad BC \| \alpha$$



4. Квадрат $ABCD$ и трапеция $BEFC$ не лежат в одной плоскости. Точки M и N являются серединами сечений BE и FC соответственно. a) Докажите, что MN параллельна AD. b) Если $AD = 10cm$, $EF = 6cm$, найдите MN.

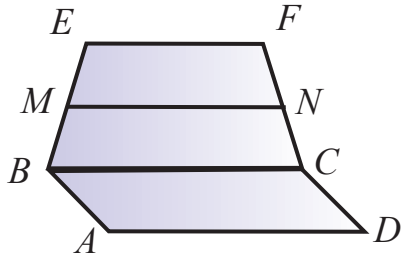
a) $BM = ME$; $FN = NC$.

Отсюда следует, что $\begin{cases} MN \| EF \\ MN \| BC \\ BC \| AD \end{cases} \rightarrow \quad MN \| AD$.

b) $BM = ME$; $FN = NC$; $AD = 10\ cm$; $EF = 6\ cm$. $MN = ?$

$$BC = AD = 10\ cm; \qquad MN = \frac{BC + EF}{2} = \frac{10\ cm + 6\ cm}{2} = \frac{16\ cm}{2} = 8\ cm.$$

Ответ: $MN = 8\ cm$.



5. Точка A_1 на стороне AD параллелограмма $ABCD$ выбрана так, что $DA_1 = 4$ cm. Плоскость, параллельная диагонали AC, проходит через точку A_1 и пересекает сторону CD в точке C_1.

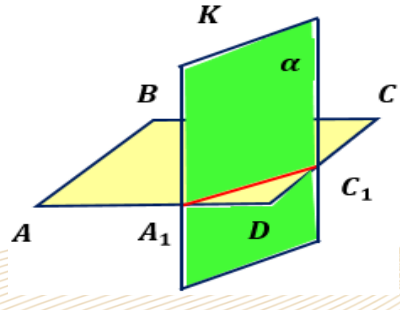
1) Докажите, что треугольники C_1DA_1 и ABC подобны.

2) Если $BC = 10\ cm$, $A_1C_1 = 6\ cm$, найдите AC.

$DA_1 = 4\ cm$; 1) $\begin{cases} A_1C_1 \subset \alpha \\ \alpha \| AC \end{cases} \rightarrow AC \| A_1C_1$;

$\begin{cases} \angle CAD = \angle C_1A_1D \\ \angle ACD = \angle A_1C_1D \\ \angle D - \text{общий} \end{cases} \rightarrow \Delta ACD \sim \Delta A_1C_1D$;

$\Delta ACD = \Delta ACB$; $\Delta C_1DA_1 \sim \Delta ACB$.



2) $BC = 10\,cm$; $A_1C_1 = 6\,cm$; $BC = AD = 10\,cm$; $\Delta ACD \sim \Delta A_1C_1D$;

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AD}{A_1D}; \qquad \frac{AC}{6} = \frac{10}{4}; \qquad AC = \frac{6\cdot 10}{4} = \frac{60}{4} = 15\,cm.$$

Ответ: $AC = 15\,cm$.

6. Плоскость α пересекает стороны угла BAC в точках A_2 и B_2, а параллельная плоскость β пересекает по точкам A_2 и B_2.

Если $A_1B_1 = 18$, $AA_1 = 24$, $AA_2 = \frac{1}{2}A_1A_2$ найдите A_2B_2 и AA_2.

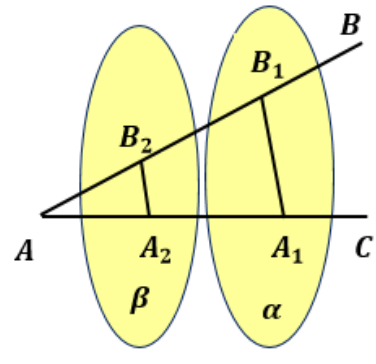
$\alpha \| \beta$; $A_1B_1 \| A_2B_2$; $\Delta AA_1B_1 \sim \Delta AA_2B_2$;

$AA_1 = AA_2 + A_1A_2 = AA_2 + 2\cdot AA_2 = 3\cdot AA_2$;

$3\cdot AA_2 = AA_1$; $3\cdot AA_2 = 24$; $AA_2 = 8$;

$$\frac{AA_2}{AA_1} = \frac{A_2B_2}{A_1B_1}; \qquad \frac{8}{24} = \frac{A_2B_2}{18};$$

$$A_2B_2 = \frac{8\cdot 18}{24} = \frac{8\cdot 18}{8\cdot 3} = \frac{18}{3} = 6.$$



Ответ: $A_2B_2 = 6$; $AA_2 = 8$.

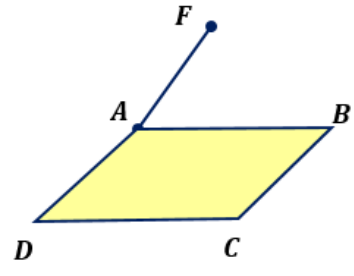
7. Прямая FA проходит через концы параллелограмма $ABCD$ и не лежит в плоскости параллелограмма.

1) Докажите, что FA и CD – скрещивающиеся.

2) Если угол FAB равен 30°, найдите угол между прямыми FA и CD.

1) $FA \not\subset ABCD$; $\begin{cases} AB \| DC \\ AB \otimes AF \end{cases} \rightarrow AF \div CD$.

2) $\begin{cases} CD \| AB \\ \angle FAB = 30° \end{cases} \rightarrow$ Угол между CD и FA тоже равен 30°.



УРОК 9. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.GSH.09. Знает свойства двух параллельных плоскостей и умеет применять их.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

– знать свойства двух параллельных плоскостей.

Навыки:

– применять свойства двух параллельных плоскостей.

III. Краткое описание содержания урока:

– свойства двух параллельных плоскостей. Изображение пространственных фигур на плоскости.

IV. Оборудование и наглядные пособия:

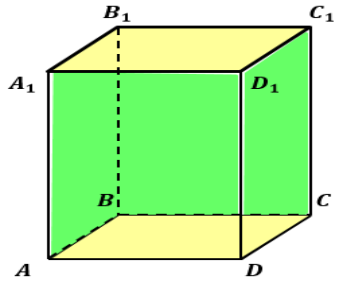
– модели различных плоских и пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Приведите примеры о расположении плоскостей в пространстве.	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме: Приведите примеры о взаимном расположении плоскостей в окружающей среде.
Формирование и закрепление знаний	Параллельные плоскости	Работа по учебнику	Вопросы по теме 1 Практическое упражнение и приложение 14.1-14.2
	Признаки параллельности двух плоскостей	Работа по учебнику	Вопросы по теме 2 Практическое упражнение и приложение: 14.3-14.4
	Изображение пространственных фигур на плоскости	Работа по учебнику	Вопросы по теме 3 Практическое упражнение и приложение 14.5
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 14.6
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 14.7-14.8		

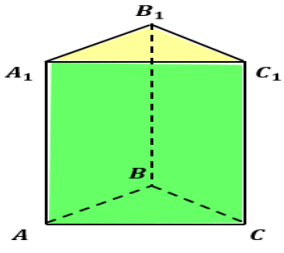
14.3. Определите параллельные рёбра: 1) параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$; 2) призмы $ABCA_1B_1C_1$.

1) Определите параллельные рёбра параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



Так как рёбра основания параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взаимно параллельны $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $CD \parallel C_1D_1$, $AD \parallel A_1D_1$ то основания $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ параллельны. А боковые рёбра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 перпендикулярные ребрам основания, взаимно параллельны.

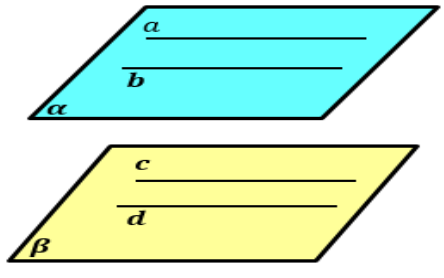
2) Определите параллельные рёбра призмы.



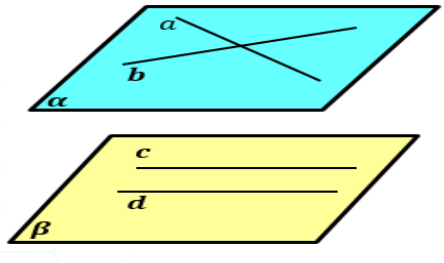
Так как рёбра основания AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ параллельны, следовательно, основания призмы ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны. Значит, два основания взаимно параллельны – $\Delta ABC \parallel \Delta A_1B_1C_1$.

14.5. Плоскости α и β параллельны. Прямые *a* и *b* лежат в плоскости α, а прямые *c* и *d* – в плоскости β. Какие из следующих утверждений верны?

A) $\alpha \parallel b$ ***B)*** $c \parallel b$ ***C)*** $b \parallel \beta$ ***D)*** $\beta \parallel a$ ***E)*** $c \parallel a$ ***F)*** $d \parallel b$ ***G)*** $a \parallel \alpha$ ***H)*** $d \parallel \alpha$



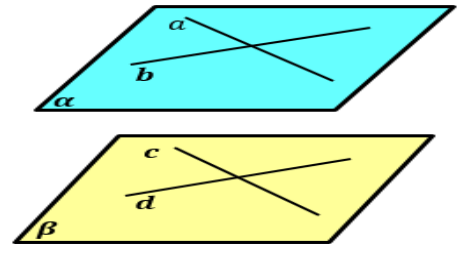
Случай 1. Так как прямые a и b в плоскости α, а так же прямые c и d в плоскости β параллельны, то и плоскости α и β, проходящие через них, параллельны. Среди утверждений верны утверждения: *A, B, D, E, F, H*, данные которых лежат в плоскостях α и β.



Случай 2. Так как прямые a и b пересекаются в плоскости α, а прямые c и d параллельны в плоскости β, то плоскости α и β, проходящие через них, параллельны.

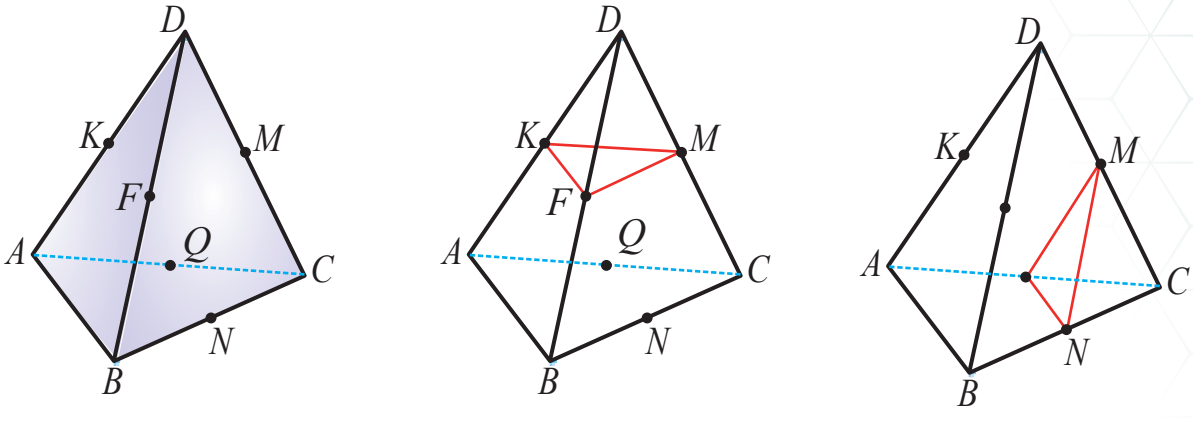
Среди утверждений нет утверждения, данные которого лежат в плоскостях а и β.

Случай 3. Поскольку прямые a и b в плоскости α, а также прямые c и d в плоскости β пересекаются, то плоскости α и β, проходящие через них, параллельны. Среди утверждений верны утверждения E, F, данные которого лежат в плоскостях α и β.



Домашнее задание

14.7. Если точки K, F, M, N, Q являются центрами соответствующих рёбер тетраэдра $ABCD$, изображённого на рисунке, определите плоскость: а) проходящую через точку K и параллельную плоскости ABC; б) проходящую через прямую BD и параллельную плоскости MNQ. а) $AK = KD$; $BF = FD$; $CM = MD$.



a) $AK = KD$; $BF = FD$; $CM = MD$;

$$KF \| AB \rightarrow KF = \frac{AB}{2}; \quad KM \| AC \rightarrow \frac{AC}{2}; \quad FM \| BC \rightarrow FM = \frac{BC}{2}.$$

Значит, $KFM \parallel ABC$.

b) $AQ = QC$; $DM = MC$; $BN = NC$; $MNQ \| BD$.

Следовательно, $ADB \parallel MNQ$.

УРОК 9. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.GSH.09. Знает свойства двух параллельных плоскостей и умеет применять их.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

- знать свойства двух параллельных плоскостей.

Навыки:

- применять свойства двух параллельных плоскостей.

III. Краткое описание содержания урока:

- свойства двух параллельных плоскостей. Изображение пространственных фигур на плоскости.

IV. Оборудование и наглядные пособия:

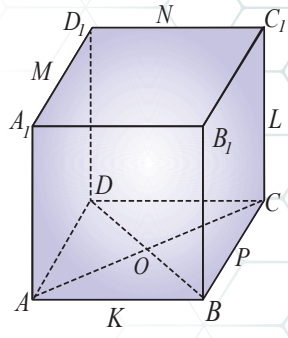
- модели различных плоских и пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Приведите примеры о расположении плоскостей в пространстве	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме: Приведите примеры о взаимном расположении плоскостей в окружающей среде.
Формирование и закрепление знаний	Параллельные плоскости	Работа по учебнику	Вопросы по теме 1 Практическое упражнение и приложение 14.9-14.10
	Признаки параллельности двух плоскостей	Работа по учебнику	Вопросы по теме 2 Практическое упражнение и приложение 14.11-14.12
	Изображение пространственных фигур на плоскости	Работа по учебнику	Вопросы по теме 3 Практическое упражнение и приложение 14.13
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 14.14
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 14.18, 14.20		

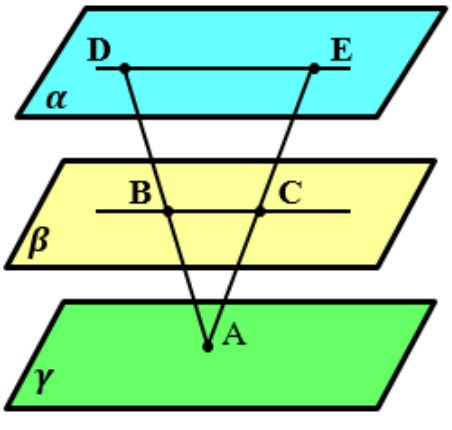
14.9. На рисунке показан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и середины некоторых его рёбер – точки M, N, P, K и L. Точка O является центром основания $ABCD$. Определяя взаимное расположение представленных в таблице плоскостей по рисунку, запишите соответствующий символ ($\otimes$ – пересечение, // – параллельность, $\div$ – скрещивание) в соответствующую ячейку таблицы.

плоскости	ADC	PLN	MNP	A_1C_1C
$A_1B_1C_1$	∥	÷	÷	⊗
MNK	÷	⊗	⊗	⊗
MKP	÷	⊗	⊗	⊗
A_1DC_1	⊗	⊗	⊗	⊗



14.10. Плоскости α и β параллельны. Через точку, не принадлежащую ни одной из них, проведена плоскость γ. Укажите правильные выражения.

а) плоскость γ – единственная плоскость, параллельная плоскости α;
б) плоскость γ – единственная плоскость, пересекающая плоскость β;
в) плоскость γ – единственная плоскость, параллельная плоскости β;
г) плоскость γ – единственная плоскость, пересекающая плоскость α;
д) плоскость γ – единственная плоскость, параллельная как плоскости α, так и плоскости β;



a) Утверждение неверно. $\alpha \parallel \beta,\ \gamma \parallel \alpha,\ \gamma \parallel \beta;$

b) Утверждение неверно. $\alpha \parallel \beta,\ \gamma \cap \beta = b,\ \gamma \cap \alpha = a;$

c) Утверждение неверно. $\alpha \parallel \beta,\ \gamma \parallel \beta,\ \gamma \parallel \alpha;$

d) Утверждение неверно. $\alpha \parallel \beta,\ \gamma \cap \alpha = a,\ \gamma \cap \beta = b;$

e) Утверждение верно. $\alpha \parallel \beta,\ \gamma \parallel \alpha,\ \gamma \parallel \beta;$

Ответ: $E.$

14.11. На рисунке изображён прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Определите взаимное расположение a) $A_1B_1C_1D_1$ и B_1A_1AB; b) ADD_1A_1 и $ABCD$; c) ABB_1A_1 и C_1D_1DC; d) $BADC$ и ABB_1A_1; e) CC_1B_1B и ADD_1A_1.

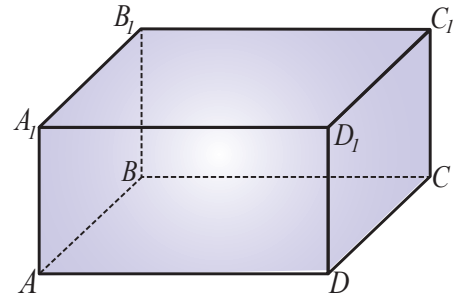
a) $A_1B_1C_1D_1 \perp B_1A_1AB.$

b) $ADD_1A_1 \perp ABCD$.

c) $ABB_1A_1 \parallel C_1D_1DC$.

d) $BADC \perp ABB_1A_1$.

e) $CC_1B_1B \parallel ADD_1A_1$.

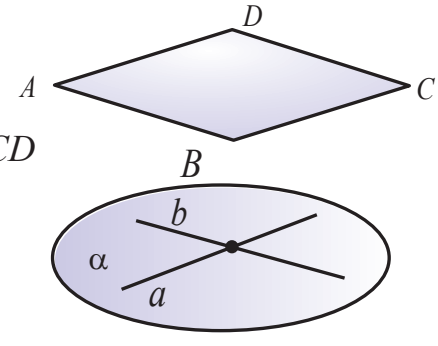


14.12. Отрезки AB, BC – это стороны параллелограмма $ABCD$, параллельные прямым a и b соответственно. Прямые a и b пересекаются и принадлежат плоскости α. Определите взаимное расположение плоскостей $ABCD$ и α в пространстве.

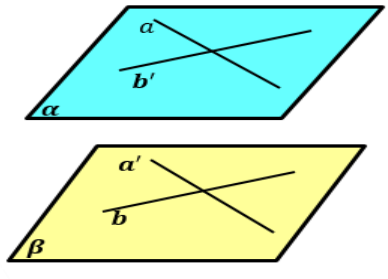
$BC \parallel a$; $AB \parallel b$; $a \in \alpha$; $b \in \alpha$; $a \cap b = O$;

$AB \parallel CD$; $BC \parallel AD$, следовательно, $a \parallel AD$ и $b \parallel CD$

Значит, $ABCD$ и плоскость α взаимно параллельны.



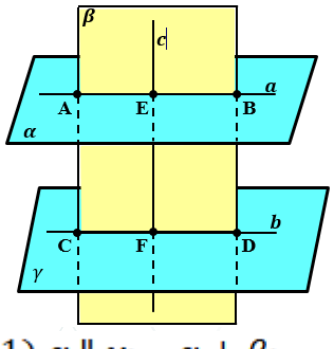
14.13. Даны скрещивающиеся прямые a и b. Сколько плоскостей, проходящих через прямую a и параллельных плоскости β, можно провести?



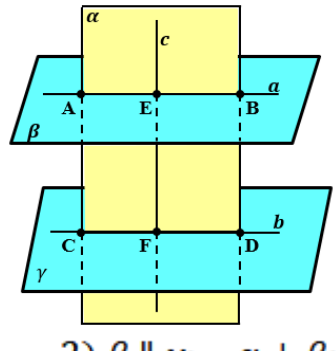
$a \div b$. Проведём прямую a', параллельную прямой a, и прямую b', параллельную прямой b. Через пересекающиеся прямые a и b' можно провести одну и только одну плоскость α.

14.14. Линия пересечения двух плоскостей α и β параллельна третьей плоскости – γ. Определите взаимное расположение плоскостей α и β в пространстве.

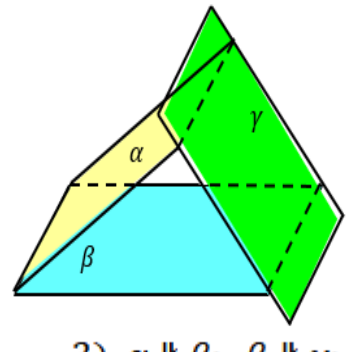
Случай 1. Случай 2. Случай 3.



1) $\alpha \parallel \gamma$; $\alpha \perp \beta$;



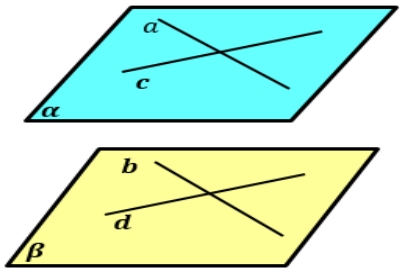
2) $\beta \parallel \gamma$; $\alpha \perp \beta$;



3) $\alpha \nparallel \beta$; $\beta \nparallel \gamma$; $\alpha \nparallel \gamma$.

Домашнее задание

14.18. Плоскости α и β параллельны. Докажите, что произвольная прямая, лежащая в плоскости α, параллельна плоскости β.

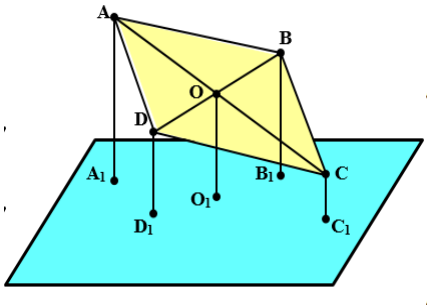


Так как $\alpha \in a$, $\alpha \parallel \beta$ проведём прямую b из плоскости β к прямой a. Проведём прямую c, пересекающую прямую a, лежащую в плоскости α.

Проведём прямую d, пересекающую прямую b, лежащую в плоскости β.

В результате образуются $a \parallel b$, $c \parallel d$. Отсюда следует, что произвольная прямая a параллельна плоскости α.

14.20. Даны параллелограмм $ABCD$ и плоскость, не пересекающая его. От концов A, B, C, D параллелограмма проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Если $AA_1 = 4$ м, $BB_1 = 3$ м и $CC_1 = 1$ м, найдите длину участка DD_1.



$AA_1 = 4\,m,\ BB_1 = 3\,m,\ CC_1 = 1\,m. \quad DD_1 = ?$

$$OO_1 = \frac{AA_1 + CC_1}{2}; \qquad OO_1 = \frac{DD_1 + BB_1}{2};$$

$$\frac{AA_1 + CC_1}{2} = \frac{DD_1 + BB_1}{2};$$

$$AA_1 + CC_1 = DD_1 + BB_1;$$

$$DD_1 = AA_1 + CC_1 - BB_1 = 4 + 1 - 3 = 2\,m.$$

Ответ: $DD_1 = 2m$.

УРОК 10. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.GSH.09. Знает свойства двух параллельных плоскостей и умеет применять их.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

-Знать свойства двух параллельных плоскостей.

Навыки:

-Применять свойства двух параллельных плоскостей.

III. Краткое описание содержания урока:

- свойства двух параллельных плоскостей. Изображение пространственных фигур на плоскости.

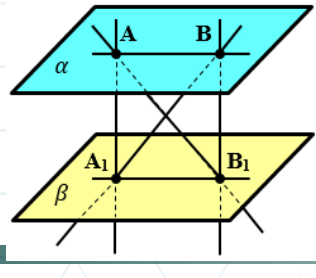
IV. Оборудование и наглядные пособия:

- модели различных плоских и пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Приведите примеры о расположении плоскостей в пространстве	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме: Приведите примеры о взаимном расположении плоскостей в окружающей среде.
Формирование и закрепление знаний	Параллельные плоскости	Работа по учебнику	Вопросы по теме 4 Практическое упражнение и приложение 14.22
	Признаки параллельности двух плоскостей. Изображение пространственных фигур на плоскости	Работа по учебнику	Вопросы по теме 2 Практическое упражнение и приложение: 14.23
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 14.24
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 14.25, 14.26		

14.21. Даны две параллельные плоскости. Из точек A и B одной плоскости проведены параллельные прямые, пересекающие вторую плоскость в точках A_1 и B_1. Если $AB = a$, найдите длину отрезка A_1B_1.



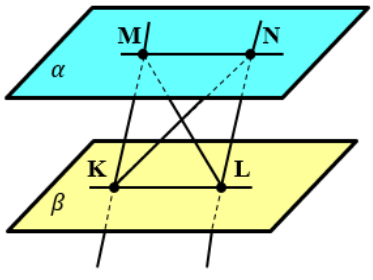
$\alpha \parallel \beta;\ A \in \alpha,\ B \in \alpha;\ A_1 \in \beta,\ B_1 \in \beta.$

$AB = a;\ AA_1 = b;\ A_1B = c.$

$a^2 + b^2 = c^2;\ b^2 = c^2 - a^2;\ b = \sqrt{c^2 - a^2}.$

Отсюда следует, что, $AA_1 = \sqrt{c^2 - a^2}$.

14.22. Плоскости α и β параллельны. Из точек M и N плоскости α проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость β в точках K и L. Докажите, что $MNLK$ – параллелограмм. Если $ML = 14$ см, $NK = 8$ см и $MK : MN = 9:7$ найдите периметр прямоугольника $MNLK$.



Так как $\alpha \parallel \beta$; $\alpha \in M$, $\alpha \in N$, $a = MN$ отсюда следует, что $\alpha \in a$.

Так как $\beta \in K$, $\beta \in L$, $b = KL$ отсюда следует, что $\beta \in b$.

Значит прямые MK и NL ,проходящие через точки M, K и N, L, параллельны.

$MN = KL$ и $MK = NL$ в четырехугольнике $MNKL$.

Значит, $MNKL$ – параллелограмм.

Дано: $ML = 14$ см, $NK = 8$ см, $MK : MN = 9 : 7$. Найти: $P_{MNKL} = ?$

$MK = 9x$; $MN = 7x$; $ML^2 + NK^2 = 2 \cdot (MK^2 + MN^2)$;

$14^2 + 8^2 = 2 \cdot ((9x)^2 + (7x)^2)$; $196 + 64 = 2 \cdot (81x^2 + 49x^2)$;

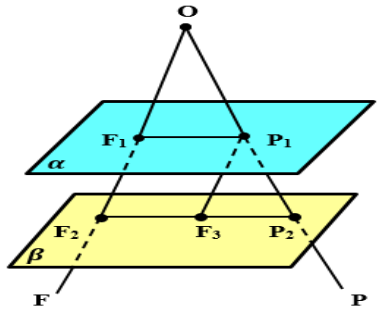
$$260 = 2 \cdot 130x^2; \qquad 260 = 260x^2; \qquad x^2 = \frac{260}{260}; \qquad x^2 = 1; \qquad x = 1 \text{ см};$$

$$MK = 9x = 9 \cdot 1 \text{ см} = 9 \text{ см}; \qquad MN = 7x = 7 \cdot 1 \text{ см} = 7 \text{ см};$$

$$P_{MNKL} = 2 \cdot (MK + MN) = 2 \cdot (9 \text{ см} + 7 \text{ см}) = 2 \cdot 16 \text{ см} = 32 \text{ см}$$

Ответ: 32 см.

14.23. Лучи OF и OP пересекают параллельные плоскости α и β в точках F_1, P_1, F_2, P_2 соответственно. Если $F_1P_1 = 3$ см, $F_2P_2 = 5$ см и $P_1P_2 = 4$ см найдите длину отрезка OP_1.



$F_1P_1 = 3$ см, $F_2P_2 = 5$ см, $P_1P_2 = 4$ см. $OP_1 = ?$

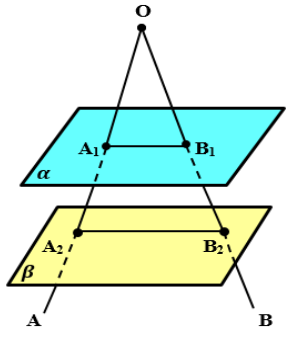
$F_3P_2 = F_2P_2 - F_1P_1 = 5$ см $- 3$ см $= 2$ см;

$$\frac{F_3P_2}{F_1P_1} = \frac{P_1P_2}{OP_1}; \qquad \frac{2 \text{ см}}{3 \text{ см}} = \frac{4 \text{ см}}{OP_1};$$

$$OP_1 = \frac{3 \text{ см} \cdot 4 \text{ см}}{2 \text{ см}} = \frac{12 \text{ см}^2}{2 \text{ см}} = 6 \text{ см}.$$

Ответ: $OP_1 = 6$ см.

14.24. Лучи OA и OB пересекают параллельные плоскости α и β в точках A_1, B_1, A_2, B_2 соответственно. Если $OA_1 = 16$ см, $A_1A_2 = 24$ см и $A_2B_2 = 50$ см найдите длину отрезка A_1B_1.



$OA_1 = 16\ cm,\ A_1A_2 = 24\ cm,\ A_2B_2 = 50\ cm.\ A_1B_1 = ?$

$OA_2 = OA_1 + A_1A_2 = 16\ cm + 24\ cm = 40\ cm;$

$$\frac{OA_1}{OA_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2}; \qquad \frac{16\ cm}{40\ cm} = \frac{A_1B_1}{50\ cm};$$

$$A_1B_1 = \frac{16\ cm \cdot 50\ cm}{40\ cm} = \frac{80\ cm^2}{4\ cm} = 20\ cm.$$

Ответ: $A_1B_1 = 20\ cm.$

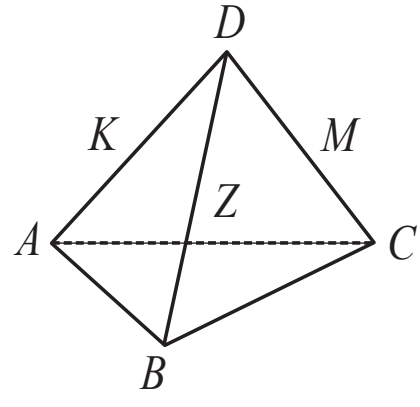
Домашнее задание

14.25. Точка D не принадлежит плоскости треугольника ABC (рис. 20). Точки K, M, Z являются серединами отрезков DA, DB и DC соответственно. Определите взаимное положение плоскостей ABC и KZM.

$$AK = \frac{AD}{2};\ BZ = \frac{BD}{2};\ CM = \frac{CD}{2};$$

$$S_{KZM} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABC}.$$

Здесь, $\Delta ABC \parallel \Delta KZM$ расположены.

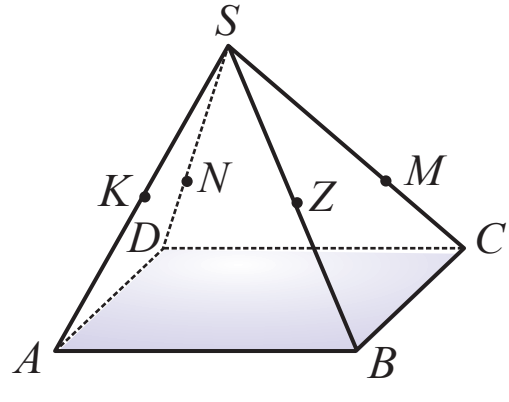


14.26. Точка S не принадлежит плоскости параллелограмма $ABCD$. Точки K, Z, M, N принадлежат отрезкам SA, SB, SC и SD соответственно. Если $SK = AK$, $SZ = BZ$, $SM : MC = 2 : 1$, $SN : ND = 2 : 1$ определите взаимное расположение плоскостей $ABCD$ и $KZMN$.

$SK = AK,\ SZ = BZ,\ SM : MC = 2 : 1,$

Если, $SN : ND = 2:1,$

Взаимное расположение плоскостей $ABCD$ и $KZMN$ непараллельное.



УРОК 11. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.MM.07. Знает свойства параллельных плоскостей и применяет их при решении практических задач.

– M10.GO‘.MM.08. Знает свойства параллельной проекции и применяет их при решении практических задач.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

-знать свойства параллельной проекции.

Навыки:

- знать свойства параллельной проекции и применять их при решении практических задач.

III. Краткое описание содержания урока:

- форма в пространстве проецируется на плоскости. Свойства параллельной проекции.

IV. Оборудование и наглядные пособия:

- модели различных плоских и пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Где можно использовать проекцию? Приведите примеры на проекцию	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме: Где можно использовать проекцию пространственной геометрической фигуры на плоскости?
Формирование и закрепление знаний	Проекция пространственной геометрической фигуры на плоскости	Работа по учебнику	Вопросы по теме 1 Практическое упражнение и приложение 15.1
	Свойства параллельной проекции	Работа по учебнику	Вопросы по теме 2 Практическое упражнение и приложение 15.2
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Вопросы по теме 3 Практическое упражнение и приложение 15.3-15.4
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение: 15.5		

15.2. Может ли проекция отрезка быть в параллельной проекции: а) отрезком; б) точкой; в) двумя точками; г) лучом; д) прямой?

а) Проекция отрезка может быть в параллельной проекции отрезком.

б) Проекция отрезка не может быть в параллельной проекции точкой.

в) Проекция отрезка не может быть в параллельной проекции двумя точками.

г) Проекция отрезка не может быть в параллельной проекции лучом.

д) Проекция отрезка не может быть в параллельной проекции прямой.

15.3. Может ли проекция квадрата быть в параллельной проекции: а) квадратом; б) параллелограммом; в) ромбом; г) правильным треугольником; д) трапецией; е) отрезком?

а) Проекция квадрата может быть в параллельной проекции квадратом.

б) Проекция квадрата не может быть в параллельной проекции параллелограммом.

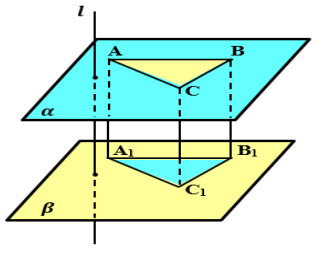
в) Проекция квадрата не может быть в параллельной проекции ромбом.

г) Проекция квадрата не может быть в параллельной проекции правильным треугольником.

д) Проекция квадрата не может быть в параллельной проекции трапецией.

е) Проекция квадрата не может быть в параллельной проекции отрезком.

15.4. Докажите, что треугольник, лежащий на одной из параллельных плоскостей, не изменит своей стороны, если его спроецировать параллельно на вторую плоскость.



$\alpha \parallel \beta,\ l \perp \alpha,\ l \perp \beta.\ l \parallel AA_1,\ l \parallel BB_1,\ l \parallel CC_1.$

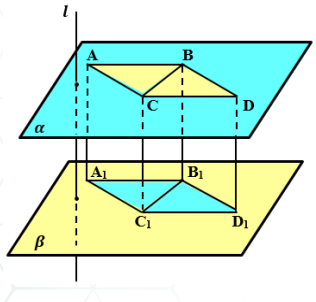
Отсюда следует, что $AB \parallel A_1B_1,\ BC \parallel B_1C_1,\ AC \parallel A_1B_1.$

$AB = A_1B_1,\ BC = B_1C_1,\ AC = A_1B_1.$

$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ в параллельной проекции площадь треугольника не изменится.

Домашнее задание

15.5. Может ли параллельная проекция параллелограмма быть трапецией? Обоснуйте ответ.



$\alpha \parallel \beta,\ l \perp \alpha,\ l \perp \beta.$

$l \parallel AA_1,\ l \parallel BB_1,\ l \parallel CC_1,\ l \parallel DD_1$. Отсюда следует, что

$AB \parallel A_1B_1,\ BD \parallel B_1D_1,\ DC \parallel D_1C_1,\ AC \parallel A_1C_1.$

$AB = A_1B_1,\ BD = B_1D_1,\ DC = D_1C_1,\ AC = A_1C_1.$

Параллельная проекция параллелограмма $ABCD = A_1B_1C_1D_1$ не может быть трапецией.

УРОК 12. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.MM.07. Знает свойства параллельных плоскостей и применяет их при решении практических задач.

– M10.GO‘.MM.08. Знает свойства параллельной проекции и применяет их при решении практических задач.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

- знать свойства параллельной проекции

Навыки:

- знать свойства параллельной проекции и применяет их при решении практических задач.

III. Краткое описание содержания урока:

- форма в пространстве проецируется на плоскости. Свойства параллельной проекции.

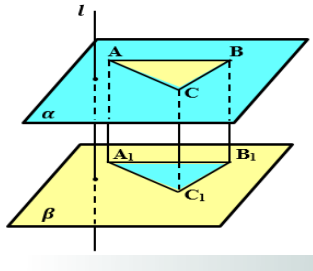
IV. Оборудование и наглядные пособия:

- модели различных плоских и пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Где можно использовать проекцию? Приведите примеры на проекцию.	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме: Где можно использовать проекцию пространственной геометрической фигуры на плоскости?
Формирование и закрепление знаний	Проекция пространственной геометрической фигуры на плоскости	Работа по учебнику	Вопросы по теме 1 Практическое упражнение и приложение 15.6
	Свойства параллельной проекции	Работа по учебнику	Вопросы по теме 2 Практическое упражнение и приложение 15.7
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Вопросы по теме 3 Практическое упражнение и приложение 15.8-15.9
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 15.10		

15.6. Является ли параллельная проекция прямоугольного треугольника прямоугольным треугольником?



$\Delta ABC,\ AB = BC = AC,\ \alpha \parallel \beta,\ l \perp \alpha,\ l \perp \beta.$

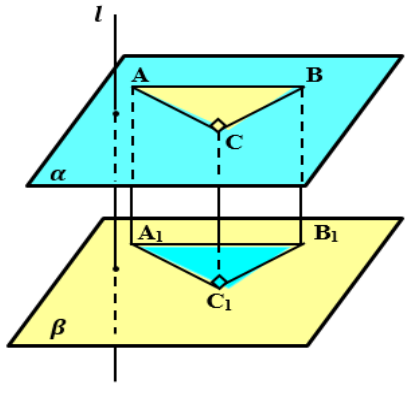
$l \parallel AA_1,\ \ l \parallel BB_1,\ \ l \parallel CC_1.$

$AB \parallel A_1B_1,\quad BC \parallel B_1C_1,\quad AC \parallel A_1B_1.$

$AB = A_1B_1,\quad BC = B_1C_1,\quad AC = A_1B_1.$

Проекция прямоугольного треугольника является прямоугольным треугольником $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

15.7. Может ли параллельная проекция прямоугольного треугольника быть прямоугольным треугольником?



$\Delta ABC,\ AB \perp BC,\ \alpha \| \beta,\ l \perp \alpha,\ l \perp \beta.$

$l \| AA_1,\ l \| BB_1,\ l \| CC_1.$

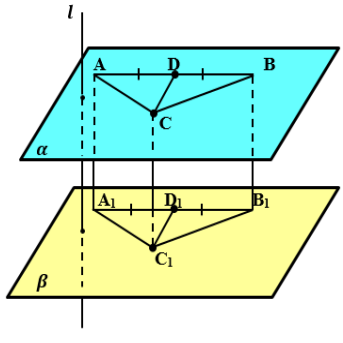
$AB \| A_1B_1,\quad BC \| B_1C_1,\quad AC \| A_1B_1.$

$AB = A_1B_1,\quad BC = B_1C_1,\quad AC = A_1B_1.$

$A_1B_1 \perp B_1C_1.$

Параллельная проекция прямоугольного треугольника может быть прямоугольным треугольником $\Delta ACB = \Delta A_1C_1B_1$.

15.8. Параллельная проекция треугольника ABC представляет собой треугольник $A_1B_1C_1$. Проходит ли в этой проекции: а) медиана; б) высота; в) биссектриса треугольника ABC через соответствующие: а) медиану; б) высоту; в) биссектрису треугольника $A_1B_1C_1$



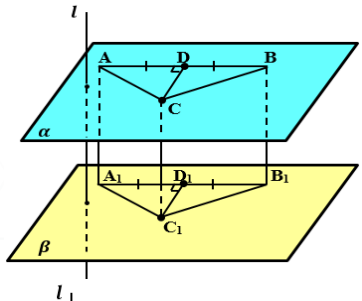
а) $\Delta ABC,\ \alpha \| \beta,\ l \perp \alpha,\ l \perp \beta.$

$l \| AA_1,\ l \| BB_1,\ l \| CC_1.$

$AB \| A_1B_1,\ BC \| B_1C_1,\ AC \| A_1B_1,\ CD \| C_1D_1.$

$AB = A_1B_1,\ BC = B_1C_1,\ AC = A_1B_1,\ CD = C_1D_1.$

В параллельной проекции треугольника $\Delta ACB = \Delta A_1C_1B_1$ медиана C проходит через медиану C_1D_1.



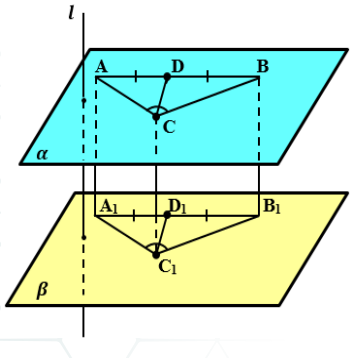
b) $\Delta ABC,\ \alpha \| \beta,\ l \perp \alpha,\ l \perp \beta.$

$l \| AA_1,\ l \| BB_1,\ l \| CC_1.$

$AB \| A_1B_1,\ BC \| B_1C_1,\ AC \| A_1B_1,\ CD \| C_1D_1.$

$AB = A_1B_1,\ BC = B_1C_1,\ AC = A_1B_1,\ CD = C_1D_1.$

В параллельной проекции треугольника $\Delta ACB = \Delta A_1C_1B_1$ высота C проходит через высоту C_1D_1.



b) $\Delta ABC,\ \alpha \| \beta,\ l \perp \alpha,\ l \perp \beta.$

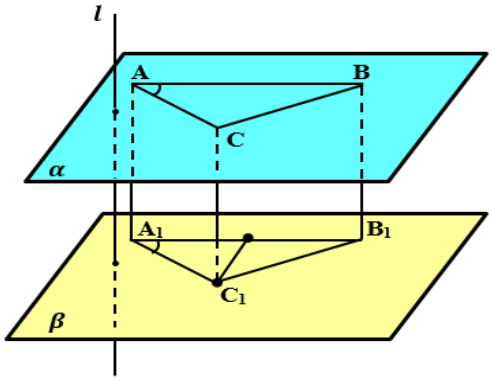
$l \| AA_1,\ l \| BB_1,\ l \| CC_1.$

$AB \| A_1B_1,\ BC \| B_1C_1,\ AC \| A_1B_1,\ CD \| C_1D_1.$

$AB = A_1B_1,\ BC = B_1C_1,\ AC = A_1B_1,$

В параллельной проекции треугольника $CD = C_1D_1$. $\Delta ACB = \Delta A_1C_1B_1$ биссектриса CD проходит через биссектрису C_1D_1.

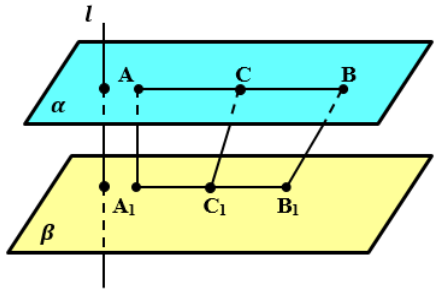
15.9. Параллельная проекция треугольника ABC представляет собой треугольник $A_1B_1C_1$. Если $\angle A = 30°$, $BC = 20$ см, будет ли $\angle A_1 = 30°$, $B_1C_1 = 20$ см?



Если параллельная проекция треугольника ABC представляет собой треугольник $A_1B_1C_1$, $\angle A = 30°$, $BC = 20$ *cm*, тогда проекция будет $\angle A_1 = 30°$, $B_1C_1 = 20$ *cm*.

Домашнее задание

15.10. Параллельная проекция отрезка AB состоит из отрезка A_1B_1. C_1 проекция точки. $AB = 48$ *cm*, $A_1B_1 = 36$ *cm*. Если длина отрезка AC равна: a) 24 cm; b) 12 cm; c) 8 cm; d) 32 cm; e) 36 cm, найдите длину отрезка A_1C_1.



a) $AC = 24$ *cm*, $AB = 48$ *cm*, $A_1B_1 = 36$ *cm*.

Найти: $A_1C_1 = ?$ $\quad \dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{A_1C_1}{AC}$

$$A_1C_1 = \frac{A_1B_1 \cdot AC}{AB} = \frac{36 \cdot 24}{48} = \frac{36}{2} = 18 \text{ cm}.$$

Ответ: $A_1C_1 = 18$ *cm*.

b) $AC = 12$ *cm*, $AB = 48$ *cm*, $A_1B_1 = 36$ *cm*. Найти: $A_1C_1 = ?$

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}; \quad A_1C_1 = \frac{A_1B_1 \cdot AC}{AB} = \frac{36 \cdot 12}{48} = \frac{36}{4} = 9 \text{ cm}.$$ **Ответ:** $A_1C_1 = 9$ *cm*

c) $AC = 8$ *cm*, $AB = 48$ *cm*, $A_1B_1 = 36$ *cm*. Найти: $A_1C_1 = ?$

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}; \quad A_1C_1 = \frac{A_1B_1 \cdot AC}{AB} = \frac{36 \cdot 8}{48} = \frac{36}{6} = 6 \text{ cm}.$$ **Ответ:** $A_1C_1 = 6$ *cm*

d) $AC = 32$ *cm*, $AB = 48$ *cm*, $A_1B_1 = 36$ *cm*. Найти: $A_1C_1 = ?$

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}; \quad A_1C_1 = \frac{A_1B_1 \cdot AC}{AB} = \frac{36 \cdot 32}{48} = \frac{36 \cdot 2}{3} = 12 \cdot 2 = 24 \text{ cm}.$$

Ответ: $A_1C_1 = 24$ *cm*.

e) $AC = 36$ *cm*, $AB = 48$ *cm*, $A_1B_1 = 36$ *cm*. Найти: $A_1C_1 = ?$

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}; \quad A_1C_1 = \frac{A_1B_1 \cdot AC}{AB} = \frac{36 \cdot 36}{48} = \frac{36 \cdot 3}{4} = 9 \cdot 3 = 27 \text{ cm}.$$

Ответ: $A_1C_1 = 27$ *cm*.

Урок 13. ПРАКТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ НА ПОВТОРЕНИЕ ГЛАВЫ

I. Стандарты:

– применять изученные концепции, факты и методы в незнакомых или жизненных ситуациях.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

- знать признаки параллельности двух плоскостей.
- знать свойства параллельности плоскостей.
- знать свойства параллельной проекции .

Навыки:

- применять изученные концепции, факты и методы в незнакомых или жизненных ситуациях.

III. Краткое описание содержания урока:

- признаки параллельности двух плоскостей.
- свойства параллельности плоскостей.
- свойства параллельной проекции.

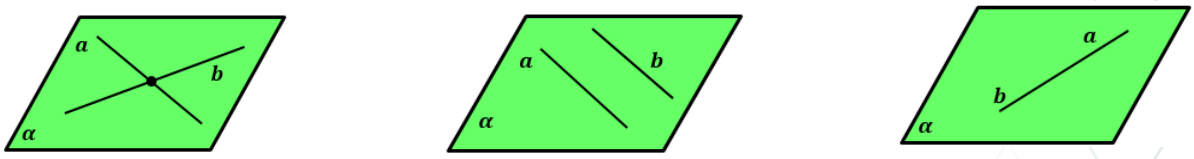
IV. Оборудование и наглядные пособия:

- модели различных плоских и пространственных геометрических фигур.

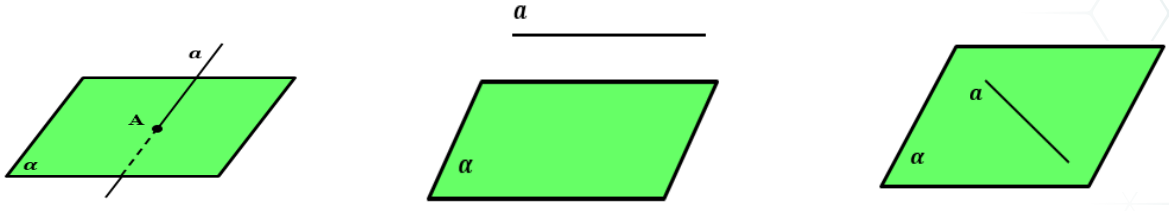
V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Приведите примеры на параллельность прямых и плоскостей	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме: Приведите примеры на скрещивающиеся прямые
Формирование и закрепление знаний	Параллельность прямых и плоскостей в пространстве	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 16.1
	Параллельность прямых к плоскостям и их свойства	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 16.2
	Параллельные плоскости и их свойства	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 16.3
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 16.4, 16.4, 16.5
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 16.6, 16.7		

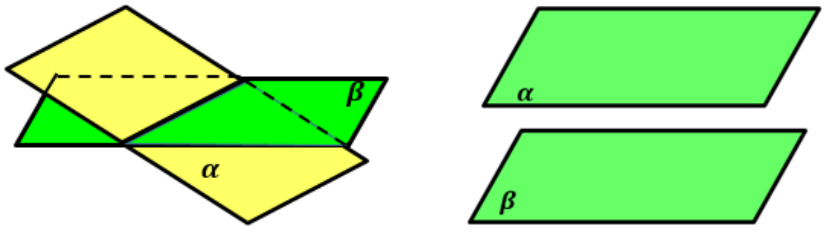
16.1. Сколько общих точек может быть у: а) двух прямых; б) прямой и плоскости; в) двух плоскостей?



Ответ: а) если две прямые пересекаются, то они имеют только одну общую точку; если две прямые параллельны, то у них нет общей точки; если две прямые совпадают, то они имеют бесконечное количество общих точек.



Ответ: б) прямая и плоскость при пересечении имеют только одну общую точку. Если прямая и плоскость параллельны, то у них нет общих точек. Если прямая и плоскость пересекаются, то они имеют бесконечное множество общих точек.



Ответ: в) если две плоскости пересекаются, то они имеют бесконечное множество общих точек. Если две плоскости параллельны, то у них нет общих точек.

16.2. Могут ли иметь общую точку: а) две прямые; б) прямая и плоскость; в) две плоскости; г) три плоскости?

Ответ: а) две прямые могут иметь общую точку, если они пересекаются.

Ответ: б) Прямая и плоскость могут иметь только одну общую точку, если они пересекаются.

Ответ: в) две плоскости не могут иметь общей точки.

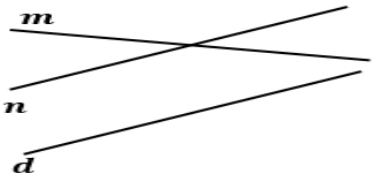
Ответ: г) три плоскости не могут иметь общей точки.

16.3. Четыре точки не лежат в одной плоскости. А) Могут ли три из них лежать на одной прямой? Б) Сколько плоскостей можно через них пропустить?

а) Четыре точки не лежат в одной плоскости. Три из них не могут лежать на одной прямой.

б) Четыре точки не лежат в одной плоскости. Если три из них не лежат на одной прямой, можно провести одну плоскость

16.4. Прямые m и n пересекаются, а прямая d параллельна прямой n. Как можно расположить прямые m и d между собой?



Прямые m и d можно расположить взаимно скрещивая.

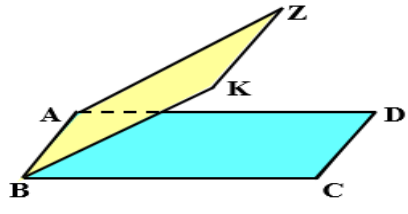
16.5. Сколько плоскостей можно провести через точку C треугольника ABC параллельно стороне AB?

Ответ: Через точку C треугольника ABC можно провести одну плоскость, параллельную стороне AB.

Домашнее задание

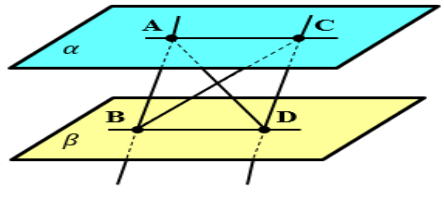
16.6. Параллелограммы $ABCD$ и $ABKZ$ лежат в разных плоскостях. Обозначьте параллельные прямые:

A) DA и KB; B) CD и KZ; C) BC и AZ; D) DA и ZA; E) CB и KB.



Ответ: B) $CD \parallel KZ$.

16.7. Точки A и C принадлежат плоскости α, точки B и D принадлежат плоскости β. Какие из прямых AC, CD, BD, AB, BC, AD пересекают плоскость β.



$A \in \alpha,\ C \in \alpha,\ B \in \beta,\ D \in \beta$.

Прямые CD, AB, BC, AD пересекают плоскость β.

Урок 14. ПРАКТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ НА ПОВТОРЕНИЕ ГЛАВЫ

I. Стандарты:

– применять изученные концепции, факты и методы в незнакомых или жизненных ситуациях.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

- знать признаки параллельности двух плоскостей.
- знать свойства параллельности плоскостей.
- знать свойства параллельной проекции.

Навыки:

-применять изученные концепции, факты и методы в незнакомых или жизненных ситуациях.

III. Краткое описание содержания урока:

- признаки параллельности двух плоскостей.
- свойства параллельности плоскостей.
- свойства параллельной проекции .

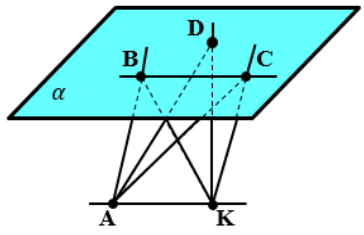
IV. Оборудование и наглядные пособия:

- модели различных плоских и пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Приведите примеры на параллельность прямых и плоскостей	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме: Приведите примеры на скрещивающиеся прямые
Формирование и закрепление знаний	Параллельность прямых и плоскостей в пространстве	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 16.8
	Параллельность прямых к плоскостям и их свойства	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 16.9
	Параллельные плоскости и их свойства	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 16.10
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 16.11, 16.12, 16.13
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 16.14, 16.15		

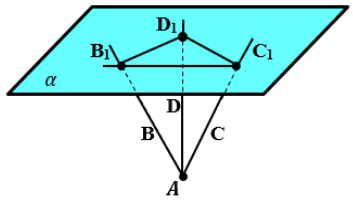
16.8. Сечения AB, AC, KB, KD пересекают плоскость α. Какая из прямых AK, AD, BD, KC, CD пересекает плоскость α?



$B \in \alpha$, $C \in \alpha$, $D \in \alpha$.

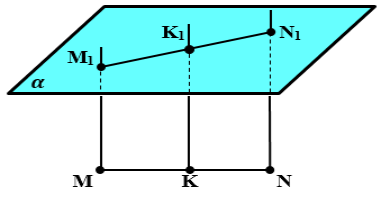
Сечения AB, AC, KB, KD пересекают плоскость α. Прямые AD, KC пересекают плоскость α.

16.9. Прямые AB, AC и AD не лежат в одной плоскости и пересекают плоскость α в точках B_1, C_1 и D_1. Какая фигура получится, если точки B_1, C_1 и D_1 соединить последовательно?



Если соединить последовательно точки B_1, C_1 и D_1, то получится треугольник.

16.10. Через две вершины и середину отрезка MN, не лежащего в плоскости α, проведены параллельные прямые. Найдите длину отрезка MM_1, если эти прямые пересекают плоскость α в точках M_1, N_1, и K_1 соответственно $KK_1 = 9$ см, $NN_1 = 15$ см.

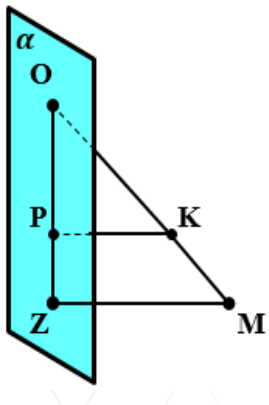


$KK_1 = 9\ см, \quad NN_1 = 15\ см. \quad MM_1 = ?$

$$\frac{KK_1}{NN_1} = \frac{MM_1}{KK_1}; \qquad \frac{9\ см}{15\ см} = \frac{MM_1}{9\ см};$$

$$MM_1 = \frac{9\ см \cdot 9\ см}{15\ см} = \frac{3\ см \cdot 9\ см}{5\ см} = \frac{27\ см^2}{5\ см} = 5{,}4\ см.$$ **Ответ:** $MM_1 = 5{,}4\ см$.

16.11. Через точки P и Z плоскости α проведены параллельные отрезки PK = 6 cm и ZM = 9 cm. Прямая MK пересекает плоскость α в точке O. Найдите длину отрезка MO, если MK= 6 cm.



$PK = 6\ см, \quad ZM = 9\ см, \quad MK = 6\ см. \quad MO = ?$

$$MO = MK + KO = 6 + x; \qquad \frac{PK}{KO} = \frac{ZM}{MO}; \qquad \frac{6}{x} = \frac{9}{6+x};$$

$9x = 6 \cdot (6 + x); \quad 9x = 36 + 6x; \quad 9x - 6x = 36;$

$3x = 36; \quad x = 36 : 3; \quad x = 12; \quad KO = 12\ см;$

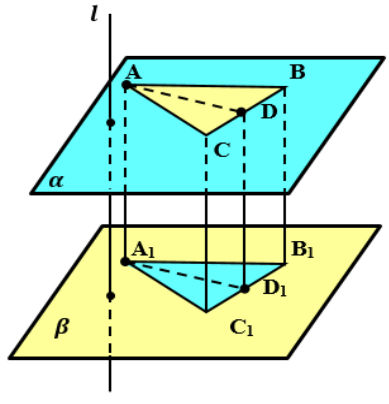
$MO = MK + KO = 6\ см + 12\ см = 18\ см.$

Ответ: $MO = 18\ см$.

16.12. Можно ли образовать квадрат при параллельной проекции параллелограмма?

При параллельной проекции параллелограмма нельзя образовать квадрат.

16.13. Дана параллельная проекция треугольника. Как строятся проекции медиан этих треугольников?

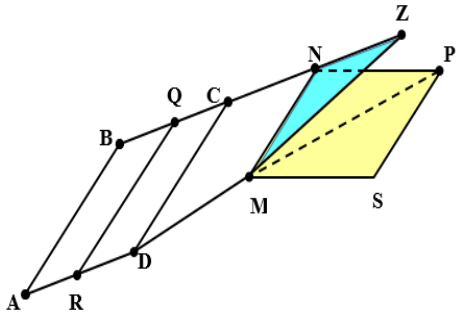


$\alpha \| \beta$, $l \perp \alpha$, $l \perp \beta$, $\alpha \in AB$, $\alpha \in BC$, $\alpha \in AC$, $\beta \in A_1B_1$, $\beta \in B_1C_1$, $\beta \in A_1C_1$. В параллельной проекции точка переходит на точку, отрезок на отрезок. Отсюда, проекция треугольника ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$.

Следовательно, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ и медиана AD проецируется параллельно медиане A_1D_1 относительно прямой $AD = A_1D_1$.

Домашнее задание

16.14. Треугольник MNZ и параллелограмм $MNPS$ (BC – основание) не лежат в одной плоскости. Точки Q и R – середины отрезков CB и DA, а M и N – середины отрезков DP и CZ. Докажите, что прямые MN и QR параллельны.



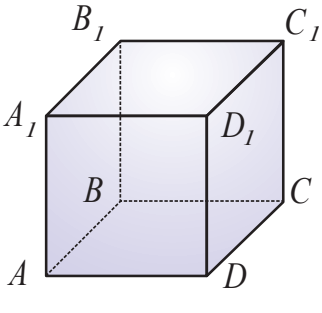
$MNZ \cap MNPS = MN$, $DM = \frac{1}{2}DP$, $CN = \frac{1}{2}CZ$; $BQ = \frac{1}{2}BC$; $AR = \frac{1}{2}AD$; $AB \| QR$; $QR \| CD$; $CD \| MN$. Отсюда, $MN \| QR$.

16.15. Какие из сторон куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллельны прямой A_1B_1; AA_1D_1D; BB_1C_1C; $ABCD$; DD_1C_1C; $B_1C_1D_1A_1$; ADD_1A_1?

а) В грани AA_1D_1D нет рёбер, параллельных прямой A_1B_1.

б) В грани BB_1C_1C нет рёбер, параллельных прямой A_1B_1.

в) В грани $ABCD$ есть рёбра, параллельные прямой A_1B_1: $A_1B_1 \| AB$, $A_1B_1 \| CD$.



г) В грани DD_1C_1C есть рёбра, параллельные прямой A_1B_1; $A_1B_1 \| CD$, $A_1B_1 \| C_1D_1$.

д) В грани $B_1C_1D_1A_1$ есть рёбра, параллельные прямой A_1B_1; $A_1B_1 \| C_1D_1$.

е) В грани ADD_1A_1 нет рёбер, параллельных прямой A_1B_1.

Урок 15. ПРАКТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ НА ПОВТОРЕНИЕ ГЛАВЫ

I. Стандарты:

– применять изученные концепции, факты и методы в незнакомых или жизненных ситуациях.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

- знать признаки параллельности двух плоскостей.
- знать свойства параллельности плоскостей.
- знать свойства параллельной проекции.

Навыки:

- применять изученные концепции, факты и методы в незнакомых или жизненных ситуациях.

III. Краткое описание содержания урока:

- признаки параллельности двух плоскостей.
- свойства параллельности плоскостей.
- свойства параллельной проекции .

IV. Оборудование и наглядные пособия:

- модели различных плоских и пространственных геометрических фигур.

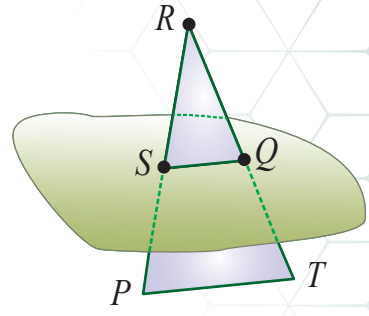
V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Приведите примеры на параллельность прямых и плоскостей	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме: Приведите примеры на скрещивающиеся прямые.
Формирование и закрепление знаний	Параллельность прямых и плоскостей в пространстве	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 16.16
	Параллельность прямых к плоскостям и их свойства	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 16.17
	Параллельные плоскости и их свойства	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 16.18
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 16.19
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 16.20, 16.21		

16.16. Дан треугольник PRT. Плоскость α, параллельная прямой PT, пересекает сторону PR в точке S, а сторону RT – в точке Q. Найдите сторону PT, если SR = 7 cm, SQ = 3 cm и SP= 35 cm.

$PT \parallel \alpha$; $SR = 7$ cm; $SQ = 3$ cm; $SP = 35$ cm. $PT = ?$

$\Delta RSQ \sim \Delta RPT$; $PR = SR + SP = 7+35 = 42$ cm;

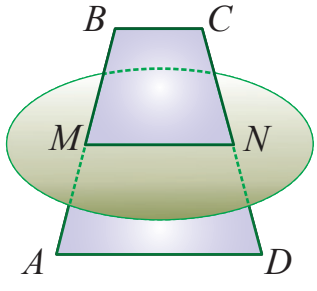


$$\frac{SR}{PR} = \frac{SQ}{PT}; \qquad \frac{7\ cm}{42\ cm} = \frac{3\ cm}{PT};$$

$$PT = \frac{42\ cm \cdot 3\ cm}{7\ cm} = 6 \cdot 3\ cm = 18\ cm.$$

Ответ: $PT = 18$ cm.

16.17. Плоскость α параллельна основанию AD равносторонней трапеции ABCD и пересекает стороны AB и CD в точках M и N. AD = 20 cm, MN = 16 cm. Найдите периметр трапеции, если точка M – середина AB, а AB = 8 cm.



$\alpha \parallel AD$; $AD = 20$ cm; $MN = 16$ cm; $AM = MB$; $AB = 8$ cm. $AB = CD$; $P_{ABCD} = ?$

$$AM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 8\ cm = 4\ cm; \qquad \frac{AD + BC}{2} = MN;$$

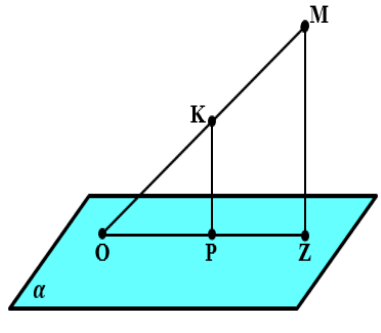
$$AD + BC = 2 \cdot MN;$$

$BC = 2 \cdot MN - AD = 2 \cdot 16\ cm - 20\ cm = 32\ cm - 20\ cm = 12\ cm;$

$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 8\ cm + 12\ cm + 8\ cm + 20\ cm = 48\ cm.$

Ответ: $P_{ABCD} = 48$ cm.

16.18. Через точки P и Z плоскости были сделаны разрезы PK = 6 cm и ZM = 9 cm. Прямая MK пересекает плоскость в точке O. Найдите расстояние MO, если MK = 6 cm.



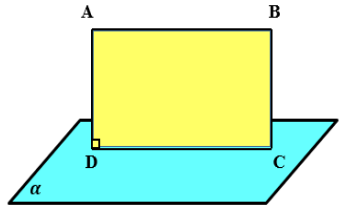
Дано: $\alpha \in P$, $\alpha \in Z$, $\alpha \in O$, $PK = 6$ cm, $ZM = 9$ cm, $MK = 6$ cm. Найти: $MO = ?$

$$\Delta MOZ \sim \Delta KOP; \qquad \frac{PK}{ZM} = \frac{MK}{MO}; \qquad \frac{6\ cm}{9\ cm} = \frac{6\ cm}{MO};$$

$$MO = \frac{6\ cm \cdot 9\ cm}{6\ cm} = \frac{54\ cm^2}{6\ cm} = 9\ cm.$$

Ответ: $MO = 9$ cm.

16.19. Сторона AB прямоугольника ABCD параллельна плоскости α, а сторона AD не параллельна этой плоскости. Определите взаимное расположение плоскостей ABCD и α в пространстве.

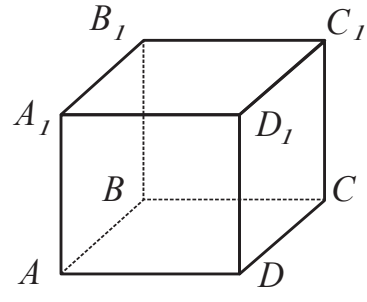


в $AB \parallel \alpha$, $AD \nparallel \alpha$. $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, $AB \parallel BC$, $AB \perp CD$, плоскости α и $ABCD$ взаимно перпендикулярны пространстве.

Домашнее задание

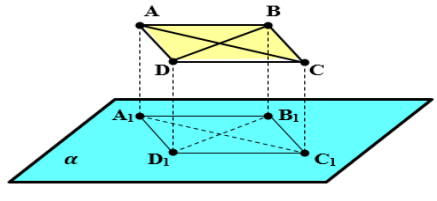
16.20. Какая из следующих сторон прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллельна грани $ABCD$?

A) D_1A_1AD; B) $D_1A_1B_1C_1$; C) ABB_1A_1; D) D_1C_1CD?



В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллельными являются грань $ABCD$ с вершиной A и грань и $A_1B_1C_1D_1$.

16.21. Две диагонали ромба параллельны плоскости α. Определите пространственное положение плоскости ромба и плоскости α.



$AC \parallel \alpha$, $BD \parallel \alpha$, $AC \parallel A_1C_1$, $BD \parallel B_1D_1$. $AC = A_1C_1$, $BD = B_1D_1$. Отсюда ромб $ABCD$ параллелен плоскости α.

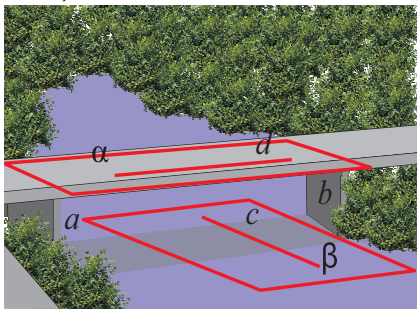
ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ (Контрольная работа 3)

1. Прочтите следующие предложения. В зависимости от значения предложений определите, всегда ли они верны, иногда верны или никогда не верны, и поместите знак «+» в соответствующий столбец. Прокомментируйте свой ответ.

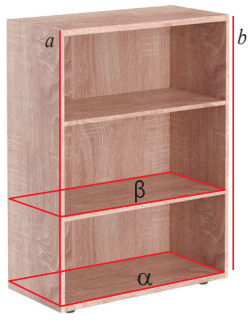
	Утверждение	Всегда	Иногда	Никогда
1	В пространстве две прямые не пересекаются.		+	
2	В пространстве две плоскости не пересекаются.		+	
3	В пространстве прямая и плоскость пересекаются.		+	
4	Прямые линии в пространстве будут скрещены.		+	
6	На плоскости прямые линии будут перекрещиваться.			+
7	Прямые, пересекающие плоскость, также пересекаются.		+	
8	Прямые, параллельные плоскости, пересекаются.		+	

2. На рисунке некоторые объекты изображены как символы пространственных геометрических фигур. Какие пространственные геометрические фигуры вы видите? Определите и запишите, как они взаимодействуют друг с другом.

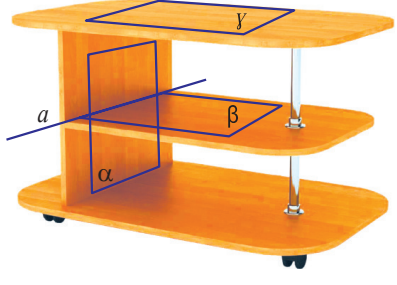
a)



b)



c)



a) $\alpha \parallel \beta$; $d \div c$; $d \parallel \beta$; $d \subset \alpha$; $c \parallel \alpha$; $c \subset \beta$;

b) $a \parallel b$; $\alpha \parallel \beta$; $a \perp \beta$; $a \perp \alpha$; $b \perp \beta$; $b \perp \alpha$;

c) $\alpha \perp \beta$; $\alpha \perp \gamma$; $\beta \parallel \gamma$; $\alpha \cap \beta = a$; $a \parallel \gamma$.

3. Как называются прямые, лежащие в одной плоскости и имеющие одну общую точку?

A) скрещивающиеся, B) пересекающиеся, C) параллельные.

Прямые, лежащие в одной плоскости и имеющие одну общую точку, называются пересекающимися.

Ответ: B.

4. Сколько общих точек могут иметь скрещивающиеся прямые?

A) 1 B) 0 D) 2

Скрещивающиеся прямые не могут иметь общих точек.

Ответ: B.

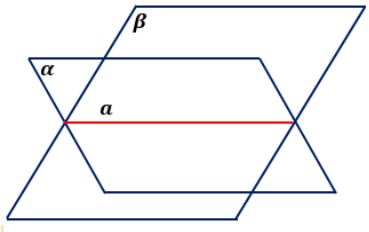
5. Как называются прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общей точки?

A) скрещивающиеся, B) пересекающиеся, C) параллельные.

Прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общей точки, называются параллельными.

Ответ: C.

6. Докажите, что через прямую можно провести две разные плоскости.



$$\begin{cases} \alpha \nparallel \beta \\ a \subset \alpha \\ a \subset \beta \end{cases} \rightarrow$$ Прямая a является линией пересечения плоскостей α и β.

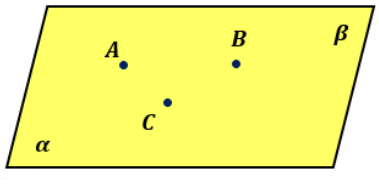
7. Даны четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько плоскостей можно провести через три из них?

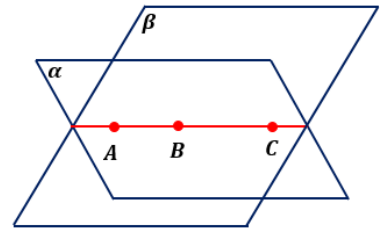
Чтобы провести плоскость нужны три точки.

$$C_4^3 = \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{4}{1} = 4.$$ **Ответ:** 4.

8. Точки A, B, C лежат в каждой из двух различных плоскостей. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой.

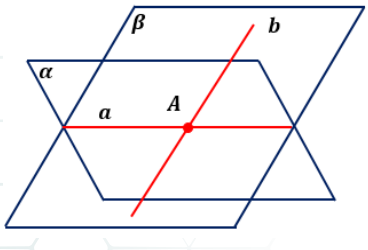
$A \in \alpha;$ $B \in \alpha;$ $C \in \alpha;$ $A \in \beta;$ $B \in \beta;$ $C \in \beta.$





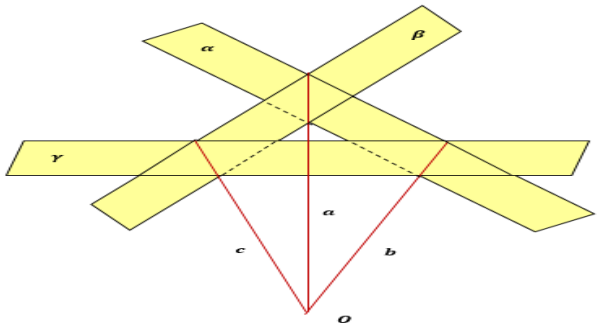
Случай 1. α и β совпадают друг с другом. **Случай 2.** Плоскости α и β пересекаются.

9. Даны две плоскости, пересекающиеся по прямой a. Прямая b лежит на одной из них и пересекает другую. Докажите, что прямые a и b пересекаются.



$$\begin{cases} \alpha \cap \beta = a \\ b \subset \alpha \\ \beta \cap b = A \end{cases} \rightarrow \quad a \cap b = A.$$

10. Даны три различные попарно пересекающиеся плоскости. Докажите, что если две из прямых пересечения этих плоскостей пересекаются, то третья прямая проходит через точку их пересечения.



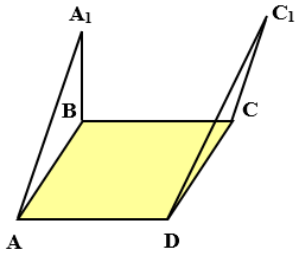
$\alpha \cap \beta = a;$
$\alpha \cap \gamma = b;$
$\beta \cap \gamma = c;$
$a \cap b = O;$
$a \cap c = O;$
$b \cap c = O.$

11. Докажите, что если в пространстве диагонали четырёхугольника пересекаются, то его вершины лежат в одной плоскости. Как называются прямые, изображённые на рисунке ?

A) скрещивающиеся B) пересекающиеся C) четырёхугольник D) параллельные

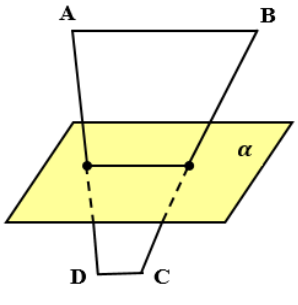
Ответ: $C.$

12. Через вершины A и C параллелограмма $ABCD$ проведены параллельные прямые A_1A и C_1C, не лежащие в плоскости параллелограмма. Докажите, что плоскости A_1AB и C_1CD параллельны.



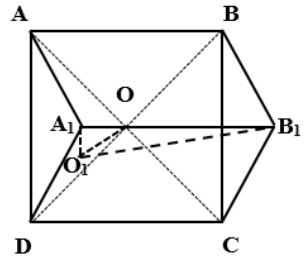
$$\begin{cases} AB \parallel CD \\ AA_1 \parallel CC_1 \end{cases} \rightarrow \quad A_1AB \parallel C_1CD$$

13. Основания трапеции параллельны некоторой плоскости. Могут ли стороны трапеции быть параллельны этой плоскости? Обоснуйте ответ.



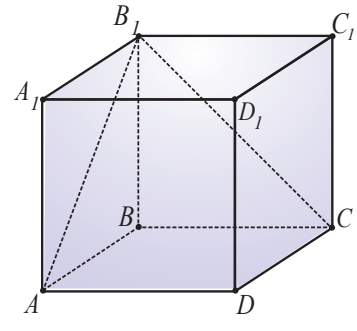
$$\begin{cases} AB \parallel \alpha \\ CD \parallel \alpha \\ BC \nparallel AB \\ AD \parallel CD \end{cases} \rightarrow \quad BC \nparallel \alpha \ ; \quad AD \nparallel \alpha$$

14. . Известно, что проекции вершин A и B квадрата и точки пересечения его диагоналей O состоят из точек A_1, B_1 и O_1. Изобразите проекцию квадрата $ABCD$.



15. По рисунку определите, как расположены заданная прямая и плоскость, и поставьте между ними соответствующие символы (⊗ – пересечение, // – параллельность, ÷ – скрещивание и ⊂ – принадлежность).

прямые/ плоскости	AA_1	BC_1	CC_1	CB_1	AB_1
ADD_1	⊗	∥	∥	∥	⊗
AA_1B_1	⊗	÷	∥	⊗	⊗
ABD	⊗	⊗	÷	÷	⊗
AA_1D	⊗	∥	∥	∥	⊗
BCD	÷	⊗	⊗	⊗	÷

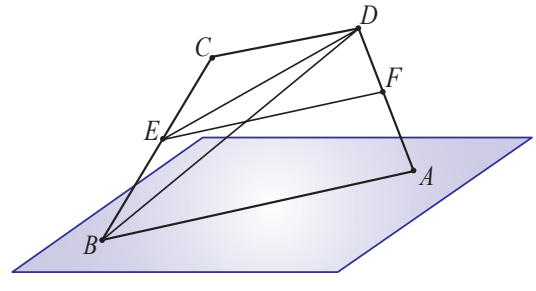


16. Основание AB трапеции ABCD на рисунке лежит в плоскости α, а основание CD не лежит в плоскости α. Дополните предложения, выражающие взаимное расположение данных прямых и плоскости α:

Ответ:

а) поскольку прямая DB имеет общую точку с данной плоскостью, то она пересекается с плоскостью α;

б) поскольку средняя линия трапеции EF параллельна ее основаниям, то она параллельна плоскости.



17. Точки D и E на сторонах AB и AC треугольника ABC на рисунке 4 обозначены таким образом, что DE = 5 cm и AD : BD = 3 : 4. Из точек B и C проведена плоскость, параллельная отрезку DE. Найдите длину отрезка BC.

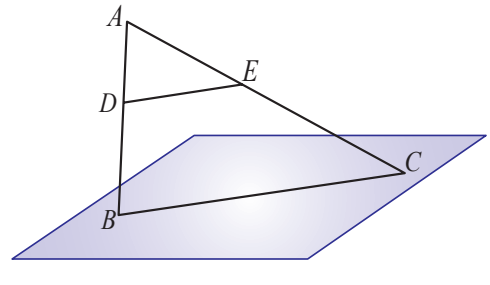
$DE = 5\ cm;\ DE \parallel \alpha;\ DE \parallel BC;\ AD : BD = 3 : 4;$

$\Delta ADE \sim \Delta ABC;\ AD = 3x;\quad AB = 7x;$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC};\quad \frac{3}{7} = \frac{5}{BC};$$

$$BC = \frac{7 \cdot 5}{3} = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}$$

Ответ: $BC = 11\frac{2}{3}\ cm.$



IV. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

УРОК 1. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНАЯ ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.GSH.10. Может представлять прямые, перпендикулярные плоскости.

– M10.GO‘.MM.09. Знает признаки перпендикулярности прямой к плоскости и умеет использовать их при решении задач.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

- знать признаки перпендикулярности прямой к плоскости.

Навыки:

- знать признаки перпендикулярности прямой к плоскости и уметь использовать их при решении задач.

III. Краткое описание содержания урока:

– свойства перпендикулярных прямых в пространстве. Признаки перпендикулярности прямых. Обобщённая теорема Пифагора.

IV. Оборудование и наглядные пособия:

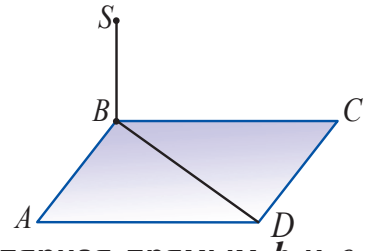
- модели пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Какие прямые в пространстве будут взаимно перпендикулярными? Приведите примеры.	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме 1, 2
Формирование и закрепление знаний	Свойства перпендикулярных прямых в пространстве.	Работа по учебнику	Вопросы по теме 3 Практическое упражнение и приложение 17.1
	Признаки перпендикулярности прямых.	Работа по учебнику	Вопросы по теме 4 Практическое упражнение и приложение 17.2
	Обобщённая теорема Пифагора.	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 17.3, 17.4
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 17.5, 17.6, 17.7, 17.8
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 17.9-17.12		

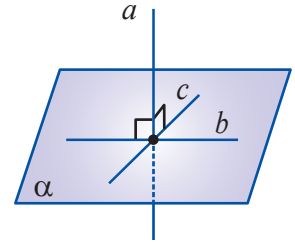
17.2. Отрезок SB перпендикулярен плоскости параллелограмма $ABCD$. Назовите прямые, которым перпендикулярен отрезок SB.

$SB \perp BD;$ $SB \perp AB;$ $SB \perp BC.$



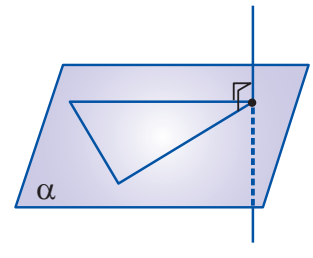
17.3. На рисунке изображена прямая a, перпендикулярная прямым b и c, лежащим в плоскости α. Докажите, что $a \perp \alpha$.

$$\begin{cases} b \subset \alpha \\ c \subset \alpha \\ a \perp b \\ a \mid c \end{cases} \rightarrow \quad a \perp \alpha .$$



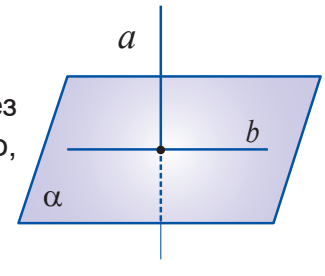
17.4. Прямая линия на рисунке перпендикулярна двум сторонам треугольника. Докажите, что она перпендикулярна плоскости треугольника.

Угол α принадлежит плоскости и проходит через вершину угла другой прямой, перпендикулярной сторонам угла. Чтобы прямая была перпендикулярна плоскости, достаточно, чтобы прямая была перпендикулярна двум пересекающимся прямым, проходящим через точку пересечения прямой с плоскостью. Следовательно, прямая на рисунке перпендикулярна плоскости треугольника.



17.5. На рисунке $a \perp \alpha$. Докажите, что прямая a также перпендикулярна прямой b, лежащей в плоскости α.

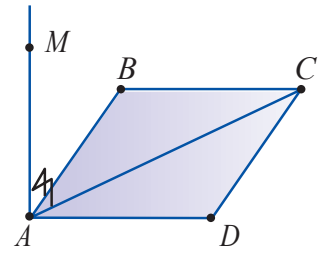
Прямая a перпендикулярна любой прямой, проходящей через точку, в которой она пересекает плоскость α. Следовательно, $a \perp b$.



17.6. На рисунке прямая MA проведена перпендикулярно вершине A прямоугольника $ABCD$. Если $MA \perp AB$ и $MA \perp AC$ докажите, что $MA \perp AD$.

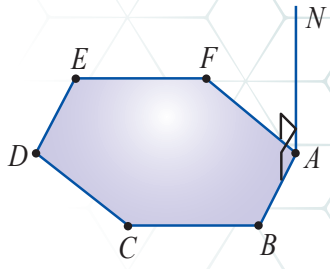
$\begin{cases} NA \perp AB \\ NA \perp AF \end{cases} \rightarrow$ Любая прямая на плоскости, проходящая через точку A, перпендикулярна MA.

Следовательно, $MA \perp AD$.



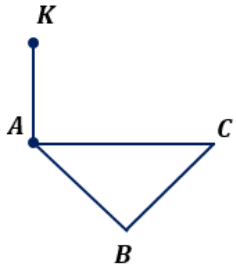
17.7. На рисунке прямая NA проведена перпендикулярно концу A шестиугольника $ABCDEF$. Если $NA \perp AB$ и $NA \perp AF$, то докажите, что: a) $NA \perp AC$; b) $NA \perp AD$; c) $NA \perp AE$.

$\begin{cases} MA \perp AB \\ MA \perp AC \end{cases} \rightarrow$ NA перпендикулярна любой прямой в плоскости, проходящей через точку A



Значит, a) $NA \perp AC$. b) $NA \perp AD$. c) $NA \perp AE$.

17.8. Из точки A треугольника ABC проведена прямая AK, перпендикулярная его сторонам AB и AC. Докажите, что эта прямая перпендикулярна высоте, медиане и биссектрисе треугольника, проведённого из точки A.



$\begin{cases} AK \perp AC \\ AK \perp AB \end{cases}$ проходят через точку A и перпендикулярны произвольной прямой, лежащей в плоскости треугольника. Следовательно, высота, медиана и биссектрисы, проведенные из точки A перпендикулярны AK.

Домашнее задание

17.9. Прямая перпендикулярна сторонам AB и AC треугольника ABC. Определите пересечение прямой и плоскости треугольника ABC.

А) Прямая пересекает плоскость ABC, но не перпендикулярна ей.

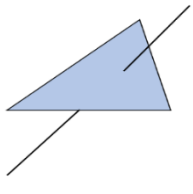
Б) Прямая принадлежит плоскости ABC.

В) Прямая перпендикулярна плоскости ABC.

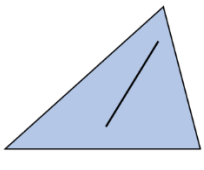
Г) Прямая параллельна плоскости ABC.

Решение: $l \perp AB;\ l \perp AC$.

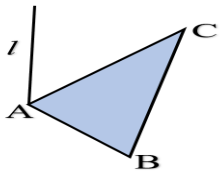
А) Прямая пересекает плоскость ABC, но не перпендикулярна ей.



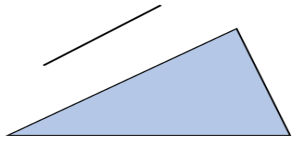
Б) Прямая принадлежит плоскости ABC.



В) Прямая перпендикулярна плоскости ABC.

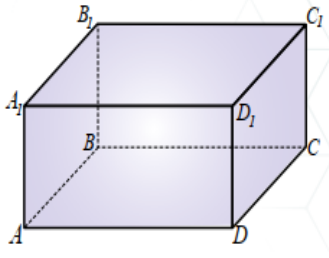


Г) Прямая параллельна плоскости ABC.



Ответ: В

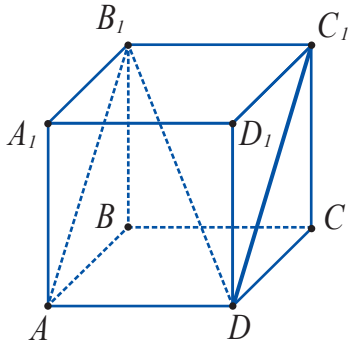
17.10. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что: а) прямая DD_1 перпендикулярна стороне $ABCD$; б) прямая AD перпендикулярна стороне DD_1CC_1.



а) В параллелепипеде боковые рёбра перпендикулярны основаниям. $DD_1 \perp ABCD$.

b) Так как основание в параллелепипеде прямоугольник и $AD \perp DC$, отсюда следует, что $AD \perp DCC_1D_1$.

17.11. На рисунке показан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что а) AB_1D – прямоугольный треугольник; б) AB_1C_1D – правильный прямоугольник.

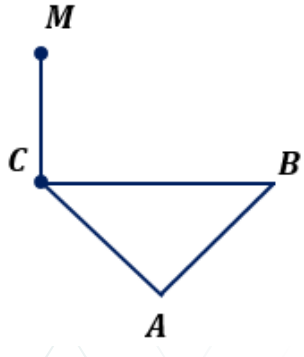


Так как все связанные рёбра куба взаимно равные и перпендикулярные, то

а) $AD \perp AA_1B_1B$ в A_1BD, следовательно $AB_1 \perp AD$.

b) $\begin{cases} AB_1 \perp AD \\ AB_1 \perp B_1C_1 \\ DC_1 \perp AD \\ DC_1 \perp B_1C_1 \end{cases}$ $\rightarrow AB_1C_1D$ – прямоугольник.

17.12. Прямая CM перпендикулярна плоскости треугольника ABC ($\angle C = 90°$). Докажите, что: а) прямая BC перпендикулярна плоскости, на которой лежат прямые AC и CM; б) прямая AC перпендикулярна плоскости прямых BC и AC и CM.



а) $\begin{cases} BC \perp CM \\ BC \perp AC \end{cases}$ → также перпендикулярна плоскости, проходящей через CM и AC.

→ также перпендикулярна плоскости, проходящей через CM и BC.

УРОК 2. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНАЯ ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.GSH.10. Может представлять прямые, перпендикулярные плоскости.

– M10.GO‘.MM.09. Знает признаки перпендикулярности прямой к плоскости и умеет использовать их при решении задач.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

- знать признаки перпендикулярности прямой к плоскости.

Навыки:

- знать признаки перпендикулярности прямой к плоскости и уметь использовать их при решении задач.

III. Краткое описание содержания урока:

– свойства перпендикулярных прямых в пространстве. Признаки перпендикулярности прямых. Обобщённая теорема Пифагора.

IV. Оборудование и наглядные пособия:

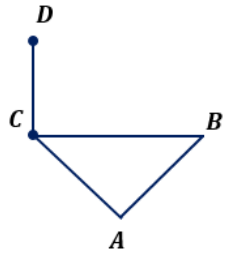
- модели пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Какие прямые в пространстве будут взаимно перпендикулярными? Приведите примеры.	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме 4
Формирование и закрепление знаний	Свойства перпендикулярных прямых в пространстве	Работа по учебнику	Вопросы по теме 5 Практическое упражнение и приложение 17.13
	Признаки перпендикулярности прямых	Работа по учебнику	Вопросы по теме 6 Практическое упражнение и приложение 17.14
	Обобщённая теорема Пифагора	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 17.15, 17.16
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 17.17, 17.18, 17.20
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 17.21-17.24		

17.13. Прямая CD перпендикулярна стороне BC треугольника ABC ($\angle C = 90°$). Определите и интерпретируйте взаимно перпендикулярные прямые и плоскости.

скачано с сайта www.idum.uz



$\begin{cases} BC \perp CD \\ AC \perp BC \end{cases}$ → перпендикулярные рёбра.

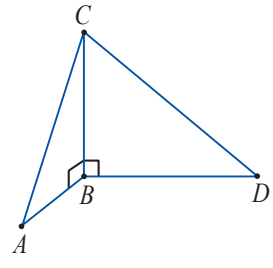
Плоскость, проходящая через AC и CD перпендикулярна ABC.

17.14. Прямоугольные треугольники ABC и DBC на рисунке лежат в разных плоскостях и пересекаются по прямой BC. Какие прямые и плоскости взаимно перпендикулярны? Обоснуйте свой ответ.

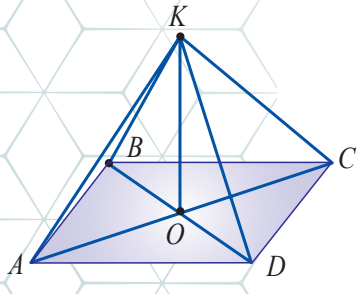
$AB \perp BC$.

$BD \perp BC$.

$ABD \perp BC$.



17.15. Прямая KO перпендикулярна плоскости параллелограмма $ABCD$. Определите прямую, перпендикулярную прямой KO.

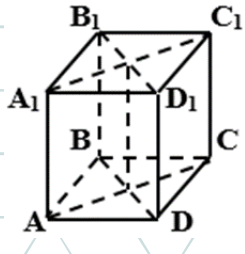


$KO \perp ABCD$; $KO \perp AC$, $KO \perp BD$.

17.16. Прямая MB перпендикулярна сторонам AB и BC треугольника ABC. Если точка X является произвольной точкой на стороне AC, определите тип треугольника MBX.

Так как $MB \perp AB$, $MB \perp BC$ и $\Delta ABC \perp MB$. ΔMBX угол B равен 90°. Значит, MBX – прямоугольный треугольник.

17.17. Стороны прямоугольника $ABCD$ параллельны сторонам прямоугольника $A_1 B_1 C_1 D_1$ Докажите, что $ABCD$ – прямоугольник.



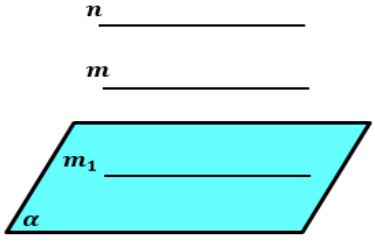
$AB \parallel A_1 B_1$, $BC \parallel B_1 C_1$, $CD \parallel C_1 D_1$, $AD \parallel A_1 D_1$,

$A_1 B_1 \perp B_1 C_1$, $B_1 C_1 \perp C_1 D_1$, $C_1 D_1 \perp A_1 D_1$, $A_1 D_1 \perp A_1 B_1$.

значит, $AB \perp BC$, $BC \perp CD$, $CD \perp AD$, $AD \perp AB$.

$ABCD \parallel A_1 B_1 C_1 D_1$ следует,что $ABCD$ -прямоугольник.

17.18. Плоскость α перпендикулярна прямой m, а прямая m_1 параллельна прямой n. Докажите, что плоскость α также перпендикулярна прямой n.

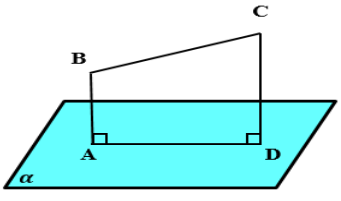


$\alpha \| m, \quad m \| n. \quad \alpha \notin m, \quad \alpha \notin n.$

$\alpha \in m_1, \ m \| m_1, \ n \| m_1.$

Отсюда следует, что $n \| \alpha$.

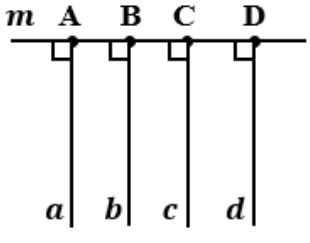
17.19. Прямая, на которой лежит основание AB трапеции ABCD, перпендикулярна плоскости α. Докажите, что линия основания CD этой трапеции также перпендикулярна плоскости α.



$AB \| CD, \ \alpha \in AD, \ AB \nparallel BC, \ CD \nparallel BC, \ AB \perp AD, \ CD \perp AD.$

Отсюда следует, что $AB \perp \alpha, \ CD \perp \alpha.$

17.20. Докажите, что из любой точки пространства можно провести прямую, перпендикулярную прямой.



$m \in A, \quad m \in B, \quad m \in C, \quad m \in D.$

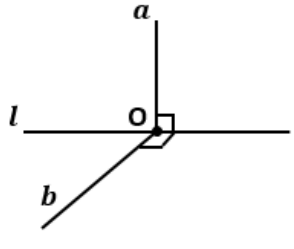
$a \cap m = A, \quad b \cap m = B, \quad c \cap m = C, \quad d \cap m = D.$

$a \| b, \quad b \| c, \quad c \| d, \quad a \| c, \quad a \| d, \quad b \| d.$

$m \perp a, \quad m \perp b, \quad m \perp c, \quad m \perp d.$

Домашнее задание

17.21. Докажите, что из любой точки прямой в пространстве можно провести две различные перпендикулярные прямые.



$l \in O, \quad l \perp a, \quad l \perp b, \quad a \perp b.$

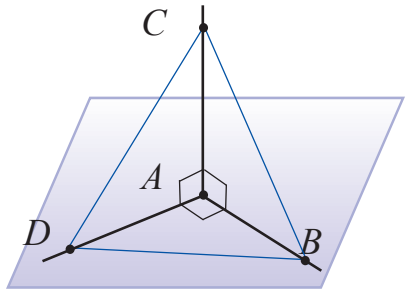
17.22. Прямые AB, AC, AD попарно перпендикулярны друг другу . Найдите длину отрезка CD, если:

a) $AB = 3$ *cm*, $BC = 7$ *cm*, $AD = 1{,}5$ *cm*;

b) $BD = 9$ *cm*, $BC = 16$ *cm*, $AD = 5$ *cm*;

c) $AB = b$ *cm*, $BC = a$ *cm*, $AD = d$ *cm*;

d) $BD = c$ *cm*, $BC = a$ *cm*, $AD = d$ *cm*.



Дано: a) $AB = 3$ cm, $BC=7$ cm, $AD = 1{,}5$ cm;

Найти: $CD=?$

$AC^2 = BC^2 – AB^2 = 7^2 – 3^2 = 49 – 9=40$ cm;

$AC = \sqrt{40}$ cm;

$CD^2 = AD^2 + AC^2 = (1{,}5\ cm)^2 + (\sqrt{40}\ cm)^2 = 2{,}25\ cm^2 + 40\ cm^2 =$

$= 42{,}25\ cm^2$. $CD = \sqrt{(42{,}25\ cm^2)} = 6{,}5$ cm.

Ответ: $CD=6{,}5$ cm.

Дано: b) $BD = 9$ cm, $BC = 16$ cm, $AD = 5$ cm. Найти: $CD = ?$

$AB^2 = BD^2 – AD^2 = (9\ cm)^2 – (5\ cm)^2 = 81\ cm^2 – 25\ cm^2 = 56\ cm^2$;

$AB = \sqrt{(56\ cm^2)} = 2\sqrt{14}$ cm;

$AC^2 = BC^2 – AB^2 = (16\ cm)^2 – (\sqrt{56}cm)^2 = 256\ cm^2 – 56\ cm^2 = 200\ cm^2$;

$AC = \sqrt{(200\ cm^2)} = 10\sqrt{2}$ cm;

$CD^2 = AC^2 – AD^2 = (10\sqrt{2}\ cm)^2 + (5\ cm)^2 = 200\ cm^2 + 25\ cm^2 = 225\ cm^2$;

$CD = \sqrt{(225\ cm^2)} = 15$ cm.

Ответ: $CD = 15$ cm.

Дано: c) $AB = b$ cm, $BC = a$ cm, $AD = d$ cm.

Найти: $CD = ?$

$AC^2 = a^2-b^2$; $CD^2 = AC^2 + AD^2 = a^2 - b^2 + d^2$; $CD = \sqrt{(a^2 - b^2 + d^2)}$

Ответ: $\sqrt{(a^2 - b^2 + d^2)}$.

Дано: d) $BD = C$ cm, $BC=a$ cm, $AD = d$ cm. Найти: $CD = ?$

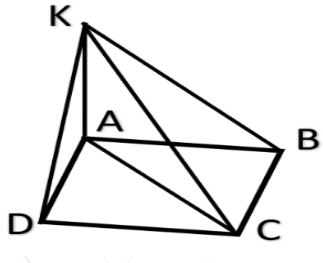
$AB^2 = BD^2 - AD^2=c^2 - d^2$; $AC^2 = BC^2 - AB^2 = a^2 - c^2 + d^2$;

$CD^2 = AC^2 + AD^2=a^2-c^2+d^2 + d^2 = a^2 - c^2 + 2d^2$;

$CD = \sqrt{(a^2 - c^2 + 2d^2)}$.

Ответ: $CD = \sqrt{(a^2 - c^2 + 2d^2)}$.

17.23. Из вершины A прямоугольника ABCD перпендикулярно его плоскости проведена прямая AK. Расстояние от точки K до других концов прямоугольника равно 6 m, 7 m, 9 m. Найдите расстояние AK.



Дано: $AK \perp ABCD$;

$KD = 6$ m; $KB = 7$ m; $KC = 9$ m;

$KD = 6$ m; $KB = 7$ m; $KC = 9$ m.

Найти: $AK = ?$

$AC^2 = AB^2 + AD^2$;

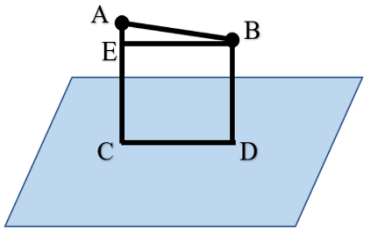
$$\begin{cases} AK^2 = KD^2 - AD^2 \\ AK^2 = KB^2 - AB^2 \\ AK^2 = KC^2 - (AB^2 + AD^2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} AK^2 = 6^2 - AD^2 \\ AK^2 = 7^2 - AB^2 \\ AK^2 = 9^2 - (AB^2 + AD^2) \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 6^2 - AD^2 = 7^2 - AB^2 \\ 6^2 - AD^2 = 9^2 - AB^2 - AD^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} AB^2 - AD^2 = 13 \\ AB^2 = 45 \end{cases}$$

$AK^2 = 49\text{-}45;\quad AK^2 = 4;\quad AK = 2.$

Ответ: $AK=2$ *m.*

17.24. Из точек A и B проведены прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие её в точках C и D соответственно. Если AC = 3 m, BD = 2 m, CD = 2,4 m и AB не пересекает плоскость α, найдите расстояние между A и B.



Дано: $AC=3$ *m;* $BD = 2$ *m;* $CD = 2{,}4$ *m;*

Найти: $AB = ?$

$AE = AC\text{-}EC = AC\text{-}BD = 3$ *m*$\text{-}2$ *m* $= 1$ *m;*

$$AB = \sqrt{CD^2 + AE^2};$$

$$AB = \sqrt{2{,}4^2 + 1^2} = \sqrt{6{,}76} = 2{,}6\ m.$$

Ответ: $AB = 2{,}6$ *m.*

УРОК 3. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНАЯ ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.GSH.10. Может представлять прямые, перпендикулярные плоскости.

– M10.GO‘.MM.09. Знает признаки перпендикулярности прямой к плоскости и умеет использовать их при решении задач.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

- знать признаки перпендикулярности прямой к плоскости.

Навыки:

- знать признаки перпендикулярности прямой к плоскости и уметь использовать их при решении задач.

III. Краткое описание содержания урока:

– свойства перпендикулярных прямых в пространстве. Признаки перпендикулярности прямых. Обобщённая теорема Пифагора.

IV. Оборудование и наглядные пособия:

- модели пространственных геометрических фигур.

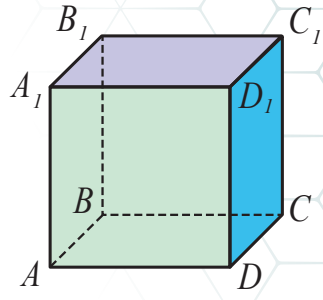
V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Какие прямые в пространстве будут взаимно перпендикулярными? Приведите примеры	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме 4
Формирование и закрепление знаний	Свойства перпендикулярных прямых в пространстве	Работа по учебнику	Вопросы по теме 5 Практическое упражнение и приложение 17.25, 17.26
	Признаки перпендикулярности прямых	Работа по учебнику	Вопросы по теме 6 Практическое упражнение и приложение 17.27, 17.28
	Обобщённая теорема Пифагора	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение: 17.29, 17.30
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 17.31
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 17.32-17.34		

17.25. Найдите периметр треугольника AB_1C и грань треугольника DAC_1, если ребро куба, изображённого на рисунке, равно а) 4 cm; б) 8 cm.

a) Дано: $AB = 4\ cm;$

Найти: $P_{AB_1C} = ?\quad S_{DAC_1} = ?$



$$AB_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1B_1^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2};$$

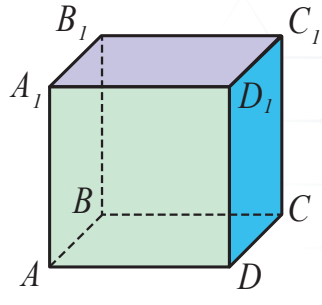
В треугольнике AB_1C, в $AB_1 = B_1C = AC;$

$$P_{AB_1C} = 3 \cdot 4\sqrt{2} = 12\sqrt{2}\ cm; \qquad S_{DAC_1} = \frac{4 \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}\ cm^2.$$

Ответ: $P_{AB_1C} = 12\sqrt{2}\ cm;\quad S_{DAC_1} = 8\sqrt{2}\ cm^2.$

b) Дано: $AB = 8\ cm;$

Найти: $P_{AB_1C} = ?\qquad S_{DAC_1} = ?$



$$AB_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1B_1^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2};$$

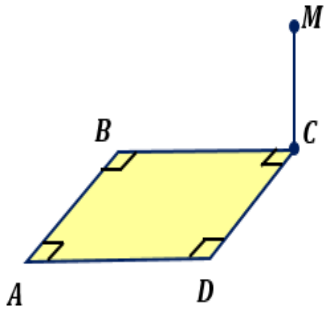
В треугольнике $AB_1C\quad AB_1 = B_1C = AC;$

$$P_{AB_1C} = 3 \cdot 8\sqrt{2}\ \ cm = 24\sqrt{2}\ \ cm;$$

$$S_{DAC_1} = \frac{AB \cdot AB_1}{2} = \frac{8\ cm \cdot 8\sqrt{2}\ cm}{2} = 4\ cm \cdot 8\sqrt{2}\ cm = 32\sqrt{2}\ cm^2;$$

Ответ: $P_{AB_1C} = 24\sqrt{2}\ cm; \qquad S_{DAC_1} = 32\sqrt{2}\ cm^2;$

17.26. Прямая CM перпендикулярна плоскости квадрата $ABCD$ (прямая a), $CM = b$. Найдите расстояния от точки M до концов квадрата, если $CM = b$. Если: a) $a = 2\ cm, b = 1\ cm;$ b) $a = 3\ cm, b = 4\ cm$.



$CM = b;\quad ABCD \perp CM;\quad CA = a\sqrt{2}\ cm;$

a) $a = 2\ cm;\quad b = 1\ cm.$

$$MB = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}\ cm;$$

$$MD = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}\ cm;$$

$$MA = \sqrt{AC^2 + b^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + b^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{8 + 1} = \sqrt{9} = 3\ cm.$$

Ответ: $MB = \sqrt{5}\ cm;\quad MD = \sqrt{5}\ cm;\quad MA = 3\ cm.$

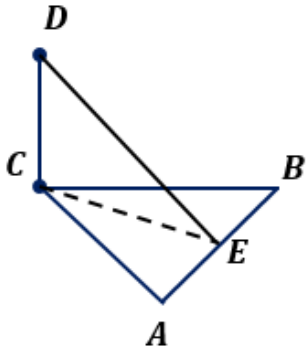
b) $a = 3\ cm;\ \ b = 4\ cm;$

$$MB = MD = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5\ cm;$$

$$MA = \sqrt{AC^2 + b^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + b^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{18 + 16} = \sqrt{34}\ cm.$$

Ответ: $MB = 5\ cm;\quad MD = 5\ cm;\quad MA = \sqrt{34}\ cm.$

17.27. Отрезок CD, проходящий через точку C, перпендикулярен плоскости прямоугольного треугольника ABC. Найдите расстояние от точки D до середины гипотенузы треугольника, если: a) $AC = 6\ cm,\ BC = 8\ cm,\ CD = 12\ cm;$ b) $AC = 12\ cm,\ BC = 16\ cm,\ CD = 24\ cm$.



$$AE = EB = \frac{AB}{2};$$

$a)\ AC = 6\ cm;\ BC = 8\ cm;\ CD = 12\ cm.\ DE = ?$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10\ cm;$$

$$AE = EB = CE = \frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5\ cm;$$

$$DE = \sqrt{CD^2 + CE^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13\ cm;$$

Ответ: $DE = 13\ cm$

$b)\ AC = 12\ cm;\quad BC = 16\ cm;\quad CD = 24\ cm.\quad DE = ?$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20\ cm;$$

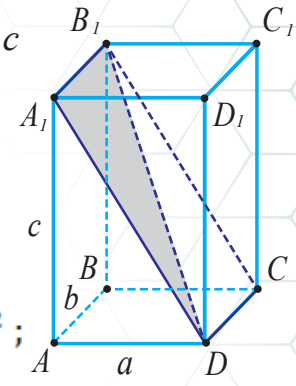
$$AE = EB = CE = \frac{AB}{2} = \frac{20}{2} = 10\ cm;$$

$$DE = \sqrt{CD^2 + CE^2} = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{576 + 100} = \sqrt{676} = 26\ cm;$$

Ответ: $DE = 26\ cm.$

17.28. Найдите площади треугольника A_1B_1D и прямоугольника A_1B_1CD, если размеры прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$:

a) $a = 12\ cm,\ b = 8\ cm,\ c = 16\ cm,$ **b)** $a = 5\ cm,\ b = 10\ cm,\ c = 12\ cm$.



$$A_1D = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = 20\ cm;$$

$A_1B_1 = b = 8\ cm;\ \angle B_1A_1D = 90°;$

$$S_{A_1B_1D} = \frac{A_1B_1 \cdot A_1D}{2} = \frac{8\ cm \cdot 20\ cm}{2} = \frac{160\ cm^2}{2} = 80\ cm^2;$$

$S_{A_1B_1CD} = 2 \cdot S_{A_1B_1D} = 2 \cdot 80\ cm^2 = 160\ cm^2$. **Ответ:** $80\ cm^2;\ 160\ cm^2$.

$b)\ a = 5\ cm;\ \ b = 10\ cm;\ \ c = 12\ cm.$

$$A_1D = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13\ cm;$$

$$A_1B_1 = b = 10\ cm;\quad \angle B_1A_1D = 90°;$$

$$S_{A_1B_1D} = \frac{A_1B_1 \cdot A_1D}{2} = \frac{10\ cm \cdot 13\ cm}{2} = \frac{130\ cm^2}{2} = 65\ cm^2;$$

$$S_{A_1B_1CD} = 2 \cdot S_{A_1B_1D} = 2 \cdot 65\ cm^2 = 130\ cm^2.$$

Ответ: $65\ cm^2;\ 130\ cm^2$.

17.29. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если a) $a = 12\ cm,\ b = 8\ cm,\ c = 16\ cm$; b) $a = 5\ cm,\ b = 10\ cm,\ c = 12\ cm$; d) $a = 2\ m,\ b = 12\ m,\ c = 6\ m$.

a) $a = 12\ cm;\ \ b = 8\ cm;\ \ c = 16\ cm.\ \ d = ?$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{12^2 + 8^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 64 + 256} = \sqrt{464} = 4\sqrt{29}\ cm.$$

Ответ: $d = 4\sqrt{29}\ cm$.

$b)\ \ a = 5\ cm;\ \ \ b = 10\ cm;\ \ \ c = 12\ cm.\ \ \ d = ?$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{5^2 + 10^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 100 + 144} = \sqrt{269}\ cm.$$

Ответ: $d = 4\sqrt{269}\ cm$.

$d)\ \ a = 2\ m;\ \ \ b = 12\ m;\ \ \ c = 6\ m.\ \ \ d = ?$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{2^2 + 12^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 144 + 36} = \sqrt{184} = 2\sqrt{46}\ m.$$

Ответ: $d = 2\sqrt{46}\ cm$.

17.30. Найдите диагональ правильного прямоугольного параллелепипеда, если его основание имеет сторону 4 cm и высоту 5 cm.

$a = 4\ cm;\quad b = 4\ cm;\quad h = 5\ m.\quad d = ?$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2} = \sqrt{4^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 16 + 25} = \sqrt{57}\ cm.$$

Ответ: $d = \sqrt{57}\ cm.$

Домашнее задание

17.31. Найдите высоту прямоугольного параллелепипеда, если его стороны равны 12 cm и 8 cm, а диагональ – 16 cm.

$a = 12\ cm;\quad b = 8\ cm;\quad d = 16\ cm.\quad h = ?$

$$h = \sqrt{d^2 - a^2 - b^2} = \sqrt{16^2 - 12^2 - 8^2} = \sqrt{256 - 144 - 64} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}\ cm.$$

Ответ: $h = 4\sqrt{3}\ cm.$

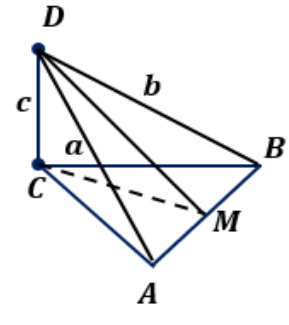
17.32. Через вершину C на плоскость треугольника ABC проведён перпендикулярный отрезок CD. Если $AD = a$, $BD = b$, $CD = c$, найдите медиану CM треугольника ABC.

$AD = a;\ BD = b;\ CD = c.\ \angle ACD = \angle BCD = \angle ACB = 90°;$

$AC = \sqrt{AD^2 - DC^2} = \sqrt{a^2 - c^2};$

$BC = \sqrt{BD^2 - DC^2} = \sqrt{b^2 - c^2};$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(a^2 - c^2) + (b^2 - c^2)} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2c^2};$$



$MA = MB;\quad CM = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2c^2}}{2}.$

$= \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2c^2}}{2}.$

Ответ: $CM.$

УРОК 4. ПЕРПЕНДИКУЛЯР, ДИАГОНАЛЬ И РАССТОЯНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.GSH.11. Иметь представление о перпендикулярах и диагоналях, приведённых к плоскости в пространстве;
– M10.GO‘.MM.12. Уметь применять связь между перпендикуляром и диагональю, приведённых к плоскости в пространстве при решении практических задач.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

- иметь представление о перпендикулярах и диагоналях, приведённых к плоскости в пространстве.
- знать связь между перпендикуляром и диагональю, приведённых к плоскости в пространстве.

Навыки:

- знать и уметь применять связь между перпендикуляром и диагональю, приведённых к плоскости в пространстве при решении практических задач.

III. Краткое описание содержания урока:

– перпендикуляр и диагональ, приведённые к плоскости в пространстве. Расстояние от точки до плоскости. Расстояние от прямой до параллельной ей плоскости. Расстояние между параллельными плоскостями. Расстояние между пересекающимися прямыми.

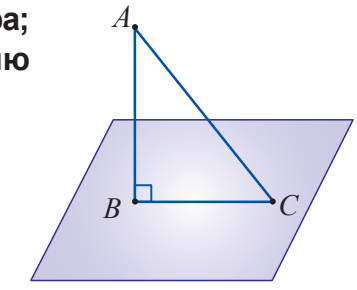
IV. Оборудование и наглядные пособия:

- кирпич-1шт.;модели различных плоских и пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Приведите примеры перпендикуляров, приведённых к плоскости	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме 1
Формирование и закрепление знаний	Перпендикуляр и диагональ, приведённые к плоскости в пространстве	Работа по учебнику	Вопросы по теме 2 Практическое упражнение и приложение 18.1
	Расстояния от точки до плоскости. Расстояние от прямой до параллельной ей плоскости	Работа по учебнику	Вопросы по теме 3 Практическое упражнение и приложение 18.2
	Расстояние между параллельными плоскостями. Расстояние между пересекающимися прямыми	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 18.3
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 18.4, 18.5
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 18.6, 18.7		

18.2. Определите и запишите проекцию: а) перпендикуляра; б) диагонали; в) основания перпендикуляра; г) проекцию диагонали на основание.



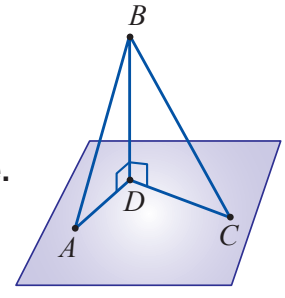
а) перпендикуляр - AB;

б) диагональ - AC;

в) основание перпендикуляра AB точка B;

г) проекция диагонали на основание - BC

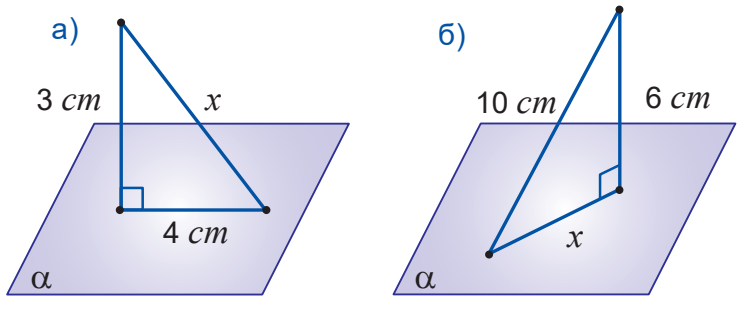
18.3. На рисунке отрезки AD и DC являются проекциями диагоналей AB и BC:



а) Если $AD > DC$, что можно сказать о диагоналях?

б) Если $AB = BC$, что можно сказать об их проекциях?

18.4. Найдите длины неизвестных отрезков на рисунке.



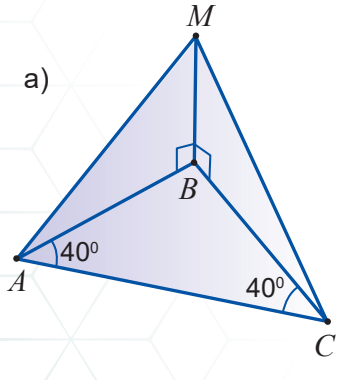
$$а)\ \ x = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5\ см.$$

Ответ: $x = 5\ см.$

$$б)\ \ x = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8\ см.$$

Ответ: $x = 8\ см.$

18.5. Сравните длины отрезков MA и MC, используя данные на рисунке.



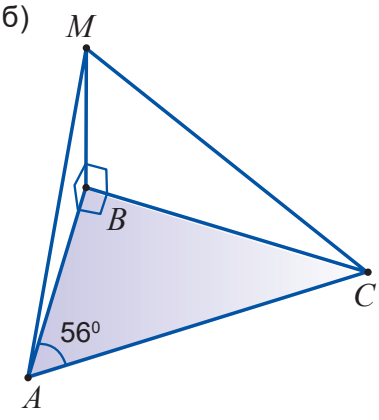
В ΔABC $\angle BAC = \angle BCA = 40°$. Значит,

$$\begin{cases} AB = BC \\ MB = \text{общая} \\ \angle ABM = \angle CBM = 90° \end{cases}$$

По признаку СУС,

$\Delta ABM = \Delta CBM$, тогда $MA = MC$.

б)



$\angle ABC = 90°;\quad \angle BAC = 56°;$

$\angle ACB = \angle ABC - \angle BAC = 90° - 56° = 34°;$

$\angle BAC > \angle ACB \rightarrow BC > AB;$

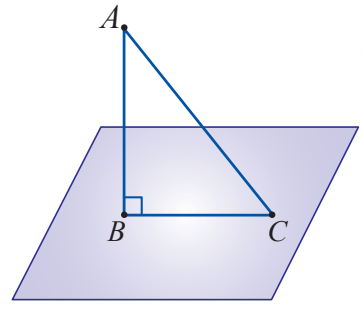
$MA = \sqrt{MB^2 + MA^2};\quad MC = \sqrt{MB^2 + BC^2};$

Значит, $MC > MA$.

Домашнее задание

18.6. Если отрезок AB – перпендикуляр, AC – диагональ, BC – проекция диагонали, заполните таблицу, используя данные.

AB	24	15	**10**	$3a$	12
BC	7	**20**	24	$4a$	**5**
AC	**25**	25	26	$5a$	13



$AB^2 + BC^2 = AC^2;$

1) $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{576 + 49} = \sqrt{625} = 25;$

2) $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{625 - 225} = \sqrt{400} = 20;$

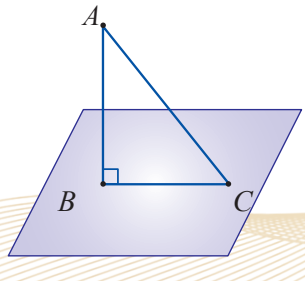
3) $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{26^2 - 24^2} = \sqrt{676 - 576} = \sqrt{100} = 10;$

4) $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{(5a)^2 - (4a)^2} = \sqrt{25a^2 - 16a^2} = \sqrt{9a^2} = 3a;$

5) $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5;$

18.7. Если AB – перпендикуляр, AC – диагональ, BC – проекция диагонали, α – угол между перпендикуляром и диагональю, заполните таблицу, используя данные.

AB	$3\sqrt{3}$	$4\sqrt{3}$	5	6	14
BC	3	4	5	12	14
AC	6	8	$5\sqrt{2}$	12	$14\sqrt{2}$
α	30°	30°	45°	60°	45°



$AB^2 + BC^2 = AC^2$;

$\sin\alpha = \frac{BC}{AC}$; $\cos\alpha = \frac{AB}{AC}$; $tg\alpha = \frac{BC}{AB}$; $ctg\alpha = \frac{AB}{BC}$;

1) $AC = 6$; $\alpha = 30°$; $\sin 30° = \frac{BC}{AC}$; $\frac{1}{2} = \frac{BC}{6}$; $BC = 3$;

$\cos 30° = \frac{AB}{AC}$; $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{6}$; $AB = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

2) $BC = 4$; $AC = 8$;

$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$;

$\sin\alpha = \frac{BC}{AC}$; $\sin\alpha = \frac{4}{8}$; $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; $\alpha = 30°$.

3) $AB = 5$; $\alpha = 45°$; $tg\alpha = \frac{BC}{AB}$; $tg45° = \frac{BC}{5}$; $1 = \frac{BC}{5}$; $BC = 5$;

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = 5\sqrt{2}$.

4) $AB = 6$; $AC = 12$;

$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{144 - 36} = \sqrt{108} = \sqrt{36 \cdot 3} = 6\sqrt{3}$;

$\sin\alpha = \frac{BC}{AC}$; $\sin\alpha = \frac{6\sqrt{3}}{12}$; $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\alpha = 60°$.

5) $AB = 14$; $BC = 14$;

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{14^2 + 14^2} = \sqrt{2 \cdot 14^2} = 14\sqrt{2}$;

$tg\alpha = \frac{BC}{AB}$; $tg\alpha = \frac{14}{14}$; $tg\alpha = 1$; $\alpha = 45°$.

УРОК 5. ПЕРПЕНДИКУЛЯР, ДИАГОНАЛЬ И РАССТОЯНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.GSH.11. Иметь представление о перпендикулярах и диагоналях, приведённых к плоскости в пространстве;

– M10.GO‘.MM.12. Уметь применять связь между перпендикуляром и диагональю, приведённых к плоскости в пространстве при решении практических задач.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

-Иметь представление о перпендикулярах и диагоналях, приведённых к плоскости в пространстве.

-Знать связь между перпендикуляром и диагональю, приведённых к плоскости в пространстве.

Навыки:

-Знать и уметь применять связь между перпендикуляром и диагональю, приведённых к плоскости в пространстве при решении практических задач.

III. Краткое описание содержания урока:

– Перпендикуляр и диагональ, приведённые к плоскости в пространстве. Расстояния от точки до плоскости. Расстояние от прямой до параллельной ей плоскости. Расстояние между параллельными плоскостями. Расстояние между пересекающимися прямыми.

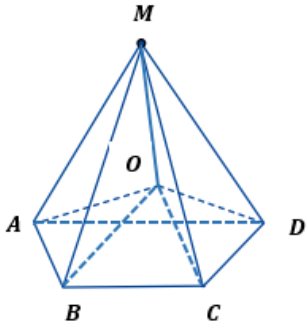
IV. Оборудование и наглядные пособия:

- кирпич-1шт.;модели различных плоских и пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Приведите примеры перпендикуляров, приведённых к плоскости.	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме 4
Формирование и закрепление знаний	Перпендикуляр и диагональ, приведённые к плоскости в пространстве	Работа по учебнику	Вопросы по теме 5 Практическое упражнение и приложение 18.8
	Расстояние от точки до плоскости. Расстояние от прямой до параллельной ей плоскости	Работа по учебнику	Вопросы по теме 6 Практическое упражнение и приложение 18.9
	Расстояние между параллельными плоскостями. Расстояние между пересекающимися прямыми.	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 18.10
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 18.11, 18.12
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 18.13, 18.14		

18.8. Из точки M на плоскость перенесены равные диагонали MA, MB, MC, MD. Каким прямоугольником является ABCD: а) квадратным; б) параллелограммом; в) прямоугольником. Обоснуйте свой ответ.



$x = MA = MB = MC = MD;$

$AO = BO = CO = DO = \sqrt{x^2 - MO^2}.$

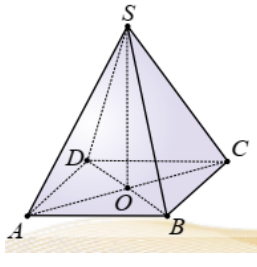
Можно начертить внешнюю окружность с центром в точке O на четырехугольнике $ABCD$.

а) является квадратным, так как можно начертить внешнюю окружность.

б) является параллелограммом, так как невозможно начертить внешнюю окружность.

в) является прямоугольником, так как можно начертить внешнюю окружность.

18.9. Если найдётся точка, равноудалённая от вершин параллелограмма, докажите, что этот параллелограмм является прямоугольным.

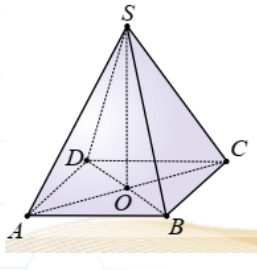


$SA=SB=SC=SD=x;$

$AO = BO = CO = DO = \sqrt{x2 - SO2}.$

На $ABCD$ можно нарисовать окружность с центром O. Значит, $ABCD$ – прямоугольник.

18.10. Докажите, что ромб является квадратом, если найдутся точки, равноудалённые от вершин ромба.



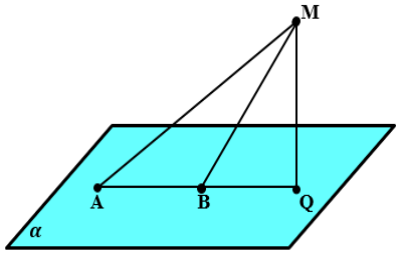
$SA = SB = SC = SD = x;$

$AO = BO = CO = DO = \sqrt{x2 - SO2}.$

На $ABCD$ можно нарисовать окружность с центром O. Значит, $ABCD$ –прямоугольник.

По условию $ABCD$ – ромб, то $AB = BC = CAD$. Отсюда следует, что $ABCD$ – квадрат.

18.11. Точки A, B, Q принадлежат плоскости α, а точка M ей не принадлежит, отрезок $MQ \perp \alpha$. Какой из отрезков MA, AQ, MQ, BQ, MB является: а) перпендикуляром; б) диагональю; в) проекцией?



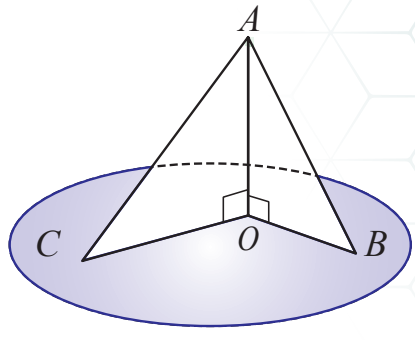
$A \in \alpha,\ B \in \alpha,\ Q \in \alpha,\ M \notin \alpha,\ MQ \perp \alpha.$

а) перпендикуляр: $AQ \perp MQ,\ BQ \perp MQ.$

б) диагональ $MA,\ MB.$

в) проекция диагонали: $AQ,\ BQ.$

18.12. Из точки A к плоскости α проведены диагонали AB и AC и перпендикулярный отрезок AO. Если $AB = 2{,}5$ *cm*, $AC = 3$ *cm*, сравните проекции сторон.



Дано: $AB = 2{,}5$ *cm*; $AC = 3$ *cm*.

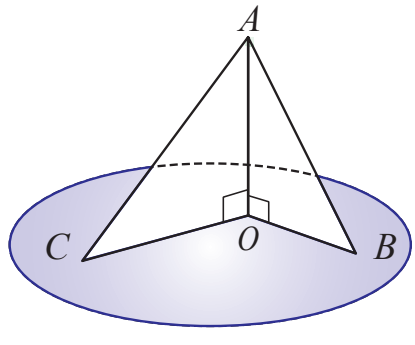
Сравнить: CO и OB, $3^2 - AO^2 > 2{,}5^2 - AO^2$;

$CO^2 = AC^2 - AO^2$; $9^2 - AO^2 > 6{,}25^2 - AO^2$;

$OB^2 = AB^2 - AO^2$; $CO^2 > OB^2$.

Домашнее задание

18.13. Из точки к плоскости проведены две диагонали. Если одна из диагоналей длиннее другой на 26 cm, а проекции равны 12 cm и 40 cm, найдите длины этих сторон.



Дано: $AC = x + 26$; $AB = x$; $CO = 40$ *cm*;

$OB = 12$ *cm*; Найти: $AC,\ AB - ?$

$(x + 26)^2 - 40^2 = AO^2$; $x^2 - 122 = AO^2$;

$(x + 26)^2 - 40^2 = x^2 - 122$;

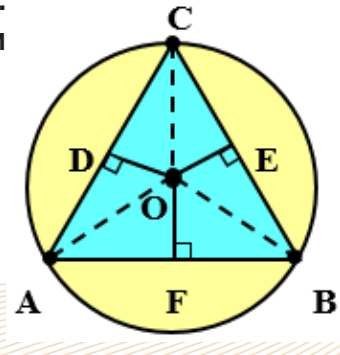
$x^2 + 52x + 676 - 1600 = x^2 - 144$;

$52x - 924 = -144$; $52x = -144 + 924$;

$52x = 780$; $x = 780 : 52$; $x = 15$; $AB = 15$ *cm*; $AC = 15 + 26 = 41$.

Ответ: *15 cm; 41 cm.*

18.14. Прямая линия, перпендикулярная плоскости треугольника, проводится из центра окружности, проведённой вне треугольника. Докажите, что все точки этой прямой лежат на равном расстоянии от вершин треугольника.



$OD \perp AC,\ OE \perp BC,\ OF \perp AB.$

$r = OD = OE = OF,\ R = AO = BO = CO.$

$AD = AF,\ BF = BE,\ CE = CD.$

$AF = FB,\ BE = EC,\ AD = DC.$

УРОК 6. ПЕРПЕНДИКУЛЯР, ДИАГОНАЛЬ И РАССТОЯНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.GSH.11. Иметь представление о перпендикулярах и диагоналях, приведённых к плоскости в пространстве;

– M10.GO‘.MM.12. Уметь применять связь между перпендикуляром и диагональю, приведённых к плоскости в пространстве при решении практических задач.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

- иметь представление о перпендикулярах и диагоналях, приведённых к плоскости в пространстве.

- знать связь между перпендикуляром и диагональю, приведённых к плоскости в пространстве.

Навыки:

- знать и уметь применять связь между перпендикуляром и диагональю, приведённых к плоскости в пространстве при решении практических задач.

III. Краткое описание содержания урока:

– перпендикуляр и диагональ, приведённые к плоскости в пространстве. Расстояния от точки до плоскости. Расстояние от прямой до параллельной ей плоскости. Расстояние между параллельными плоскостями. Расстояние между пересекающимися прямыми.

IV. Оборудование и наглядные пособия:

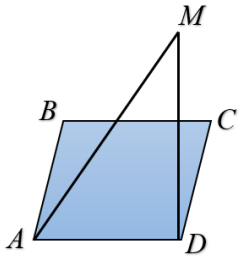
- кирпич-1шт.; модели различных плоских и пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Приведите примеры перпендикуляров, приведённых к плоскости.	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме 7
Формирование и закрепление знаний	Перпендикуляр и диагональ, приведённые к плоскости в пространстве	Работа по учебнику	Вопросы по теме 7 Практическое упражнение и приложение 18.15
	Расстояние от точки до плоскости. Расстояние от прямой до параллельной ей плоскости	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 18.16
	Расстояние между параллельными плоскостями. Расстояние между пересекающимися прямыми.	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 18.17
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 18.18

Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 18.17, 18.18

18.15. На плоскость квадрата $ABCD$ опущен перпендикулярный отрезок DM. Найдите длину диагонали MA, если площадь квадрата: a) $21\ cm^2$; b) $96\ cm^2$; c) $44\ cm^2$; d) $69\ cm^2$; e) $156\ cm^2$.



Дано: a) $S = a^2 = 21\ cm^2;\ DM = 10\ cm.$

Найти: $MA=?$

$MA^2 = AD^2 + MD^2;\quad MA = \sqrt{21 + 100} = 11\ cm.$

Ответ: $MA = 11\ cm.$

b) Дано: $S = a^2 = 96\ cm^2;\quad DM = 10\ cm.$

Найти: $MA = ?$

$MA^2 = AD^2 + MD^2;\quad MA = \sqrt{96 + 100} = 14\ cm.$

Ответ: $MA = 14\ cm.$

c) Дано: $S = a^2 = 44\ cm^2;\quad DM = 10\ cm.$ Найти: $MA = ?$

$MA^2 = AD^2 + MD^2;\quad MA = \sqrt{44+100}=12\ cm.$

Ответ: $MA = 12\ cm.$

d) Дано: $S = a^2 = 69\ cm^2;\quad DM = 10\ cm.$ Найти: $MA = ?$

$MA^2 = AD^2 + MD^2;\quad MA = \sqrt{69 + 100} = 13\ cm.$

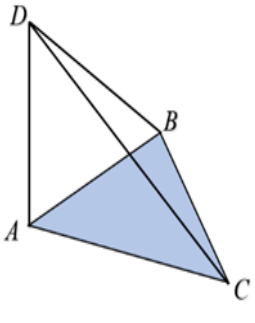
Ответ: $MA = 13\ cm.$

e) Дано: $S = a^2 = 156\ cm^2;\ DM = 10\ cm.$ Найти: $MA = ?$

$MA^2 = AD^2 + MD^2;\quad MA = \sqrt{(156 + 100)} = 16\ cm.$

Ответ: $MA = 16\ cm.$

18.16. От вершины острого угла треугольника ABC с прямым углом C проведена прямая AD, перпендикулярная плоскости треугольника. Если $AC = c$, $BC = b$ и $AD = c$ найдите расстояния от точки D до вершин B и C.



Дано: $AC = c,\quad BC = b,\quad AD = c.$

Найти: $BD = ?\quad CD = ?$

$CD^2 = AC^2 + AD^2 = c^2 + c^2 = 2c^2;\qquad CD = \sqrt{2}\,c.$

$AB^2 = BC^2 + AC^2 = b^2 + c^2;$

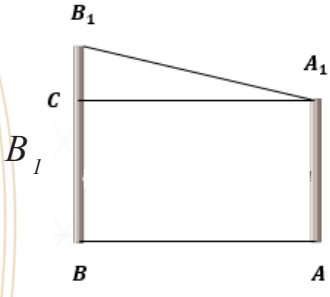
$BD^2 = AD^2 + AB^2 = c^2 + b^2 + c^2 = b^2 + 2c^2;$

$BD = \sqrt{b^2 + 2c^2}.$

Ответ: $CD = \sqrt{2}c; \quad BD = \sqrt{b^2 + 2c^2}.$

Домашнее задание

18.17. Вершины колонн, стоящих друг от друга на расстоянии 4,2 m, соединены балкой. Найдите длину балки, если высоты колонн 5,8 m и 4,1 m.



$AB = 4{,}2\ m;\ AA_1 = 4{,}1\ m;\ BB_1 = 5{,}8\ m.\ A_1B_1 = ?$

$AA_1 = BC = 4{,}1\ m; \quad A_1C = AB = 4{,}2\ m;$

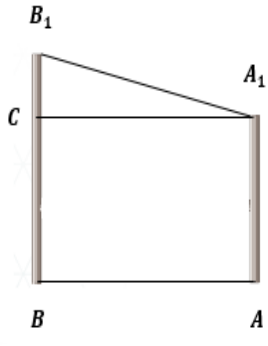
$C = BB_1 - BC = 5{,}8\ m - 4{,}1\ m = 1{,}7\ m;$

$$A_1B_1 = \sqrt{A_1C^2 + B_1C^2} = \sqrt{(4{,}2)^2 + (1{,}7)^2} =$$

$$= \sqrt{17{,}64 + 2{,}89} = \sqrt{20{,}53}\ m.$$

Ответ: $\sqrt{20{,}53}\ m.$

18.18. Телефонный кабель длиной 20 m прикреплён к бетону на высоте 8 m над уровнем земли и натянут на крыше многоэтажного дома высотой 18 m. Найдите расстояние между домом и столбом.



$A_1B_1 = 20\ m;\ AA_1 = 8\ m;\ BB_1 = 18\ m.\ A_1C = ?$

$AA_1 = BC = 8\ m; \quad A_1C = AB = 4{,}2\ m;$

$B_1C = BB_1 - BC = 18\ m - 8\ m = 10\ m;$

$$A_1C = AB = \sqrt{A_1B_1{}^2 - B_1C^2} = \sqrt{20^2 - 10^2} =$$

$$= \sqrt{400 - 100} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}\ m.$$

Ответ: $10\sqrt{3}\ m$

УРОК 7. ПЕРПЕНДИКУЛЯР, ДИАГОНАЛЬ И РАССТОЯНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.GSH.12. Знать теорему о трёх перпендикулярах.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

– знать теорему о трёх перпендикулярах.

Навыки:

-уметь применять теорему о трёх перпендикулярах при решении задач;

III. Краткое описание содержания урока:

-теорема о трёх перпендикулярах и обратная ей теорема .

IV. Оборудование и наглядные пособия:

- модели различных плоских и пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Приведите примеры перпендикулярных прямых	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме 1
Формирование и закрепление знаний	Теорема о трёх перпендикулярах	Работа по учебнику	Вопросы по теме 2 Практическое упражнение и приложение 19.1, 19.2
	Теорема обратная теореме о трёх перпендикулярах	Работа по учебнику	Вопросы по теме 3 Практическое упражнение и приложение 19.3, 19.4
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 19.5, 19.6
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 19.7, 19.8		

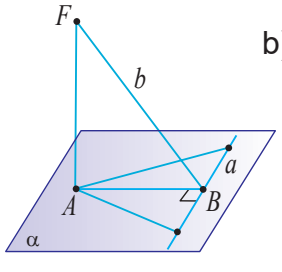
19.2. На рисунке $AF \perp \alpha$. Определите взаимное расположение прямых a и b.

a) $\begin{cases} AF \perp \alpha \\ AB \perp a \end{cases} \rightarrow b \perp a$ по трём перпендикулярям.

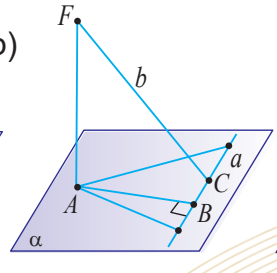
b) $\begin{cases} AF \perp \alpha \\ AB \perp a \end{cases} \rightarrow FB \perp a; \quad FC = b \otimes a.$

c) $\begin{cases} AF \perp \alpha \\ AB \perp a \end{cases} \rightarrow AB = b; \quad AB \perp a; \quad b \perp a.$

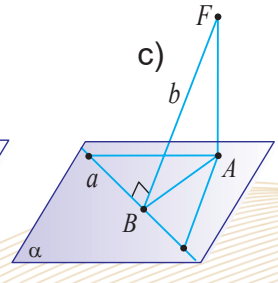
a)



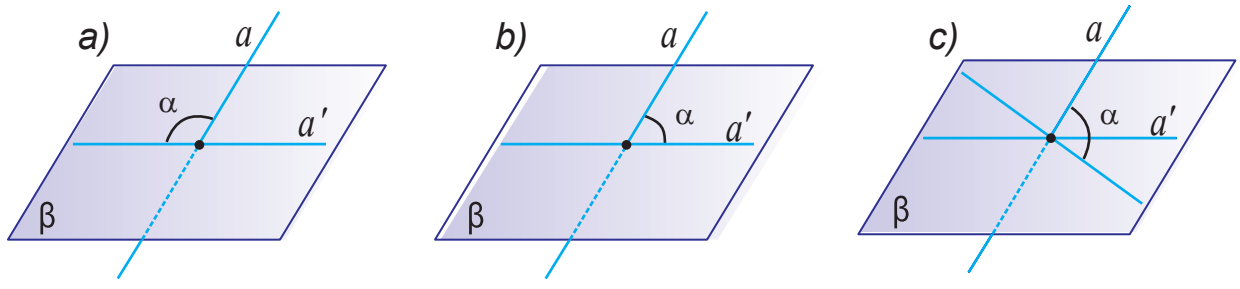
b)



c)



19.3. На рисунке прямая a' является проекцией прямой a на плоскость β. На каком из рисунков правильно показан угол α между прямой a и плоскостью β?



а) правильно б) правильно в) неправильно .

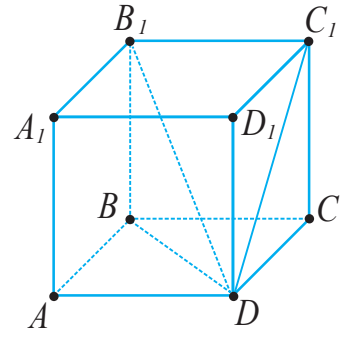
19.4. На рисунке показан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ Определите угол между:

а) диагональю DC_1 стороны DD_1C_1C и базовой плоскостью $ABCD$; б) между диагональю B_1D куба и плоскостью $ABCD$; в) диагональю B_1D куба и боковой плоскостью DD_1C_1C.

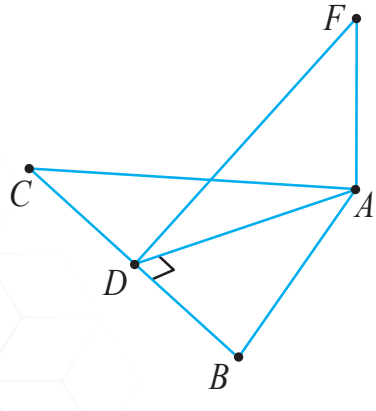
а) угол между диагональю DC_1 стороны DD_1C_1C и базовой плоскостью $ABCD$

б) $\alpha = \angle BDB_1$- угол между диагональю B_1D куба и плоскостью основания $ABCD$.

в) $\alpha = \angle B_1DC_1$- угол между диагональю B_1D куба и боковой плоскостью DD_1C_1C



19.5. Составьте и решите задачи к рисункам.



Задача: Если на рисунке $AD \perp BC$ и $FA \perp \Delta ABC$, то каково взаимное расположение FD и BC?

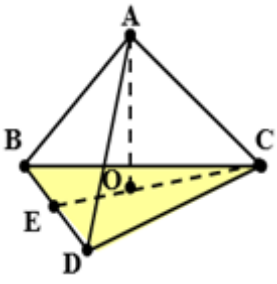
Ответ: $FD \perp BC$.

Задача: Если на рисунке ромб $ABCD$ и $MD \perp ABCD$, а также O-точка пересечения диагоналей ромба $ABCD$, то каково взаимное расположение MO и AC?

Ответ: $MO \perp AC$.

Домашнее задание

19.8. Точка A лежит на расстоянии от вершин равностороннего треугольника, сторона которого равна a. Найдите расстояние от точки A до плоскости треугольника.



$AB = AC = AD = a;\quad BC = CD = BD = a;\quad AO = ?$

$CE = \sqrt{3}/2 \cdot a;\quad OC = 2/3 \cdot CE = 2/3 \cdot \sqrt{3}/2 \cdot a = a/\sqrt{3};$

$AO = \sqrt{(AC^2 - OC^2)} = \sqrt{(a^2 - a2/3)} = a\sqrt{(2/3)}.$

Ответ: $AO = a \cdot \sqrt{2}/3.$

УРОК 8. ТЕОРЕМА О ТРЁХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.GSH.12. Знать теорему о трёх перпендикулярах.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

– знать теорему о трёх перпендикулярах.

Навыки:

-уметь применять теорему о трёх перпендикулярах при решении задач;

III. Краткое описание содержания урока:

-теорема о трёх перпендикулярах и противоположная ей теорема

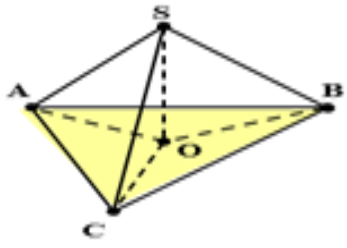
IV. Оборудование и наглядные пособия:

- модели различных плоских и пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Приведите примеры перпендикулярных прямых	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме 3
Формирование и закрепление знаний	Теорема о трёх перпендикулярах	Работа по учебнику	Вопросы по теме 4 Практическое упражнение и приложение 19.9, 19.10
	Теорема, противоположная теореме о трёх перпендикулярах	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 19.11, 19.12
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 19.13, 19.14, 19.15
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 19.16, 19.17		

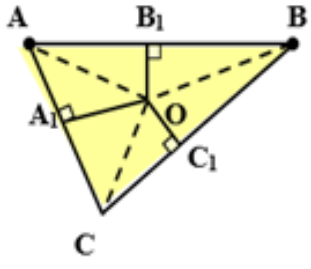
19.9. Три равные наклонные SA, SB, SC и перпендикуляр SO проведены от точке S вне плоскости α. Докажите, что основание перпендикуляра O является центром окружности, описанной вокруг треугольника ABC.



$SA = SB = SC = l;$

$SO \perp AO, \quad SO \perp BO, \quad SO \perp CO;$

$SO = h; \quad AO = OB = OC = \sqrt{l^2 - h^2}.$

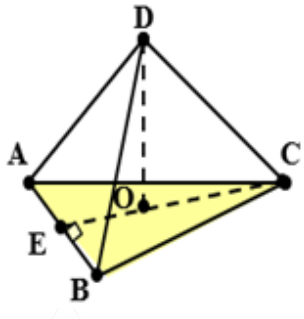


$OA_1 \perp AC, \quad OB_1 \perp AB, \quad OC_1 \perp BC;$

Так как $AO = OB$ в ΔAOB и $A_1 = B_1$, отсюда следует, что точка B_1 – середина AB.

Точно так же отсюда следует, что A_1 — середина стороны AC, а C_1 — середина стороны BC. Значит, $B_1O;\ C_1O;\ A_1O$ являются серединами перпендикуляров ΔABC, а точка O является точкой пересечения середин перпендикуляров. Отсюда следует, что точка O является центром окружности, описанной около треугольника ABC.

19.10. Стороны равностороннего треугольника равны 3 m. Найдите расстояние от точки, находящейся на расстоянии 2 m от каждого конца треугольника, до плоскости треугольника.



Дано: ABC прямоугольный треугольник.

$AB = BC = AC = 3\ m; \quad AD = BD = CD = 2\ m.$

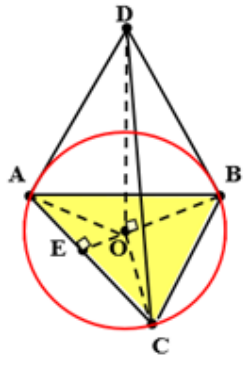
Найти: $DO = ? \quad CE = (a\sqrt{3})/2 = (3\sqrt{3})/2;$

$OC = 2/3 \cdot CE = 2/3 \cdot (3\sqrt{3})/2 = (6\sqrt{3})/6 = \sqrt{3};$

$DO = \sqrt{CD^2 - OC^2} = \sqrt{2^2 - \sqrt{3}^2} = \sqrt{4 - 3} = \sqrt{1} = 1\ m.$

Ответ: $DO = 1\ m.$

19.11. Равнобедренный треугольник имеет основание и высоту 4 m. Дана точка, лежащая на расстоянии 6 m от плоскости треугольника и на одинаковом расстоянии от его вершин. Найдите это расстояние.



Дано: $AC = BE = 4\ m;\quad AD = BD = CD = 6\ m;$

Найти: $DO = ?$

$S_{ABC} = 1/2 \cdot AC \cdot BE = 1/2 \cdot 4\ m \cdot 4\ m = (16\ m^2)/2 = 8\ m^2;$

$R = OA = OB = OC;\quad AE = EC = AC/2 = (4\ m)/2 = 2\ m;$

$EO = EB - OB = 4 - R;\quad \Delta CEO,\ EC^2 + EO^2 = CO^2;$

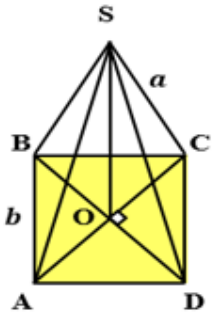
$2^2 + 4 - R^2 = R^2;\quad 4 + 16 - 8R + R^2 = R^2;\quad 20 - 8R = 0;$

$8R = 20;\quad R = 20/8 = 5/2\ m;\quad R = OA = OB = OC = 5/2\ m;$

$DO = \sqrt{(BD^2 - OB^2)} = \sqrt{(6^2 - (5/2)^2)} = \sqrt{(36 - 25/4)} = \sqrt{(144 - 25)/4)} = \sqrt{119}/2\ m.$

Ответ: $DO = \sqrt{119}/2\ m.$

19.12. Расстояние от точки A до углов квадрата равно a. Если сторона квадрата равна b, найдите расстояние от точки A до плоскости квадрата.



Дано: $SA = SB = SC = SD = a;$

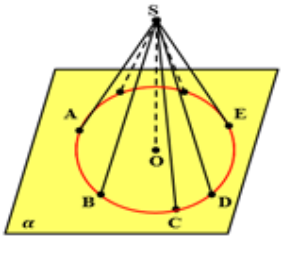
$AB = BC = CD = AD = b.\qquad SO = ?$

$AO = AC/2 = (b\sqrt{2})/2;\ SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - ((b\sqrt{2})/2)^2} =$

$= \sqrt{a^2 - b^2/2)} = \sqrt{2a^2 - b^2)}/2.$

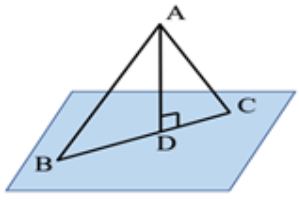
Ответ: $AO = \sqrt{2a^2 - b^2)}/2).$

19.13. Найдите геометрические места оснований наклонных данной длины, проведённых из данной точки к плоскости.



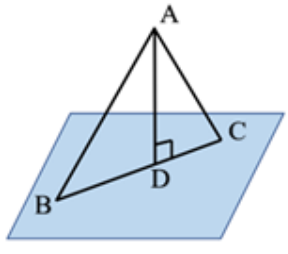
Геометрические места оснований наклонных данной длины, проведённых из данной точки S к плоскости, являются точками на окружности.

19.14. Из данной точки к плоскости проведены две наклонные длиной 10 cm и 17 cm. Разница в проекции этих линий составляет 9 cm. Найдите проекции наклонных.



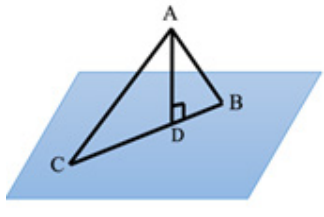
Дано: $AB = 17$ cm; $AC = 10$ cm;
$BD - CD = 9$ cm; Найти: BD, $DC - ?$
$AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$;
$17^2 - BD^2 = 10^2 - (BD - 9)^2$;
$289 - BD^2 = 100 - BD^2 + 18BD - 81$; $18BD = 289 - 100 + 81$
$18BD = 270$; $BD = 15$ cm; $DC = 6$ cm. **Ответ:** 15 cm; 6 cm.

19.15. От точки к плоскости проведена наклонная. Найдите длину наклонной, если: а) одна из них длиннее другой на 26 cm, а проекции сторон равны 12 cm и 40 cm; б) длины сторон относятся как 1:2, а их проекции равны 1 cm и 7 cm.



1) Дано: $AB = AC+26$ cm; $BD = 40$ cm;
$CD = 12$ cm. Найти: AB, AC - ?
$AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$;
$(AC+26)^2 - 40^2 = AC^2 - 12^2$;
$AC^2 + 52AC + 676 - 1600 = AC^2 - 144$;
$52AC = 780$; $AC=15$; $AB=15+26=41$.

Ответ: 15 cm; 41 cm.



2) Дано: $AB : AC = 1 : 2$; $AC = 2AB$;
$BD = 1$ cm; $CD = 7$ cm.
Найти: AB,AC - ?

$$\begin{cases} CD^2 + AD^2 = AC^2 \\ BD^2 + AD^2 = AB^2 \end{cases} \rightarrow CD^2 - BD^2 = AC^2 - AB^2;$$

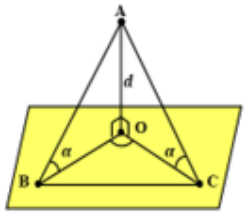
$7^2 - 1^2 = (2AB)^2 - AB^2$; $49 - 1 = 4AB^2 - AB^2$; $3AB^2 = 48$;
$AB^2 = 48/3$; $AB^2 = 16$; $AB = \sqrt{16}$; $AB = 4$ cm;
$AC = 2 \cdot AB = 2 \cdot 4$ cm $= 8$ cm.

Ответ: $AB = 4$ cm; $AC = 8$ cm.

Домашнее задание

19.16. К точке A, лежащей на расстоянии d от плоскости α, проведены наклонные AB и AC, образующие с плоскостью угол 30°. Их проекции на плоскость α образуют угол 120°. Найдите длину отрезка BC.

.



$d = AO;\quad AB = AC;\quad \alpha = 30°;\quad \angle BOC = 120°;$

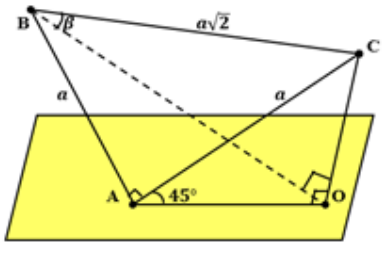
$\angle AOB = \angle AOC = 90°;\quad BC = ?$

$BO = OC;\ tg\alpha = d/BO;\quad tg30° = d/BO;\quad 1/\sqrt{3} = d/BO;$

$BO = d \cdot \sqrt{3};\quad BC = BO\cdot\sqrt{3} = d \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3d.$

Ответ: $BC = 3d.$

19.17. Если один из катетов прямоугольного и равнобедренного треугольника принадлежит плоскости, а другой образует с ней угол 45°, докажите, что гипотенуза образует с этой плоскостью угол 30°.



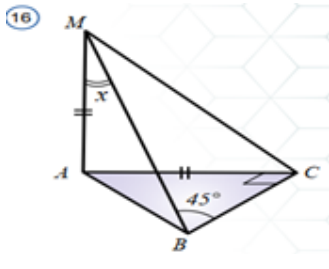
$AB = AC = a;\quad BC = a\sqrt{2};\quad AO = OC = a/\sqrt{2};$

$\sin\beta = OC/BC = (a/\sqrt{2})/(a\sqrt{2}) = a/(a\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}) = 1/2;$

$\sin\beta = 1/2;\quad \beta = 30°.$

Ответ: $\beta = 30°.$

19.18. Отрезок MA проведён перпендикулярно плоскости треугольника ABC. $\angle MBC = 45°$. $\angle ACB = 90°$. $MA = AC$. Найдите $\angle AMB$.



$\Delta ABC \perp MA;\quad \angle MBC = 45°;\quad \angle ACB = 90°;$

$MA = AC = a.\quad x = \angle AMB = ?$

$\begin{cases} MA \perp \Delta ABC \\ AC = BC \end{cases} \rightarrow\quad MC \perp BC;$

По трём перпендикулярам, $MA = AC$

$MC = \sqrt{MA2 + MC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{(2a^2)} = a\sqrt{2}\quad MC = a\sqrt{2};$

$\angle MBC = 45°;\quad \angle MCB = 90° \rightarrow \angle BMC = 45°;$ Значит, $MC = BC = a\sqrt{2};$

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3};\quad tg\angle AMB = tg\,x;$

$tgx = AB/MA = (a\sqrt{3})/a = \sqrt{3};\quad tgx = \sqrt{3};\quad x = 60°;\quad \angle AMB = 60°.$

Ответ: $\angle AMB = 60°.$

УРОК 8. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.MM.14. Умеет применять теоремы о перпендикулярности плоскостей в пространстве.
– M10.GO‘.MM.15. Может рисовать на чертеже линейный угол двугранного угла и вычислять его при решении задач.
– M10.GO‘.MM.16. Может вычислять и рисовать на чертеже угол между плоскостями.
– M10.GO‘.MM.17. Умеет применять теоремы о перпендикулярности плоскостей в пространстве при решении задач.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

– знать теорему о перпендикулярности плоскостей в пространстве.
– уметь рисовать на чертеже линейный угол двугранного угла .

Навыки:

- уметь применять теоремы о перпендикулярности плоскостей в пространстве при решении задач.
- может вычислять и рисовать на чертеже угол между плоскостями.

III. Краткое описание содержания урока:

– двугранный угол и его элементы. Линейный угол двугранного угла. Угол между плоскостями. Перпендикулярные плоскости в пространстве.

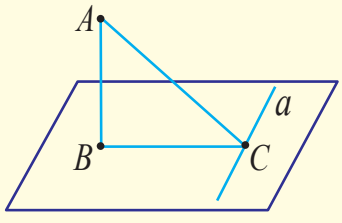
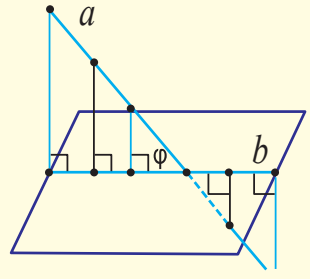
IV. Оборудование и наглядные пособия:

- модели различных плоских и пространственных геометрических фигур.

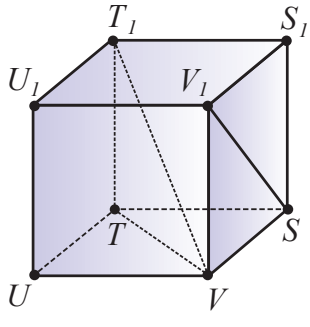
V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Приведите примеры перпендикулярности плоскостей в пространстве	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме: Какие плоскости называют перпендикулярными?
Формирование и закрепление знаний	Двугранный угол и его элементы	Работа по учебнику	Вопросы по теме 1 Практическое упражнение и приложение: 20.1
	Линейный угол двугранного угла	Работа по учебнику	Вопросы по теме 2 Практическое упражнение и приложение: 20.3
	Угол между плоскостями. Перпендикулярные плоскости в пространстве	Работа по учебнику	Вопросы по теме 3 Практическое упражнение и приложение 20.4
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 20.5. 20.6
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 20.7		

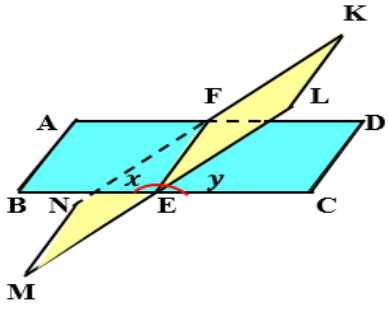
20.1. В таблице содержится основная информация темы. Внимательно изучите её и объясните.

Теорема о трех плоскостях	Угол между прямой и плоскостью
	
AB $\perp \alpha$ Если $a \perp BC$, то $a \perp AC$. Если $a \perp AC$, то $a \perp BC$.	b – является проекцией a к плоскости α. φ – угол между a и плоскостью α.

20.3. Являются ли: а) угол T_1ST; б) угол T_1SVT двугранными углами в кубе $STUVS_1T_1U_1V_1$? Найдите значение двугранного угла V_1UTS.



20.4. Два двугранных угла имеют одну общую грань, а остальные грани вместе образуют плоскость. Докажите, что сумма этих двух углов равна 180°.



$\angle BEL = x;\ \angle CEL = y;\ \angle BEC = 180°.$

Вертикальные углы взаимно равны.

$\angle BEK = \angle CEM;\ \angle BEM = \angle CEK.$

Сумма смежных углов равна 180°.

$\angle BEL + \angle CEL = \angle BEC.$

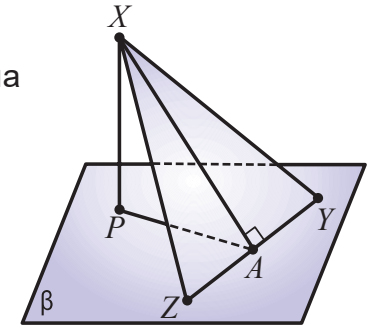
$x + y = 180°.$

20.5. Сторона YZ треугольника XYZ лежит в плоскости β. Из его вершины X опускаются высоты XA и XP перпендикулярно плоскости β. Докажите, что угол XAP является линейным углом двугранного угла $XYZP$.

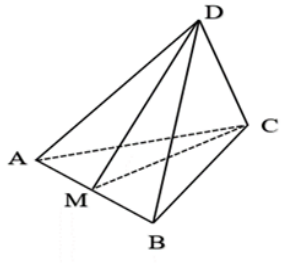
$YZ \in \beta;\ XA \perp YZ;\ XP \perp \beta.$

$AP \in \beta$; $YA = AZ$; $PY = PZ$;

Угол XAP является линейным углом двугранного угла $XYZP$.



20.6. Ребро CD треугольной пирамиды $ABCD$ перпендикулярно плоскости ABC. Если $AB = BC = AC = 6$ и $BD = 3\sqrt{7}$, найдите двугранные углы $DACB$, $DABC$, $BDCA$.



$ABCD$ - тетраэдр, $CD \perp ABC$, $AB = BC = AC = 6$, $BD = 3\sqrt{7}$. Определим линейный угол двугранного угла $DACB$. ADC и ABC –перпендикулярные плоскости, в таком случае двугранный угол и его линейный угол равны 90°.

Теперь определим линейный угол двугранного угла $DABC$. Проведем перпендикулярную прямую CM к прямой AB. Соединим точки M и D.

$CD \perp AB$, $CM \perp AB \rightarrow AB \perp DM$

$\angle DMC$ – линейный угол двугранного угла $DABC$.

$CM = AC \cdot sin60^o = 3\sqrt{3}$; $MB = MA = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$.

По теореме Пифагора $DC = \sqrt{BD^2 - BC^2}$;

$$DC = \sqrt{(3\sqrt{7})^2 - 6^2} = \sqrt{63 - 36} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3};$$

В таком случае, $tg\angle DMC = \frac{DC}{CM} = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = 1$. $tg\angle DMC = 1$, $\angle DMC = 45^0$.

Теперь определим линейный угол двугранного угла $BDCA$.

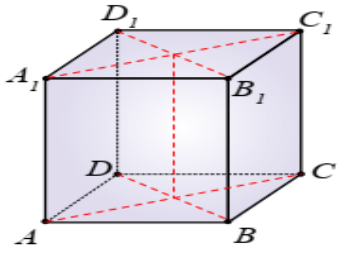
$BC \perp DC$, $AC \perp DC$.

В таком случае $\angle ABC$ – линейный угол двугранного угла $BDCA$ и $\angle ABC = 60^o$.

Ответ: $90°$, $45°$, $60°$.

Домашнее задание

20.7. Докажите, что диагональные сечения AA_1C_1C и BB_1D_1D правильного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взаимно перпендикулярны.



$$\begin{cases} AC \perp BD \\ A_1C_1 \perp B_1D_1 \end{cases} \rightarrow AA_1C_1C \perp BB_1D_1D.$$

УРОК 9. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.MM.14. Умеет применять теоремы о перпендикулярности плоскостей в пространстве.

– M10.GO‘.MM.15. Может рисовать на чертеже линейный угол двугранного угла и вычислять его при решении задач.

– M10.GO‘.MM.16. Может вычислять и рисовать на чертеже угол между плоскостями.

– M10.GO‘.MM.17. Умеет применять теоремы о перпендикулярности плоскостей в пространстве при решении задач.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

– знать теорему о перпендикулярности плоскостей в пространстве.

– Уметь рисовать на чертеже линейный угол двугранного угла.

Навыки:

- Уметь применять теоремы о перпендикулярности плоскостей в пространстве при решении задач.

- может вычислять и рисовать на чертеже угол между плоскостями.

III. Краткое описание содержания урока:

– двугранный угол и его элементы. Линейный угол двугранного угла. Угол между плоскостями. Перпендикулярные плоскости в пространстве.

IV. Оборудование и наглядные пособия:

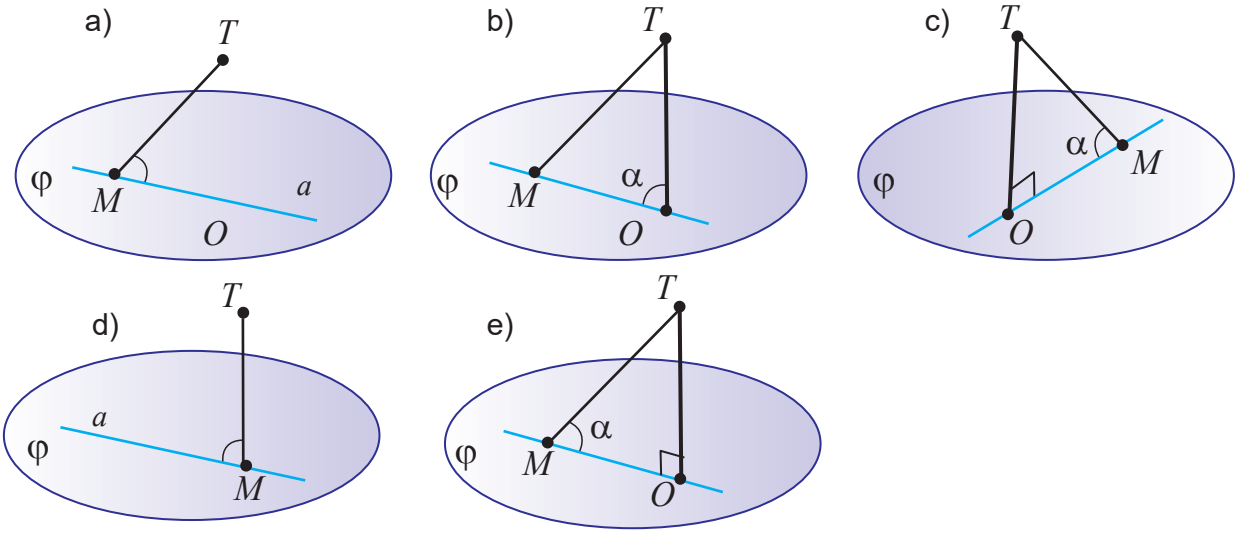
- модели различных плоских и пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Приведите примеры перпендикулярности плоскостей в пространстве	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме: Какие плоскости называют перпендикулярными?

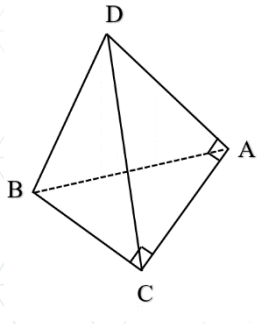
Формирование и закрепление знаний	Признаки перпендикулярности плоскостей.	Работа по учебнику	Вопросы по теме 3 Практическое упражнение и приложение 20.8
	Следствия, вытекающие из признаков перпендикулярности плоскостей.	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 20.9, 20.10
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 20.11, 20.12
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 20.13, 20.14		

20.8. Из точки T проходит наклонная в плоскости φ. На каком из рисунков правильно определён угол α между плоскостью и наклоном?



Ответ: *b)*

20.9. Если треугольная пирамида ABCD имеет прямые углы DAB, DAC, ACB, AC = CB = 5 и DB = 5√5, найдите двугранный угол ABCD.



Решение: *По условию углы DAB, DAC и ACB прямые углы. Тогда по теореме Пифагора,*

$$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2};$$

$$AD = \sqrt{DB^2 - AB^2} = \sqrt{(5\sqrt{5})^2 - (5\sqrt{5})^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3};$$

$$DB = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 - (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5};$$

$$DC = \sqrt{AC^2 + DA^2} = \sqrt{5^2 - (5\sqrt{3})^2} = \sqrt{100} = 10;$$

$\triangle DBC$: $DB^2 = DC^2 + BC^2 \rightarrow \angle DBC = 90°$;

$BC \perp AC$, $BC \perp DC$.

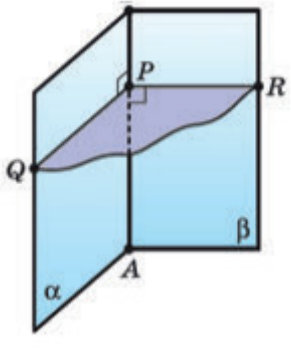
В таком случае, $BC \perp ADC$.

Значит, $\angle ACD$ – является линейным углом двугранного угла $ABCD$.

$$cos\angle ACD = \frac{AC}{DC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}; \quad \angle ACD = 60°.$$

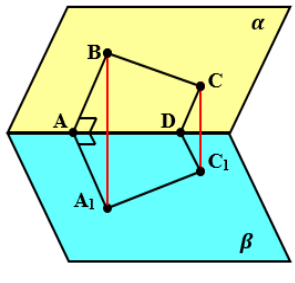
Ответ: Значение двугранного угла $ABCD$ равно 60° .

20.10. Докажите, что плоскость линейного угла двугранного угла перпендикулярна в каждом его сечении.



Из произвольной точки P рёбра двустороннего угла проведём лучи PQ и PR, которые лежат по его граням и перпендикулярны этому ребру. Угол QPR, образованный этими лучами, является линейным углом двугранных углов α и β. Так как $PQ \perp PR$, то $\alpha \perp \beta$.

20.11. Две точки, лежащие на одной гипотенузе двустороннего угла, удалены от его рёбра на 51 cm и 34 cm соответственно. Если известно, что первая из этих точек лежит на расстоянии 15 cm от другой точки, найдите расстояние от этой стороны до второй точки.



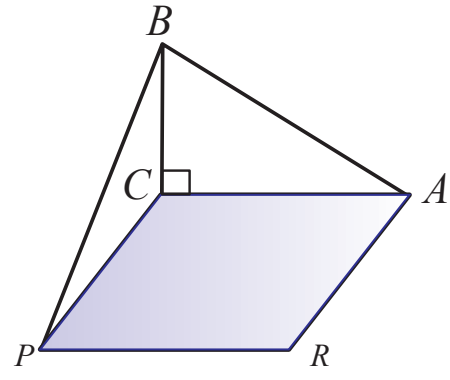
$AB = 51\ cm$; $CD = 34\ cm$; $CC_1 = 15\ cm$. $BA_1 = ?$

$\Delta ABA_1 \sim \Delta DCC_1$; $\frac{CC_1}{CD} = \frac{BA_1}{AB}$; $\frac{15}{34} = \frac{BA_1}{51}$;

$$BA_1 = \frac{15 \cdot 51}{34} = \frac{15 \cdot 3}{2} = \frac{45}{2} = 22{,}5\ cm.$$

Ответ: $BA_1 = 22{,}5\ cm$.

20.12. Прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) и квадратная плоскость $ACPR$ взаимно перпендикулярны. Сторона квадрата 6 cm, гипотенуза треугольника 10 cm. Найдите длину участка BP.



$\triangle ABC \perp ACPR$; $AC = AR = CP = PR = 6$ cm;

$AB = 10$ cm. $BP = ?$

$BC^2 = AB^2 - AC^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$;

$BC = \sqrt{64} = 8$ cm;

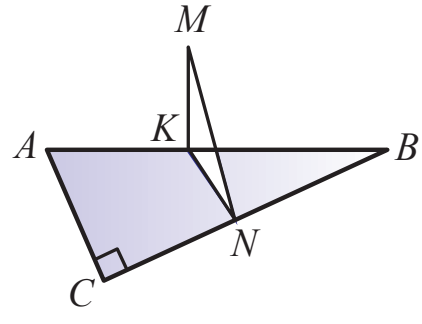
$BP^2 = CP^2 + BC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$;

$BP = \sqrt{100} = 10$ cm;

Ответ: $BP = 10$ cm.

Домашнее задание

20.13. Отрезок MK перпендикулярен плоскости прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$). Если $KN \parallel AC$, $AK = KB$, $AC = 12$ cm, $MK = 8$ cm, найдите длину отрезка MN.



$KN \parallel AC$, $AK = KB$, $AC = 12$ cm, $MK = 8$ cm. $MN = ?$

Из того, что $KN \parallel AC$ и $AK = KB$ следует, что KN – средняя линия $\triangle ABC$.

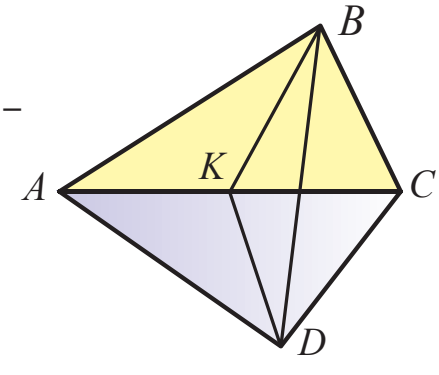
Значит, $KN = \frac{1}{2} AC$; $KN = \frac{12}{2} = 6$;

$\triangle MKN$ – прямоугольный треугольник. Значит, $MN^2 = MK^2 + KN^2$;

$$MN = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10;$$ $MN = 10$ cm.

Ответ: 10 cm.

20.14. Плоскости равносторонних треугольников ABC и ADC перпендикулярны. AC – общая прямая. BK – медиана треугольника ABC. Если $BK = 8$ cm, $DK = 15$ cm, найдите длину отрезка BD.



$BK = 8$ cm, $DK = 15$ cm. $BD = ?$

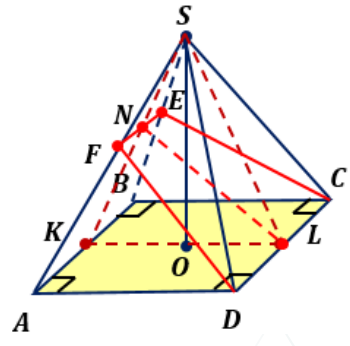
Из того, что $\triangle ABC \perp \triangle ADC$ следует, что $\triangle BKD$ – прямоугольный треугольник. Значит,

$BD^2 = BK^2 + DK^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$;

$BD = \sqrt{289} = 17$ cm.

Ответ: $BD = 17$ cm.

20.15. Через сторону основания правильной прямоугольной пирамиды была проведена перпендикулярная плоскость к противоположной стороне. Сторона основания a = 30 cm, высота пирамиды h = 20 cm. Определите площадь полученного сечения.



$EN = NF;\quad KL = BC;\quad CDFE \perp ABS;$

$a = AB{=}BC{=}CD{=}DA{=}30\ cm;$

$h = SO = 20\ cm;\quad KO = OL = \frac{a}{2} = \frac{30}{2} = 15\ cm;$

$$SK = SL = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} =$$

$$= \sqrt{225 + 400} = \sqrt{625} = 25\ cm;\qquad \angle SNL = 90°;\qquad \Delta SKL\ da$$

$KL^2 = SL^2 + SK^2 - 2 \cdot SL \cdot SK \cdot cos\angle KSL;$

$30^2 = 25^2 + 25^2 - 2 \cdot 25 \cdot 25 \cdot cos\ \angle KSL;$

$900 = 625 + 625 - 1250 \cdot cos\angle KSL;\quad 1250 \cdot cos\ \angle KSL = 1250 - 900;$

$$1250 \cdot \cos\angle KSL = 350;\qquad \cos\angle KSL = \frac{350}{1250};\qquad \cos\angle KSL = \frac{7}{25};$$

$$\sin\angle KSL = \sqrt{1 - \cos^2\angle KSL} = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{49}{625}} = \sqrt{\frac{576}{625}} = \frac{24}{25};$$

$$\sin\angle SNL = \frac{NL}{SL};\qquad \frac{24}{25} = \frac{NL}{25};\qquad NL = 24\ cm;$$

$$SN = \sqrt{SL^2 - NL^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = \sqrt{625 - 576} = \sqrt{49} = 7\ cm;$$

$$\Delta SEF \sim \Delta SAB;\qquad \frac{AB}{EF} = \frac{SK}{SN};\qquad \frac{30}{EF} = \frac{25}{7};$$

$$EF = \frac{30 \cdot 7}{25} = \frac{6 \cdot 7}{5} = \frac{42}{5} = 8{,}4\ cm;$$

$$S_{CDFE} = \frac{CD + FE}{2} \cdot NL = \frac{30 + 8{,}4}{2} \cdot 24 = 38{,}4 \cdot 12 = 460{,}8\ cm^2.$$

$$S_{CDFE} = 460{,}8\ cm^2.$$

Урок 10. ОРТОГОНАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ И ЕЁ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ТЕХНИКЕ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.GSH.13. Узнает об ортогональных проекциях.

– M10.GO‘.YM.08. Может изображать на чертеже ортогональные проекции простых пространственных тел.

– M10.GO‘.MM.19. может находить грань ортогональной проекции многоугольника.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

– знать об ортогональных проекциях.

– знать как изображать на чертеже ортогональные проекции простых пространственных тел.

Навыки:

– уметь изображать на чертеже ортогональные проекции простых пространственных тел.

III. Краткое описание содержания урока:

– грань ортогональной проекции многоугольника. Использование в технике ортогональных проекций.

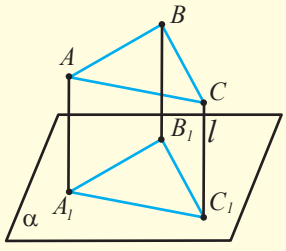
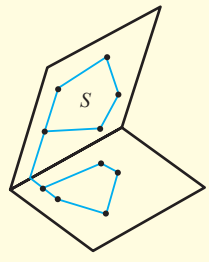
IV. Оборудование и наглядные пособия:

- модели различных плоских и пространственных геометрических фигур.

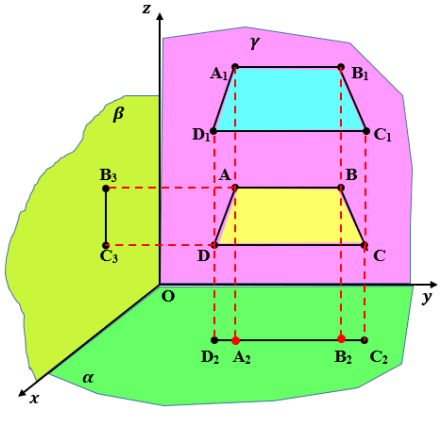
V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Приведите примеры об использовании в технике ортогональных проекций	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме: Приведите примеры по проецированию.
Формирование и закрепление знаний	Грань ортогональной проекции многоугольника	Работа по учебнику	Вопросы по теме 1 Практическое упражнение и приложение 21.1
	Использование в технике ортогональных проекций	Работа по учебнику	Вопросы по теме 2 Практическое упражнение и приложение 21.2, 21.3
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 21.4, 21.5
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 21.6, 21.7		

21.1. В таблице содержится основная информация 21-й темы. Внимательно изучите её и объясните.

Ортогональная проекция в пространстве	Грань многоугольной проекции
	 $S_1 = S \cdot \cos\varphi$
В ортогональной проекции: $l \perp \alpha$. l – направление проекции; α – плоскость проекции.	S – площадь многоугольника; S_1 – площадь многоугольной ортогональной проекции; φ – угол между многоугольником и плоскостями проекций.

21.2. Может ли ортогональная проекция трапеции быть а) квадратом; б) отрезком; в) прямоугольником; г) параллелограммом; д) трапецией?



Ортогональной проекцией трапеции:

а) не может быть квадрат.

б) может быть отрезок.

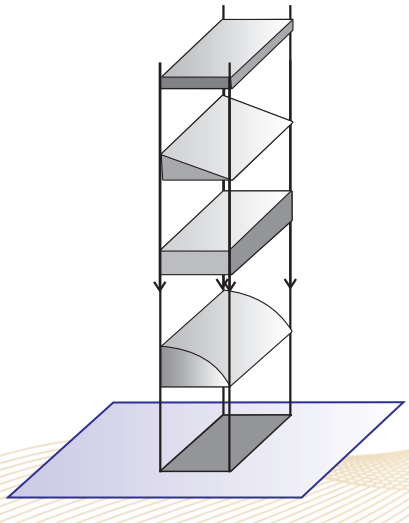
в) не может быть прямоугольник.

г) не может быть параллелограмм.

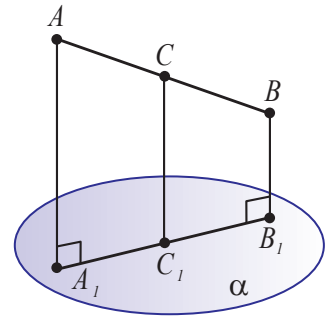
д) может быть трапеция.

21.3. Назовите геометрические фигуры, ортогональной проекцией которых является правильный четырёхугольник согласно рисунку.

Ответ: Во всех фигурах ортогональной проекцией является прямоугольник.



21.4. Отрезок A_1B_1 является ортогональной проекцией отрезка AB на плоскость α. Найдите длину отрезка B_1C_1 при условии, что $AB = 20$ см, $AC = 10$ см, $A_1B_1 = 12$ см.



$AB = 20$ см, $AC = 10$ см, $A_1B_1 = 12$ см.

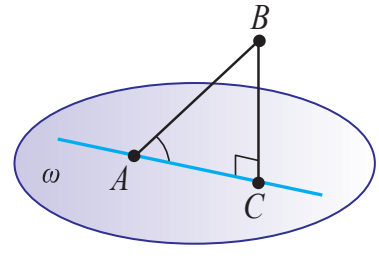
$B_1C_1 = ?$ $BC = AB - AC = 20 - 10 = 10$ см.

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}; \qquad \frac{20}{12} = \frac{10}{B_1C_1};$$

$$B_1C_1 = \frac{10 \cdot 12}{20} = 6 \text{ см}.$$

Ответ: $B_1C_1 = 6$ см.

21.5. Ортогональная проекция отрезка AB длиной 5 см на плоскость ω состоит из отрезка AC длиной 3 см. Найдите косинус угла отклонения сечения AB от плоскости ω.



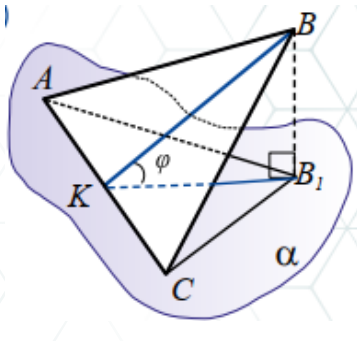
Решение: $AB = 5$ см, $AC = 3$ см. $\cos A = ?$

$$\cos A = \frac{AC}{AB}; \quad \cos A = \frac{3}{5}; \quad \cos A = 0{,}6.$$

Ответ: $0{,}6$.

Домашнее задание

21.6. Дан правильный треугольник со стороной a. Найдите поверхность его ортогональной проекции на плоскость, составляющую угол: а) 30°; б) 45°; в) 60° с плоскостью треугольника.



а) $BB_1 = a$; $\angle BKB_1 = 30°$; $AB = BC = AC = a$;

$$BK = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad \cos\angle BKB_1 = \frac{KB_1}{KB}; \quad \cos 30° = \frac{KB_1}{\frac{a\sqrt{3}}{2}};$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{KB_1}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}; \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 \cdot KB_1}{a\sqrt{3}}; \qquad 4 \cdot KB_1 = 3a;$$

$$KB_1 = \frac{3a}{4}; \quad S_{AB_1C} = \frac{AC \cdot KB_1}{2} = \frac{a \cdot \frac{3a}{4}}{2} = \frac{\frac{3a^2}{4}}{2} = \frac{3a^2}{8}.$$

Ответ: $S_{AB_1C} = \frac{3a^2}{8}$

b) $BB_1 = \alpha$; $\angle BKB_1 = 45°$; $AB = BC = AC = a$;

$BK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $\cos\angle BKB_1 = \frac{KB_1}{KB}$; $\cos 45° = \frac{KB_1}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$; $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{KB_1}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 \cdot KB_1}{a\sqrt{3}}$; $4 \cdot KB_1 = a\sqrt{6}$; $KB_1 = \frac{a\sqrt{6}}{4}$;

$S_{AB_1C} = \frac{AC \cdot KB_1}{2} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4}}{2} = \frac{\frac{a^2 \cdot \sqrt{6}}{4}}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{8}$. **Ответ:** $S_{AB_1C} = \frac{a^2\sqrt{6}}{8}$

$BK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $\cos\angle BKB_1 = \frac{KB_1}{KB}$; $\cos 60° = \frac{KB_1}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$; $\frac{1}{2} = \frac{KB_1}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$

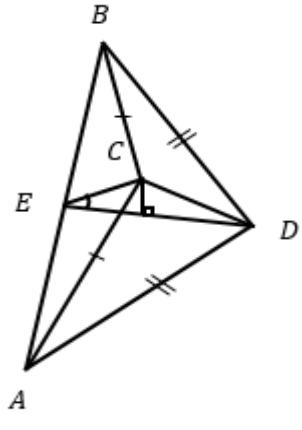
$\frac{1}{2} = \frac{2 \cdot KB_1}{a\sqrt{3}}$; $4 \cdot KB_1 = a\sqrt{3}$; $KB_1 = \frac{a\sqrt{3}}{4}$;

$S_{AB_1C} = \frac{AC \cdot KB_1}{2} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4}}{2} = \frac{\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. **Ответ:** $S_{AB_1C} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$

21.7. Равносторонние треугольники *ABC* и *ABD* с общей стороной *AB* лежат в разных плоскостях. Найдите сторону ортогональной проекции треугольника *ABC* на треугольник *ABD*, если а) *AB = 24 см, AC = 13 см, AD = 27 см, CD = 35 см;* б) *AB = 32 см, AC = 65 см, AD = 20 см, CD = 63 см.* Найдите также сторону ортогональной проекции треугольника *ABD* на треугольник *ABC*.

а) *AB = 24 см; AC = 13 см; AD = 37 см;*

CD = 35 см; AC = BC; AD = BD. $S_{ABD} = ?$



$AE = EB = \frac{AB}{2} = \frac{24}{2} = 12$ *см*;

$EC = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$ *см*;

$ED = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{37^2 - 12^2} = \sqrt{1369 - 144} =$

$35^2 = 5^2 + 35^2 - 2 \cdot 5 \cdot 35 \cdot \cos\angle CED$; $1225 = 25 + 1225 - 350 \cdot \cos\angle CED$;

$1225 = 1250 - 350 \cdot \cos\angle CED$; $350 \cdot \cos\angle CED = 1250 - 1225$;

$350 \cdot \cos\angle CED = 25$; $\cos\angle CED = \frac{25}{350} = \frac{1}{14}$;

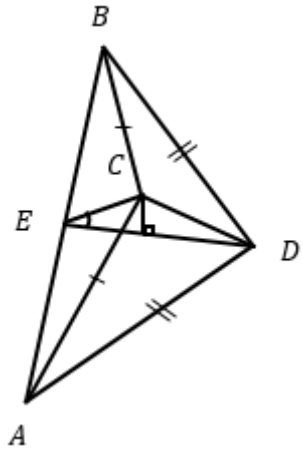
$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot EC = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 5 = 12 \cdot 5 = 60$ *см*^{2};

$S_{ABD} = S_{ABC} \cdot \cos \angle CED = 60 \cdot \frac{1}{14} = \frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}\ cm^2$.

Ответ: $S_{ABD} = 4\frac{2}{7}\ cm^2$.

b) $AB = 32\ cm$; $AC = 65\ cm$; $AD = 65\ cm$; $CD = 63\ cm$. $S_{проекция} = ?$

$S_{проекция} = S_{ABC} \cdot \cos\alpha$; $AE = \frac{AB}{2} = \frac{32}{2} = 16\ cm$;



$p = \frac{AB + AC + AD}{2} = \frac{32 + 65 + 65}{2} = \frac{162}{2} = 81\ cm$;

$S_{ABC} = \sqrt{p \cdot (p - AB) \cdot (p - AC) \cdot (p - AD)} =$

$= \sqrt{81 \cdot 49 \cdot 16 \cdot 16} = 9 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 4 = 1008\ cm^2$;

$ED = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{400 - 256} =$

$= \sqrt{144} = 12\ cm$;

$EC = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{65^2 - 16^2} = \sqrt{4225 - 256} = \sqrt{3969} = 63\ cm$;

$CD^2 = EC^2 + ED^2 - 2 \cdot EC \cdot ED \cdot \cos\alpha$; $63^2 = 63^2 + 12^2 - 2 \cdot 63 \cdot 12 \cdot \cos\alpha$;

$-144 = -2 \cdot 63 \cdot 12 \cdot \cos\alpha$; $2 = 21 \cdot \cos\alpha$; $\cos\alpha = \frac{2}{21}$;

$S_{проекция} = S_{ABC} \cdot \cos\alpha = 1008 \cdot \frac{2}{21} = 48 \cdot 2 = 96\ cm^2$.

Ответ: $S_{проекция}$ – 96 cm^2.

Урок 11. ОРТОГОНАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ И ЕЁ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ТЕХНИКЕ

I. Стандарты:

– M10.GO‘.GSH.13. Узнает об ортогональных проекциях.

– M10.GO‘.YM.08. Может изображать на чертеже ортогональные проекции простых пространственных тел.

– M10.GO‘.MM.19. может находить грань ортогональной проекции многоугольника.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

– знать об ортогональных проекциях.

– знать как изображать на чертеже ортогональные проекции простых пространственных тел.

Навыки:

– уметь изображать на чертеже ортогональные проекции простых пространственных тел.

III. Краткое описание содержания урока:

– грань ортогональной проекции многоугольника. Использование в технике ортогональных проекций.

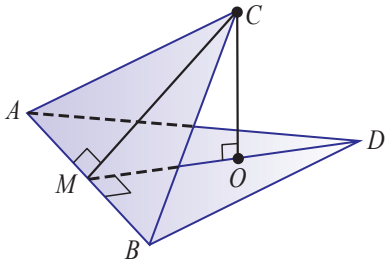
IV. Оборудование и наглядные пособия:

- модели различных плоских и пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Приведите примеры по ортогональной проекции многоугольника	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме: Где можно использовать ортогональную проекцию многоугольника?
Формирование и закрепление знаний	Грань ортогональной проекции многоугольника	Работа по учебнику	Вопросы по теме 3 Практическое упражнение и приложение 21.8
	Использование в технике ортогональных проекций	Работа по учебнику	Вопросы по теме 4 Практическое упражнение и приложение 21.9, 21.10
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 21.11, 21.12
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 21.13, 21.14		

21.8. Если расстояние от прямой AB до точки C вдвое больше расстояния от точки C до плоскости ABD, найдите угол между плоскостями ABC и ABD.

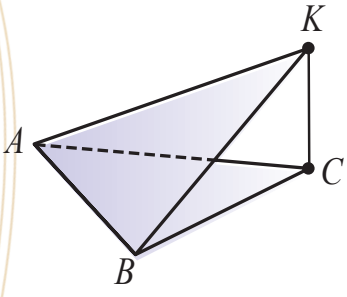


$CM = 2 \cdot CO; \qquad \angle CMD = ?$

$$\frac{CO}{\sin M} = \frac{CM}{\sin 90°}; \qquad \sin \widehat{CMD} = \frac{CO \cdot \sin 90°}{2 \cdot CO} = \frac{1}{2};$$

$\angle CMD = 30°.$ **Ответ:** $\angle CMD = 30°.$

21.9. Площадь треугольника ABC равна 18 см² KC ABC. Найдите сторону треугольника ABK, если угол между плоскостями треугольников ABK и ABC равен: a) α=30°; b) α = 45°; c) α = 60°.



$S_{ABC} = 18\ cm^2; \quad KC \perp \Delta ABC. \quad S_{ABK} = ?$

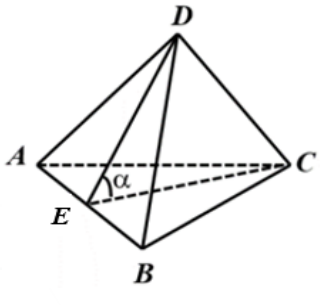
$$\alpha = 30°; \quad S_{ABK} = S_{ABC} \cdot \cos 30° = 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}\ cm^2;$$

$$\alpha = 45°; \quad S_{ABK} = S_{ABC} \cdot \cos 45° = 18 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}\ cm^2;$$

$$\alpha = 60°; \qquad S_{ABK} = S_{ABC} \cdot \cos 60° = 18 \cdot \frac{1}{2} = 9\ cm^2;$$

Ответ: a) $9\sqrt{3}\ cm^2$; $9\sqrt{2}\ cm^2$; $9\ cm^2$.

21.10. Угол между плоскостями треугольников ABC и ABD равен 60°. Если $AB = 4$, найдите длину CD.



$\alpha = \angle E = 60°; \quad AB = 4\sqrt{3}. \quad CD = ?$

$\alpha = \angle E = \angle C = \angle D = 60°;$

$$DE = EC = CD = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 6.$$

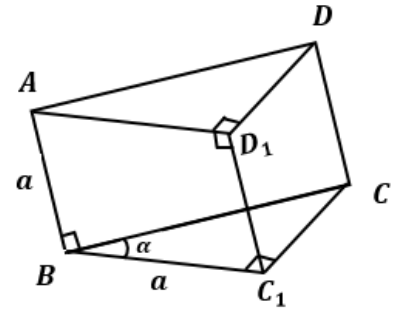
Ответ: $CD = 6.$

21.11. Площадь прямоугольника равна 72. Его ортогональная проекция на плоскости – квадрат. Плоскость прямоугольника составляет с плоскостью проекции угол в 60°. Найдите периметр квадрата.

$\alpha = 60°; \quad S_{ABCD} = 72. \quad P_{ABC_1D_1} = ?$

$a = AB = BC_1; \quad b = AD = BC;$

$a \cdot b = S_{ABCD}; \qquad a \cdot b = 72; \qquad \cos 60° = \frac{a}{b};$



$\frac{1}{2}=\frac{a}{b}$; $b=2a$; $a\cdot 2a=72$; $a^2=36$;

$a=\sqrt{36}$; $a=6$; $P_{ABC_1D_1}=4a=4\cdot 6=24$.

Ответ: $P_{ABC_1D_1}=24$.

Домашнее задание

21.12. Ортогональная проекция треугольника площадью 48 cm² построена из треугольника со сторонами 14 cm, 16 cm и 6 cm. Вычислите угол между плоскостью этого треугольника и его проекцией.

$S_{ABC}=48\ cm^2$; $AB=14\ cm$; $AD=16\ cm$;

$BD=6\ cm$. $\alpha=CED=?$

$$S_{ABD}=\sqrt{18\cdot(18-14)\cdot(18-16)\cdot(18-6)}=24\sqrt{3};$$

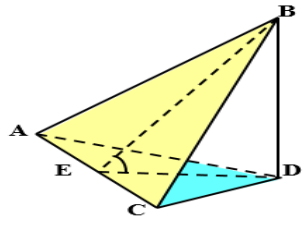
$$cos\alpha=\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}}=\frac{24\sqrt{3}}{48}=\frac{\sqrt{3}}{2};\qquad \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$\alpha=30°$. **Ответ:** $\alpha=30°$.

21.13. Ортогональная проекция треугольника площадью 12 cm² построена из треугольника со сторонами 13 cm, 14 cm и 15 cm. Вычислите угол между плоскостью этого треугольника и его проекцией.

$S_{ABC}=12\ cm^2$; $AC=13\ cm$; $CD=14\ cm$;

$AD=15\ cm$. $\alpha=\angle BED=?$



$$p=\frac{AC+CD+AD}{2}=\frac{13+14+15}{2}=\frac{42}{2}=21\ cm;$$

$$S_{ACD}=\sqrt{p\cdot(p-AC)\cdot(p-CD)\cdot(p-AD)}=$$

$$=\sqrt{21\cdot(21-13)\cdot(21-14)\cdot(21-15)}=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=\sqrt{7056}=84\ cm^2;$$

$$\cos\alpha=\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}};\qquad \cos\alpha=\frac{12}{84};\qquad \cos\alpha=\frac{1}{7};\qquad \alpha=\arccos\frac{1}{7}.$$

Ответ: $\alpha=arccos\ \frac{1}{7}$.

Урок 20. ПРАКТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ НА ПОВТОРЕНИЕ ГЛАВЫ

I. Стандарты:

– уметь применять изученные концепции, факты и методы в незнакомых или жизненных ситуациях.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

– знать обобщенную теорему Пифагора.

- знать теорему о трёх перпендикулярах.

Навыки:

- уметь применять теоремы о перпендикулярности плоскостей в пространстве и признаки перпендикулярности плоскостей при решении задач.
- уметь применять изученные концепции, факты и методы в незнакомых или жизненных ситуациях.

III. Краткое описание содержания урока:

- перпендикулярные плоскости в пространстве.

IV. Оборудование и наглядные пособия:

- модели различных плоских и пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Приведите примеры перпендикулярности прямых и плоскостей.	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме: Приведите примеры перпендикуляра и диагонали, опущенных на плоскость в пространстве
Формирование и закрепление знаний	Свойства перпендикулярных прямых в пространстве. Перпендикуляр, диагональ и расстояние в пространстве. Теорема о трёх перпендикулярах	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 22.1, 22.2, 22.3, 22.4
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 22.5
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 22.6		

22.1. Какой из полученных выводов неверный?

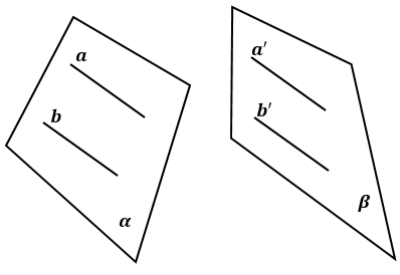
А) Если две прямые, лежащие в одной плоскости, параллельны двум прямым, лежащим в одной плоскости, то эти плоскости параллельны.

Б) Если две прямые параллельны прямой, то они взаимно параллельны.

В) Если прямая, лежащая на плоскости, перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна и самой прямой.

Г) Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то эта прямая также перпендикулярна плоскости.

Д) Наклонная и её проекция на плоскость на наименьший из внешних углов и плоскостей называются внешними углами.



$$\begin{cases} a \parallel a' \\ b \parallel b' \end{cases} \rightarrow \quad \alpha \nparallel \beta .$$

Ответ: A.

22.2. Какое из следующих утверждений неверно?

А) Если две прямые в пространстве параллельны третьей прямой, то они параллельны друг другу.

Б) Прямая, проведённая перпендикулярно от основания плоскости к её проекции, также перпендикулярна самой плоскости.

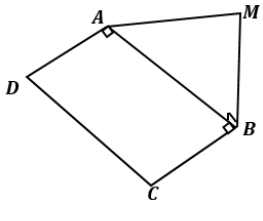
В) Через три точки пространства может пройти только одна плоскость.

Г) Соотношение отрезков прямой или параллельных прямых не меняется при параллельной проекции (проецируемые отрезки не параллельны направлению проекции).

Д) Если прямая, лежащая вне плоскости, параллельна прямой в этой плоскости, то эта прямая и плоскость параллельны друг другу.

Ответ: Г

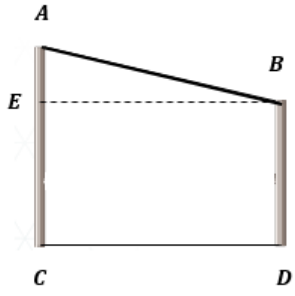
22.3. Из вершины BM правильного четырёхугольника опущен отрезок BM, перпендикулярный плоскости. Докажите, что: а) прямая AD перпендикулярна плоскости, на которой лежат прямые AB и BM; б) прямая CD перпендикулярна плоскости, на которой лежат прямые BC и BM.



$$a)\ \begin{cases} AB \perp AD \\ MB \perp AB \end{cases} \rightarrow MA \perp AD .$$ Значит, $AD \perp ABD$.

$$b)\ \begin{cases} CD \perp BC \\ BM \perp BC \end{cases} \rightarrow MC \perp CD .$$ Значит, $CD \perp BMC$.

22.4. Из точек A и B проведены прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие её в точках C и D соответственно. Если AC = 3 m, BD = 2 m, CD = 2,4 m и прямая AB не пересекает плоскость α, найдите расстояние между точками A и B.



$AC = 3\ m;\ BD = 2\ m;\ CD = 2{,}4\ m.\ AB = ?$

$BE \parallel CD \rightarrow BE = CD = 2{,}4\ m;\ CE = BD = 2\ m;$

$AE = AC - CE = 3\ m - 2\ m = 1\ m;$

$$AB = \sqrt{AE^2 + EB^2} = \sqrt{1^2 + (2{,}4)^2} = \sqrt{1 + 5{,}76} = \sqrt{6{,}76} = 2{,}6\ m.$$

Ответ: $AB = 2{,}6\ m.$

22.5. Найдите длину диагонали прямоугольного параллелепипеда по трём его измерениям: а) 1, 2, 2; б) 2, 3, 6; в) 6, 6, 7.

$a)\ a = 1;\ b = 2;\ c = 2.\ d = ?$

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3.$ **Ответ:** $d = 3$

$b)\ a = 2;\ b = 3;\ c = 6.\ d = ?$

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7.$ **Ответ:** $d = 7$

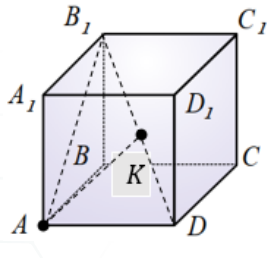
$c)\ a = 6;\ b = 6;\ c = 7.\ d = ?$

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{6^2 + 6^2 + 7^2} = \sqrt{36 + 36 + 49} = \sqrt{121} = 11.$

Ответ: $d = 11.$

Домашнее задание

22.6. Ребро куба равно a. Найдите расстояние от одного конца куба до диагонали, соединяющей два других его конца.



$$AB_1 = \sqrt{{AA_1}^2 + {A_1B_1}^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2};$$

$$DB_1 = \sqrt{AD^2 + {AA_1}^2 + {A_1B_1}^2} = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3};$$

ΔDAB_1 da

$$\frac{AD \cdot AB_1}{2} = \frac{DB_1 \cdot AK}{2};$$

$$AK = \frac{AD \cdot AB_1}{DB_1} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $AK = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$

Урок 12. ПРАКТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ2 НА ПОВТОРЕНИЕ ГЛАВЫ

I. Стандарты:

– уметь применять изученные концепции, факты и методы в незнакомых или жизненных ситуациях.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

– знать обобщенную теорему Пифагора.

-знать теорему о трёх перпендикулярах .

Навыки:

-уметь применять теоремы о перпендикулярности плоскостей в пространстве и признаки перпендикулярности плоскостей при решении задач.

-уметь применять изученные концепции, факты и методы в незнакомых или жизненных ситуациях.

III. Краткое описание содержания урока:

-Перпендикулярные плоскости в пространстве.

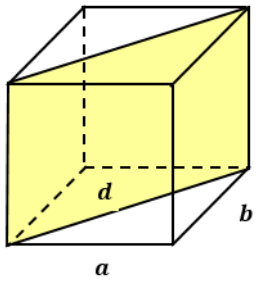
IV. Оборудование и наглядные пособия:

- модели различных плоских и пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Приведите примеры перпендикулярности прямых и плоскостей.	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме: Приведите примеры перпендикуляра и диагонали,опущенных на плоскоть в пространстве.
Формирование и закрепление знаний	Свойства перпендикулярных прямых в пространстве. Перпендикуляр, диагональ и расстояние в пространстве. Теорема о трёх перпендикулярах	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 22.7, 22.8, 22.9
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 22.10
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 22.11-22.12		

22.7. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 7 cm и 24 cm, а высота 8 cm. Найдите площадь диагонального сечения параллелепипеда.



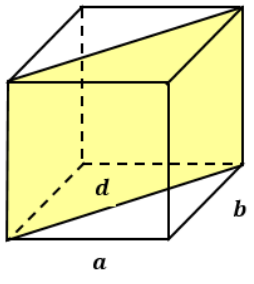
$a = 7$ см; $b = 24$ см; $c = 8$ см. $S_{сечения} = ?$

$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{(49 + 576)} = \sqrt{625} = 25$ см;

$S_{сечения} = d \cdot c = 25 \text{ см} \cdot 8 \text{ см} = 200 \text{ см}^2$.

Ответ: $S_{сечения} = 200 \text{ см}^2$.

22.8. Найдите площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда в трёх измерениях: *10 см, 22 см, 16 см.*



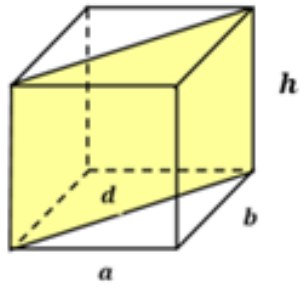
$a = 10$ см; $b = 22$ см; $c = 16$ см. $S_{основания} = ?$

$S_{основания} = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c) =$

$= 2 \cdot 10 \cdot 22 + 22 \cdot 16 + 10 \cdot 16 = 2 \cdot 220 + 160 + 352 =$

$= 2 \cdot 732 = 1464 \text{ см}^2$. **Ответ:** $S_{основания} = 1464 \text{ см}^2$.

22.9. Найдите боковую поверхность прямоугольного параллелепипеда, если его высота h, площадь основания Q, а площадь диагонального сечения M.



$S_{основания} = a \cdot b = Q$; $d = \sqrt{a^2 + b^2}$; $d \cdot h = M$;

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \left(\frac{M}{h}\right)^2 \\ a \cdot b = Q \quad |\cdot 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \left(\frac{M}{h}\right)^2 \\ 2ab = 2Q \end{cases}$$

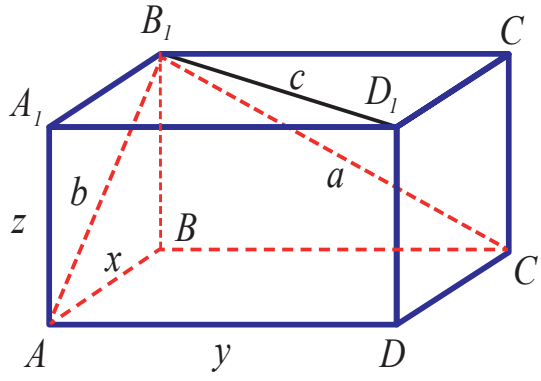
$$a^2 + b^2 + 2ab = \left(\frac{M}{h}\right)^2 + 2Q; \quad (a+b)^2 = \left(\frac{M}{h}\right)^2 + 2Q; \quad a + b = \sqrt{\left(\frac{M}{h}\right)^2 + 2Q};$$

$$S_{бок} = 2(a+b) \cdot h = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{M}{h}\right)^2 + 2Q} \cdot h = 2 \cdot \sqrt{\left(\left(\frac{M}{h}\right)^2 + 2Q\right) \cdot h^2} =$$

$$= 2 \cdot \sqrt{M^2 + 2h^2 \cdot Q}.$$

Ответ: $S_{боковая} = 2 \cdot \sqrt{M^2 + 2h^2 \cdot Q}$.

22.10. Диагонали сторон, сходящихся на одной вершине прямоугольного параллелепипеда, равны *a, b, c* .Найдите длины трёх измерений параллелепипеда.



$$\begin{cases} x^2+z^2=b^2 \\ y^2+z^2=a^2 \\ x^2+y^2=c^2 \end{cases} \rightarrow \quad 2(x^2+y^2+z^2)=a^2+b^2+c^2\,;$$

$$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\,; \quad c^2+z^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\,;$$

$$z^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}-c^2=\frac{a^2+b^2+c^2-2c^2}{2}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\,;$$

$$z^2=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\,; \qquad z=\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}\,; \quad x^2+a^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\,;$$

$$x^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}-a^2\,; \quad x^2=\frac{a^2+b^2+c^2-2a^2}{2}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\,;$$

$$x^2=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\,; \qquad x=\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}\,; \qquad y^2+b^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\,;$$

$$y^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}-b^2\,; \quad y^2=\frac{a^2+b^2+c^2-2b^2}{2}=\frac{a^2-b^2+c^2}{2}\,;$$

$$y^2=\frac{a^2-b^2+c^2}{2}\,; \qquad y=\sqrt{\frac{a^2-b^2+c^2}{2}}\,;$$

Ответ: $x=\sqrt{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}}\,; \qquad y=\sqrt{\dfrac{a^2-b^2+c^2}{2}}\,;$

$$=\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}\,.$$

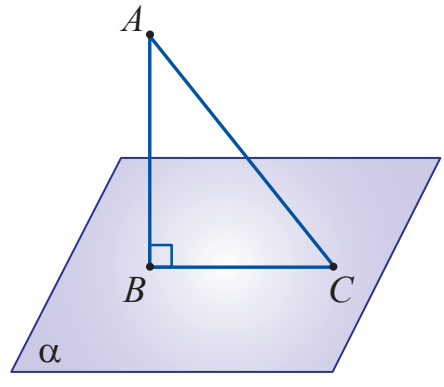
Домашнее задание

22.11. Угол между перпендикуляром и наклонной равен 60°. Длина перпендикуляра равна 20. Найдите длину наклонной.

Дано: $\angle BAC = 60°;\quad AB = 20.\quad AC = ?$

$\cos\angle BAC = \frac{BA}{AC}$; $\cos 60° = \frac{20}{AC}$; $\frac{1}{2} = \frac{20}{AC}$;

$AC = 2 \cdot 20 = 40.$ **Ответ:** $AC = 40.$

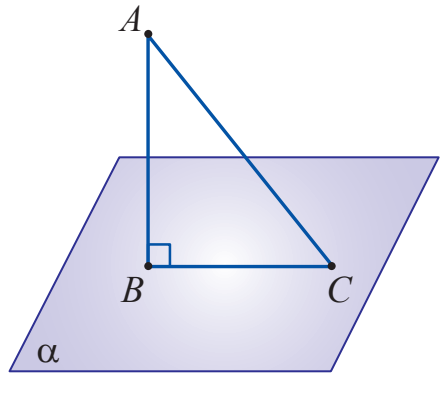


22.12. Угол между наклонной и перпендикуляром плоскости равен 60°, длина линии $20\sqrt{3}$. Найдите длину перпендикуляра.

Дано: $\angle BAC = 30°;\quad AB = 10.\quad AC = ?$

$\cos\angle BAC = \frac{AB}{AC}$; $\cos 60° = \frac{AB}{20\sqrt{3}}$; $\frac{1}{2} = \frac{AB}{20\sqrt{3}}$;

$AB = \frac{20\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$. **Ответ:** $AB = 10\sqrt{3}$



Урок 13. ПРАКТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ НА ПОВТОРЕНИЕ ГЛАВЫ

I. Стандарты:

– уметь применять изученные концепции, факты и методы в незнакомых или жизненных ситуациях.

II. Цель урока: формирование у учащихся следующих знаний и умений:

Знания:

– знать обобщенную теорему Пифагора.

- знать теорему о трёх перпендикулярах.

Навыки:

– уметь применять теоремы о перпендикулярности плоскостей в пространстве и признаки перпендикулярности плоскостей при решении задач.

– уметь применять изученные концепции, факты и методы в незнакомых или жизненных ситуациях.

III. Краткое описание содержания урока:

– перпендикулярные плоскости в пространстве.

IV. Оборудование и наглядные пособия:

– модели различных плоских и пространственных геометрических фигур.

V. Краткая технологическая карта урока:

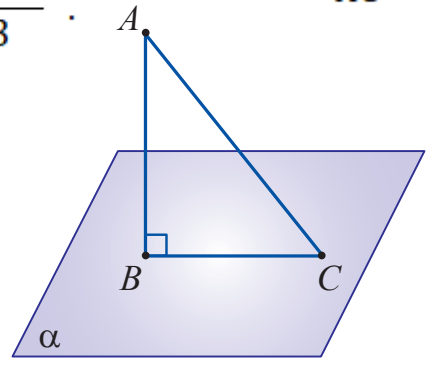
Этапы урока	Содержание	Методические рекомендации	Вопросы и задачи, требующие решения
Мотивация	Приведите примеры перпендикулярности прямых и плоскостей.	«Мозговой штурм»	Вопросы по теме: Приведите примеры перпендикуляра и диагонали, опущенных на плоскость в пространстве
Формирование и закрепление знаний	Свойства перпендикулярных прямых в пространстве. Перпендикуляр, диагональ и расстояние в пространстве. Теорема о трёх перпендикулярах	Работа по учебнику	Практическое упражнение и приложение 22.13, 22.14, 22.15
Итог урока	Что нового сегодня узнали?	Вопросы и ответы	Практическое упражнение и приложение 22.16
Домашнее задание	Практическое упражнение и приложение 22.17		

22.13. Угол между перпендикуляром к плоскости и наклонной равен 30°, а длина перпендикуляра равна 10°. Найдите длину линии.

Дано: $\angle BAC = 30°$; $AB = 10$. $AC = ?$

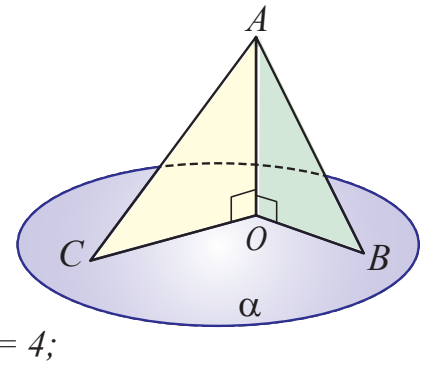
$$\cos\angle BAC = \frac{AB}{AC}; \quad \cos 60° = \frac{10}{AC}; \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{10}{AC};$$

$$AC = \frac{2\cdot 10}{\sqrt{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3}.$$ **Ответ:** $AC = \frac{20\sqrt{3}}{3}$.



22.14. От точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длину наклонных, если их соотношения равны 1:2, а их проекции равны 1 и 7.

$AB:AC = 1:2$; $OB = 1$; $OC = 7$. $AB = ?$, $AC = ?$



$AB = x$; $AC = 2x$; $\begin{cases} AO^2 + OC^2 = AC^2 \\ AO^2 + OB^2 = AB^2 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} AO^2 + 7^2 = (2x)^2 \\ AO^2 + 1^2 = x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} AO^2 + 49 = 4x^2 \\ AO^2 + 1 = x^2 \end{cases}$

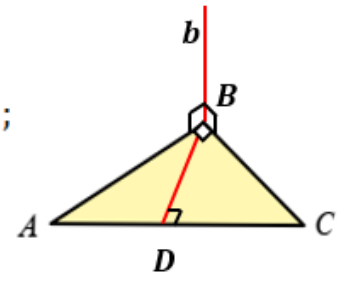
$49 - 1 = 4x^2 - x^2$; $48 = 3x^2$; $x^2 = 16$; $x = 4$; $AB = 4$;

$AD = 2x = 2\cdot 4 = 8$; $AD = 8$.

Ответ: $AB = 4$; $AD = 8$.

22.15. Через вершину B прямого угла треугольника ABC проведена прямая b, перпендикулярная плоскости треугольника. Найти расстояние между прямой b и AC, если $AB = 3$, $BC = 4$..

Дано: $AB = 3$; $BC = 4$. Найти: $BD = ?$



$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5;$$

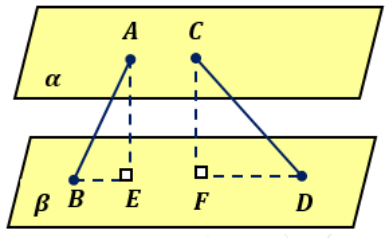
$AB \cdot BC = AC \cdot BD$;

$$BD = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{3\cdot 4}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4.$$

Ответ: $BD = 2{,}4$.

22.16. Вершины двух отрезков длиной 10 cm и 15 cm лежат в параллельных плоскостях. Если проекция первого отрезка на плоскость равна $\sqrt{19}$ cm, то сколько cm будет проекция второго отрезка?

$AE = CF = h;\ AB = 10\ cm;\ \ CD = 15\ cm;$
$BE = \sqrt{19}\ cm.\ \ FD = ?$



$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{10^2 - \left(\sqrt{19}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(100 - 19)} = \sqrt{81} = 9\ cm;\ \ CF = AE = 9\ cm;$$

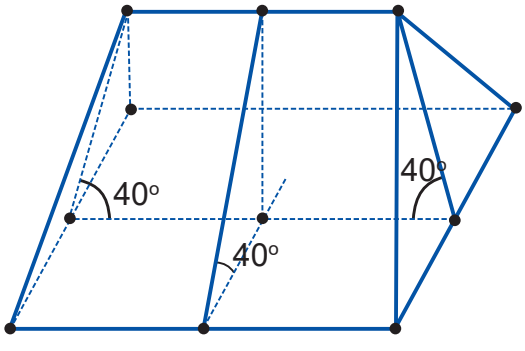
$$FD = \sqrt{CD^2 - CF^2} = \sqrt{(15^2 - 9^2)} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12\ cm.$$

Ответ: *12 cm.*

Домашнее задание

22.17. Крыша дома размерами 12,5 m на 7,2 m закрыта с четырёх наклонных сторон, как показано на рисунке. Каждая сторона образует угол 40° с плоскостью крыши. a) найдите площадь каждой наклонной стороны; b) найдите общую площадь всех скатов крыши; c) сколько жести потребуется для покрытия всей крыши, если известно, что 6% его уходит впустую при покрытии?

a)



b)



$a)\ GH = AB = 12{,}5\ m;\ \ BC = 7{,}2\ m;\ \ IJ = \frac{BC}{2} = \frac{7{,}2}{2} = 3{,}6\ m;\ \ tg40° = \frac{EJ}{IJ};$

$$tg40° = \frac{EJ}{3{,}6};\qquad EJ = 3{,}6 \cdot tg40°;\qquad EJ = FK = 3{,}6 \cdot tg40°;$$

$$tg40° = \frac{EJ}{GJ};\qquad tg40° = \frac{3{,}6 \cdot tg40°}{GJ};\qquad GJ = \frac{3{,}6 \cdot tg40°}{tg40°} = 3{,}6\ m;$$

$$\cos 40° = \frac{IJ}{IE} = \frac{GJ}{EG};\qquad IE = EG = \frac{3{,}6}{\cos 40°};\qquad GJ = KH;$$

$$EF = GH - 2 \cdot GJ = 12{,}5 - 2 \cdot 3{,}6 = 12{,}5 - 7{,}2 = 5{,}3\ m;$$

$$S_{ABFE} = S_{DCFE} = \frac{AB + EF}{2} \cdot EI = \frac{12{,}5 + 5{,}3}{2} \cdot \frac{3{,}6}{\cos 40^\circ} = \frac{17{,}8 \cdot 1{,}8}{0{,}8} = 40\ m^2;$$

$$S_{ADE} = S_{BCF} = \frac{AD \cdot GE}{2} = \frac{7{,}2 \cdot 3{,}6}{2 \cdot \cos 40^\circ} = \frac{12{,}96}{2 \cdot 0{,}8} = \frac{12{,}96}{1{,}6} = 8\ m^2;$$

b) $S_{крыши} = S_{ADE} + S_{BCF} + S_{ABFE} + S_{DCFE} = 2 \cdot (S_{ADE} + S_{ABFE}) = 2 \cdot (8+40) = 2 \cdot 48 = 96\ m^2;$

c) $S_{крыши} = 0{,}94 \cdot S_{жести};\quad S_{жести} = \frac{S_{крыши}}{0{,}94} = \frac{96}{0{,}94} = \frac{9600}{94} = 102\ m^2.$

Ответ: a) $S_{ADE} = S_{BCF} = 8\ m^2$; b) $S_{крыши} = 96\ m^2$; c) $S_{жести} = 102\ m^2$.

22.18. ***AB*** **и** ***CD*** **– параллельные отрезки, лежащие в двух плоскостях, пересекающихся под углом 60°. Точки** ***A*** **и** ***D*** **находятся на расстоянии 8 cm и 6,3 cm от линии пересечения плоскостей. Найдите расстояние между** ***AB*** **и** ***CD*****.**

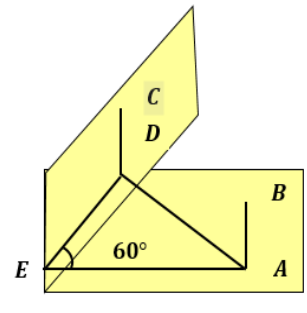
$AB \parallel CD;\quad AE = 8\ cm;\quad DE = 6{,}3\ cm.\quad AD = ?$

$\angle AED = 60°;$

$$AD = \sqrt{AE^2 + DE^2 - 2 \cdot AE \cdot DE \cdot \cos 60^\circ} =$$

$$= \sqrt{8^2 + 6{,}3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6{,}3 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{64 + 39{,}69 - 50{,}4} =$$

$= \sqrt{53{,}29} = 7{,}3\ cm.$



Ответ: $AD = 7{,}3\ cm.$

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Какое утверждение верно?

А. Если одна из двух прямых перпендикулярна третьей прямой, то вторая прямая также перпендикулярна этой прямой.

Б. Две прямые параллельны, если они перпендикулярны третьей прямой.

В. Если две прямые перпендикулярны плоскости, то они параллельны.

Ответ: В.

2. Прямая m перпендикулярна прямым a и b, лежащим в плоскости α, но прямая m не перпендикулярна плоскости a**. Что можно сказать о прямых a и b? Они:**

А) параллельны Б) пересекаются В) скрещиваются.

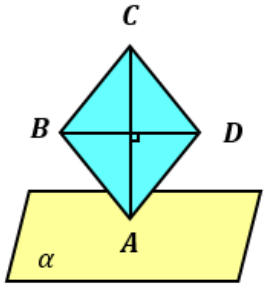
Ответ: А.

3. Через вершину A ромба $ABCD$ проходит плоскость α, перпендикулярная диагонали AC. Таким образом, отрезок диагонали BD…

А) перпендикулярен плоскости α

Б) параллелен плоскости α

В) лежит на плоскости α



$$\begin{cases} \alpha \perp AC \\ AC \perp BD \end{cases} \rightarrow \quad BD \parallel \alpha .$$

Через вершину A ромба $ABCD$ проходит плоскость α, перпендикулярная диагонали AC. Таким образом, отрезок диагонали BD параллелен плоскости α.

4. $a \parallel \alpha$, $b \perp \alpha$. Какими в этом случае не могут быть прямые a и b?

А) пересекающимися прямыми

Б) перпендикулярными прямыми

В) параллельными прямыми.

Ответ: Б.

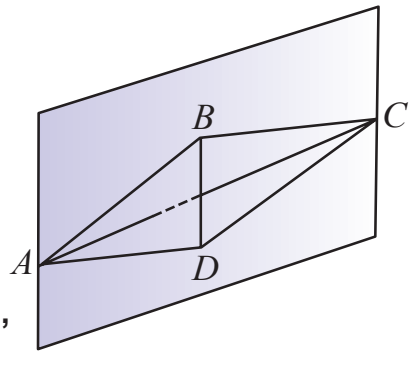
5. $ABCD$ – параллелограмм, $BD \perp \alpha$, $AC \perp \alpha$. Тогда чем не может быть $ABCD$?

А) прямоугольником

Б) квадратом

В) ромбом.

Ответ: A.



6. Прямая перпендикулярна плоскости окружности, если она...

А) если она перпендикулярна двум радиусам;

Б) если она перпендикулярна двум диаметрам;

скачано с сайта www.idum.uz

В) если она перпендикулярна двум прямым.

Ответ: Б

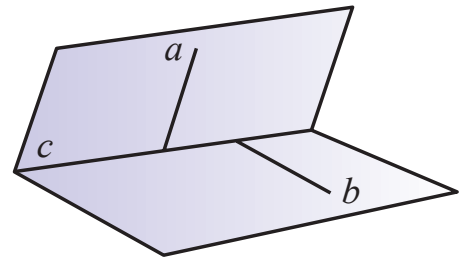
7. $\cap b = c$, $a \in \alpha$, $b \in \beta$. **При каком условии** $\angle(ab)$-α **и** β **будет линейным углом двугранного угла между плоскостями?**

А) $b \perp \alpha$

Б) $a \perp c$

В) $a \perp c$, $b \perp c$

Ответ: В.



8. Какое утверждение верно?

А) Ребро двустороннего угла не может быть перпендикулярно плоскости его линейного угла.

Б) Две плоскости, перпендикулярные одной и той же плоскости, не могут быть параллельны.

В) Две плоскости, перпендикулярные одной прямой, не могут быть параллельны.

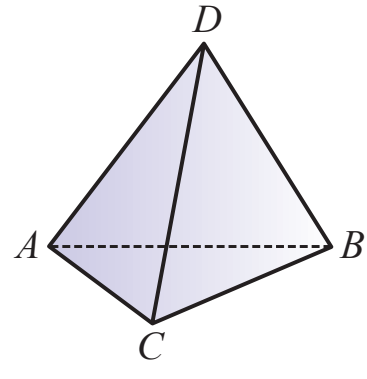
9. $ABC \perp ABD$. **Основание перпендикуляра, проведённого из точки** D **к плоскости** ABC**...**

А) лежит вне треугольника ABC;

Б) лежит на стороне AB;

В) лежит внутри треугольника ABC.

Ответ: Б.



10. Какое утверждение неверно?

А) Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

Б) Если плоскости перпендикулярны, то линия их пересечения перпендикулярна любой прямой, лежащей в одной из этих плоскостей.

В) Плоскость, перпендикулярная линии пересечения двух данных плоскостей, перпендикулярна каждой из этих плоскостей.

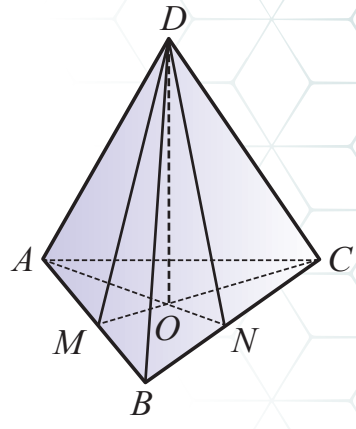
Ответ: Б

11. Сколько двусторонних углов у параллелепипеда?

А) 18 Б) 12 В) 24

Ответ: Б

12. В треугольнике ABC AN и CM – высоты. $DO \perp ABC$. Какому линейному углу равен двугранный угол $ABCD$.



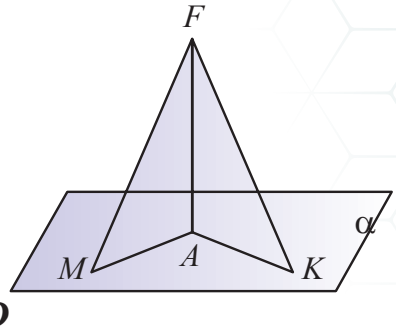
А) ABD

Б) AND

В) ACD

Ответ: $Б$.

13. $AF \perp \alpha$. Какое неравенство неуместно?



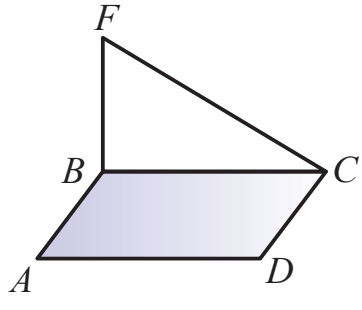
А) $FM > AF$

В) $FA > FK$

С) $AK < FK$

Ответ: Б.

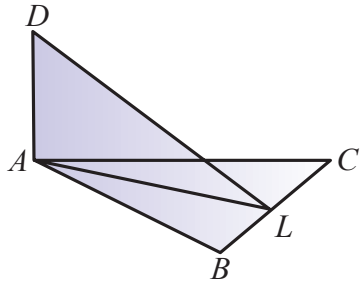
14. $BF \perp ABC$. Каким должен быть $ABCD$, чтобы CD и CF были перпендикулярны?



А) прямоугольник
Б) ромб
В) квадрат

Ответ: В.

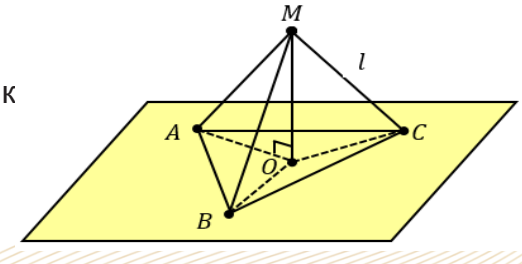
15. Чем должен быть LA, чтобы DL и BC были перпендикулярны?



А) биссектриса
Б) медиана
В) высота

Ответ: В.

16. Точка M равноудалена от вершин треугольника ABC. Из какой точки пересечения отрезков будет состоять проекция точки M на плоскость ABC?



А) высоты треугольника
Б) биссектрисы треугольника
В) средних перпендикуляров, опущенных к сторонам треугольника.

Ответ: В.

17. На рисунке показан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На каком рисунке прямые a и b не перпендикулярны?

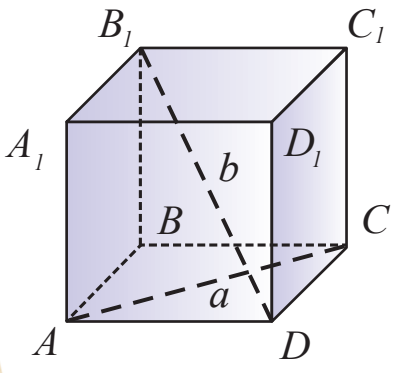


Рис. 1

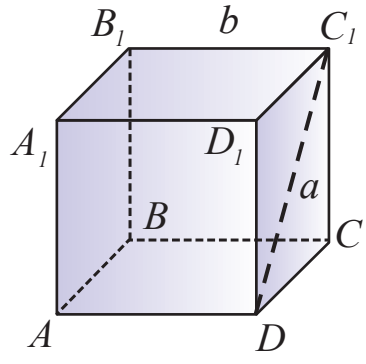


Рис. 2

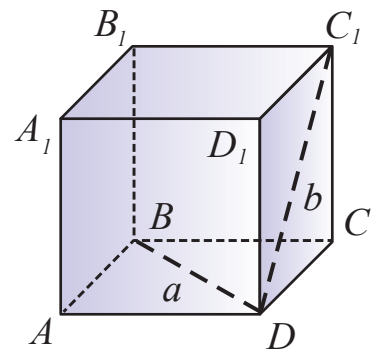


Рис. 3

Ответ: На рисунке 3.

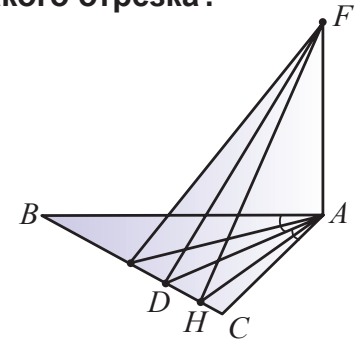
18. В треугольнике ABC медиана AL, биссектриса AD, высота AH. $AF \perp ABC$. Расстояние от точки F до прямой BC равно длине какого отрезка?

А) FL

Б) FD

В) FH

Ответ: В.



19. В тетраэдре $ABCD$ $\angle BCD = \angle ACD = 90°$. Перечислите все рёбра, перпендикулярные CD.

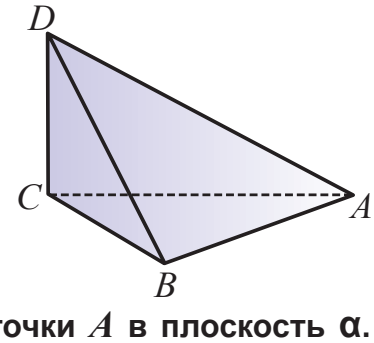
А) AB, CB, CA

Б) AB, BD, AD

В) CB, CA

Г) $AB,\ CD \perp BC;\quad CD \perp AC.$

Ответ: В. CB и CA.



20. Перпендикуляры AB, AC и AD проведены из точки A в плоскость α. $\angle ACB = 45°$, $AC = 8\sqrt{2}$, $BD = 6$. Найдите AD.

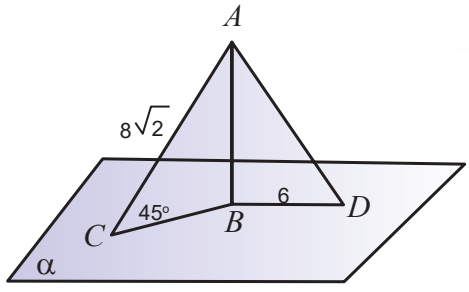
А) $2\sqrt{13}$; В) 10; С) 14; D) 4.

$$\sin \angle ACB = \frac{AB}{AC};\qquad \sin 45° = \frac{AB}{8\sqrt{2}};\qquad \frac{AB}{8\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$AB = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 8;\quad AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} =$$

$= \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$;

Ответ: $AD = 10$.



21. Отрезок AB перпендикулярен плоскости α. Построены наклонные AD и AC. $BD = 6, AD = 10, AC = 16$. Найдите $\angle ACB$.

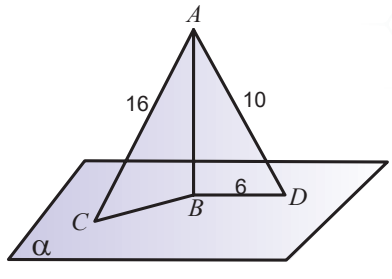
A) 45°; B) 30°; C) 60°; D) 90°

$$AB = \sqrt{AD^2 - BD^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} =$$

$$= \sqrt{64} = 8 ; \qquad \sin\angle ACB = \frac{AB}{AC} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} ;$$

$$\sin\angle ACB = \frac{1}{2} ; \qquad \angle ACB = 30^\circ .$$

Ответ: $\angle ACB = 30°$

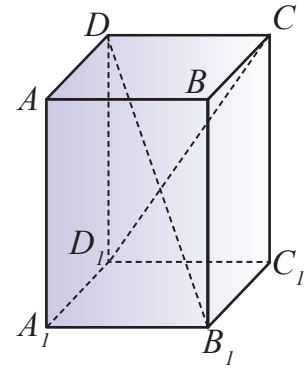


Глава V. ПОВТОРЕНИЕ

23. ЗАДАЧИ НА ПОВТОРЕНИЕ.

1. Перпендикуляры и наклонные к плоскости

1. На рисунке изображён прямоугольный параллелепипед. 1) Пересекаются ли прямые DB_1 и D_1C? Являются ли BB_1 и D_1C прямыми? 2) Можно ли провести плоскость через прямые AO и B_1C_1? А через DC и DB_1? А через BC и AA_1?



Ответ: 1) Прямые DB_1 и D_1C не пересекаются. Прямые BB_1 и D_1C не пересекаются.

2) $\begin{cases} AO \subset \mathrm{ADC_1B_1} \\ B_1C_1 \subset ADC_1B_1 \end{cases}$ Следовательно, через прямые AO и B_1C_1 можно провести плоскость.

$\begin{cases} DC \subset CDB_1 \\ DB_1 \subset DCB_1 \end{cases}$ Следовательно, через прямые DC и DB_1 можно провести плоскость.

Прямые BC и AA_1-скрещивающиеся, поэтому через эти прямые нельзя провести плоскость.

2. Стороны прямоугольного параллелепипеда равны 3 cm, 4 cm и 7 cm. Найдите площадь сечения, проведённого через концы трёх рёбер, исходящих из одного конца.

$$BD = \sqrt{CB^2 + CD^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5\ cm;$$

$\begin{cases} CE \perp BD \\ CC_1 \perp CE \end{cases} \rightarrow \quad C_1E \perp BD$ три перпендикуляра

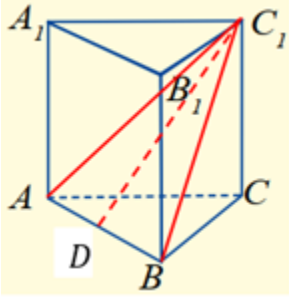
$$\frac{BD \cdot CE}{2} = \frac{DC \cdot BC}{2} = S_{BCD};$$

$$CE = \sqrt{CE^2 + {CC_1}^2} = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + 7^2} = \sqrt{\frac{144}{25} + 49} = \sqrt{\frac{1369}{25}} = \frac{37}{5}\ cm;$$

$$S_{BDC_1} = \frac{BD \cdot C_1E}{2} = \frac{5 \cdot \frac{37}{5}}{2} = \frac{37}{2} = 18{,}5\ cm^2.$$

Ответ: $S_{ABC_1} = 18{,}5\ см^2$.

3. Основание правильной призмы состоит из треугольника, сторона которого равна a. Высота призмы b. Проведите плоскость через одну из сторон нижнего основания и противоположный конец верхнего основания. Вычислите площадь полученного сечения.



$AB = BC = AC = a; \quad BB_1 = CC_1 = AA_1 = b;$

$BC_1 = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad AD = DB = a/2;$

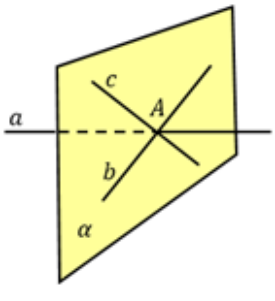
$DC_1 = \sqrt{BC_1^2 - DB^2} = \sqrt{(\sqrt{a^2+b^2})^2 - (a/2)^2} =$

$= \sqrt{a^2 + b^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{4a^2 + b^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3a^2 + b^2}}{4};$

$S_{ABC_1} = \frac{AB \cdot DC_1}{2} = a \cdot \sqrt{\frac{(3a^2 + b2)^2}{4}} = \frac{(a \cdot \sqrt{(3a^2 + b^2)}2}{2} = (a \cdot \sqrt{\frac{(3a^2+b^2)}{4}}).$

Ответ: $S_{ABC_1} = (a \cdot \sqrt{(3a^2 + b^2)})/4.$

4. Из точки, взятой на прямой, проведите плоскость, перпендикулярную этой прямой.

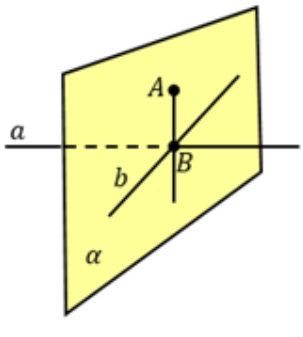


$a \cap b \cap c = A; \qquad b \perp a; \qquad c \perp a.$

Через прямые b и c можно провести плоскость α.

$\begin{cases} A \in a \\ A \in \alpha \end{cases} \rightarrow \quad a \perp \alpha.$

5. Из точки, взятой за пределами прямой, проведите перпендикулярную к этой прямой плоскость.



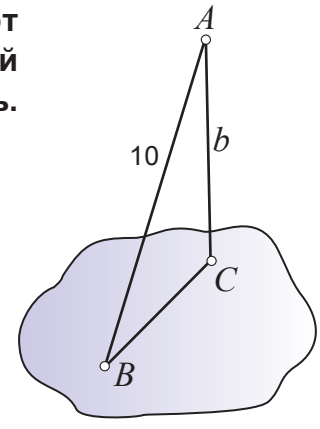
$AB \perp a;$

$b \perp a;$

$a \cap b = B.$

Через прямые AB и b проведем плоскость α.

6. Из точки A, находящейся на расстоянии b cm от плоскости, к этой плоскости проводится линия AB длиной 10 cm. Найдите её проекцию BC, опущенную в эту плоскость.



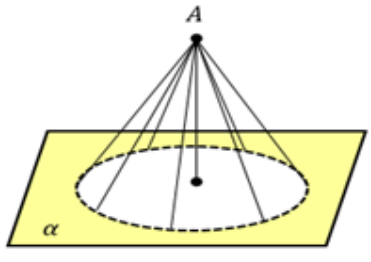
$AC = b$ cm; $AB = 10$ cm. $BC = ?$

$AB^2 = BC^2 + AC^2$; $BC^2 = AB^2 - AC^2$;

$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - b^2} = \sqrt{100 - b^2}$.

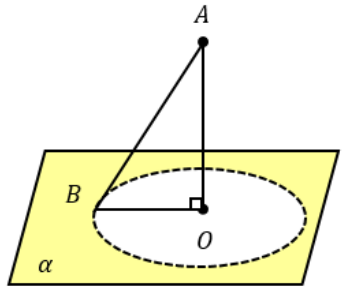
Ответ: $BC = \sqrt{100 - b^2}$.

7. Найдите геометрическое положение точек на данной плоскости, стоящих на заданном расстоянии от точки, лежащей вне плоскости.



Ответ: Геометрическое положение точек данной плоскости на заданном расстоянии от точки, лежащей вне плоскости, представляет собой окружность.

8. Из центра окружности проведен перпендикуляр к его плоскости. Если длина перпендикуляра равна a, а площадь круга – Q, определите расстояние от его вершины до точки на окружности.



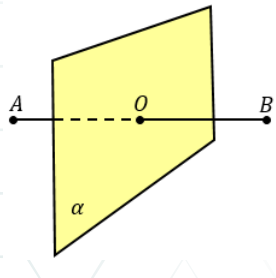
$OB = R$; $AO = a$; $S_{круга} = Q$. $AB = ?$

$\pi R^2 = S_{круга}$; $\pi R^2 = Q$; $R^2 = \dfrac{Q}{\pi}$;

$$AB = \sqrt{BO^2 + AO^2} = \sqrt{R^2 + a^2} = \sqrt{\frac{Q}{\pi} + a^2}.$$

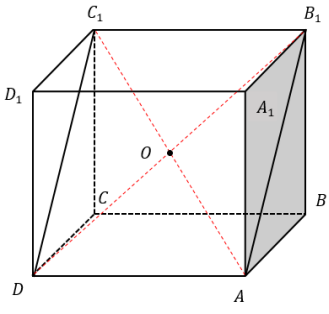
Ответ: $AB = \sqrt{\dfrac{Q}{\pi} + a^2}$.

9. Найдите геометрическое положение точек, равноудалённых от двух данных точек.



Ответ: Геометрическое место точек, равноудалённых от точек A и B, состоит из плоскости α.

10. Прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, его боковое ребро $AA_1 = 56$ cm, стороны основания: $AB = 33$ cm и $AO = 40$ cm. Определите площадь поперечного сечения, проходящего через вершины AD и B_1C_1.



$AA_1 = 56$ cm; $AB = 33$ cm; $AO = 40$ cm.

$S_{ADC_1B_1} = ?$ $AC_1 = 2 \cdot AO = 2 \cdot 40$ cm $= 80$ cm;

$AA_1 = BB_1 = 56$ cm; $AC_1^2 = AD^2 + AA_1^2 + AB^2$;

$80^2 = AD^2 + 56^2 + 33^2$; $6400 = AD^2 + 3136 + 1089$;

$$AD = \sqrt{6400 - 3136 - 1089} = \sqrt{2175} = 5\sqrt{87}\ cm;$$

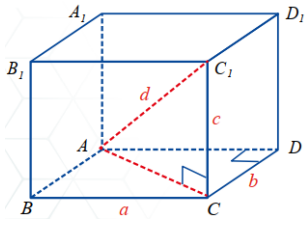
$$AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^{\,2}} = \sqrt{33^2 + 56^2} = \sqrt{1089 + 3136} = \sqrt{4225} = 65\ cm;$$

$$S_{ADC_1B_1} = AD \cdot AB_1 = 5\sqrt{87}\ cm \cdot 65\ cm = 325\sqrt{87}\ cm^2.$$

Ответ: $S_{ADC_1B_1} = 325\sqrt{87}\ cm^2$.

2. Угол между прямой и плоскостью

1. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 4 cm и 3 cm, а высота параллелепипеда 5 cm. Найдите его диагональ и угол, который диагональ образует с плоскостью основания.



$a = BC = 4$ cm; $b = CD = 3$ cm; $c = CC_1 = 5$ cm;

$AC_1 = ?$; $\angle CAC_1 = ?$.

$AB = CD$; $BC = AD$; $AC^2 = AB^2 + BC^2$;

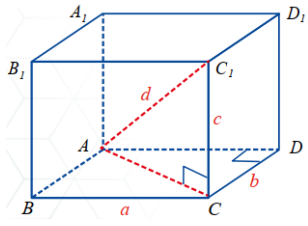
$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5\ cm; \qquad AC = 5\ cm;$$

$$AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^{\,2}} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = 5\sqrt{2}\ cm;\ \sin\angle CAC_1 = \frac{CC_1}{AC_1};$$

$$\sin\angle CAC_1 = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \sin\angle CAC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \angle CAC_1 = 45°.$$

Ответ: $AC_1 = 5\sqrt{2}\ cm$; $\angle CAC_1 = 45°$.

2. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с плоскостью основания параллелепипеда угол 45°. Стороны основания 120 cm и 209 cm. Определите высоту параллелепипеда.



$a = BC = 4\ cm;\ \ b = CD = 3\ cm;\quad c = CC_1 = 5\ cm;$

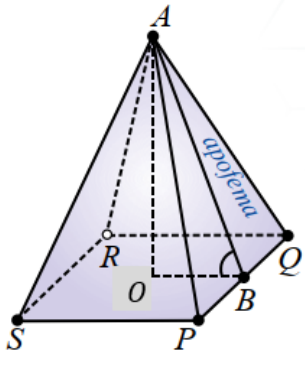
$AC_1 = ?;\quad \angle CAC_1 = ?.$

$AB = CD;\quad BC = AD;\quad AC^2 = AB^2 + BC^2;$

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{209^2 + 120^2} = \sqrt{43681 + 14400} = \sqrt{58081} = 241\ cm;$

$AC = 241\ cm;\quad CC_1 = AC = 241\ cm.$ **Ответ:** $CC_1 = 241\ cm.$

3. Высота правильной прямоугольной пирамиды равна h, угол отклонения апофемы к плоскости основания 60°. Найдите стороны пирамиды.



Дано: $h = OA;\quad \angle OBA = 60°.\quad AS = ?$

$SP = PQ = QR = SR;\quad AS = AP = AQ = AR;$

$$\sin\angle OBA = \frac{OA}{AB} = \frac{h}{AB};\quad \sin 60° = \frac{h}{AB};\quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{AB};$$

$$AB = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\cdot h}{3};\qquad \cos\angle OBA = \frac{OB}{AB};$$

$$\cos 60° = \frac{OB}{\frac{2\sqrt{3}\cdot h}{3}};\quad \frac{1}{2} = \frac{3\cdot OB}{2\sqrt{3}\cdot h};\quad 6\cdot OB = 2\sqrt{3}\cdot h;\quad OB = \frac{2\sqrt{3}\cdot h}{6};$$

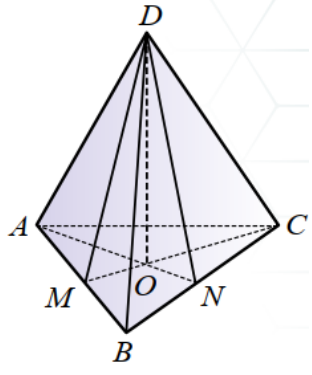
$$OB = \frac{\sqrt{3}\cdot h}{3};\qquad OB = PB;\qquad PQ = 2\cdot PB = 2\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot h}{3} = \frac{2\sqrt{3}\cdot h}{3};$$

$$PQ = \frac{2\sqrt{3}\cdot h}{3};\qquad AP = \sqrt{PB^2 + AB^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}\cdot h}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}\cdot h}{3}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{3h^2}{9} + \frac{12h^2}{9}} = \sqrt{\frac{15h^2}{9}} = \frac{h\sqrt{15}}{3};\qquad AS = AQ = AR = AP = \frac{h\sqrt{15}}{3}.$$

Ответ: $AS = \dfrac{h\sqrt{15}}{3}$.

4. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно b и образует с основанием пирамиды угол 30°. Найдите сторону основания пирамиды.



Дано: $\angle DAO = 30°;\quad AD = b.\quad AB = ?$

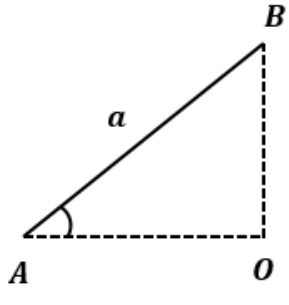
$\cos\angle DAO = \dfrac{AO}{AD};\quad \cos 30° = \dfrac{AO}{b};\quad \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{AO}{b};$

$AO = \dfrac{\sqrt{3}\cdot b}{2};\quad AO = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot AB;\quad \dfrac{\sqrt{3}\cdot b}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot AB;$

$2\sqrt{3}\cdot AB = 3\sqrt{3}\cdot b;\qquad AB = \dfrac{3\sqrt{3}\cdot b}{2\sqrt{3}} = \dfrac{3b}{2} = 1{,}5b.$

Ответ: $AB = 1{,}5b.$

5. Наклонная равна a. Если наклонная образует с плоскостью проекций угол: 1) 45°; 2) 60°; 3) 30°, найдите длину проекции этой прямой на плоскость.



1) Дано: $AB = a;\quad \angle A = 45°.\quad AO = ?$

$\cos\angle A = \dfrac{AO}{AB};\qquad \cos 45° = \dfrac{AO}{a};\qquad \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{AO}{a};$

$AO = \dfrac{a\cdot\sqrt{2}}{2}.$ **Ответ:** $AO = \dfrac{a\cdot\sqrt{2}}{2}.$

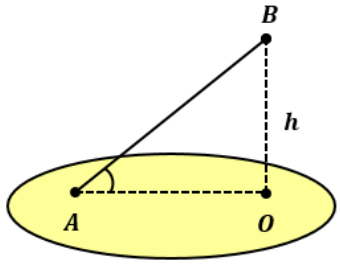
2) Дано: $AB = a;\quad \angle A = 60°.$ Найти: $AO - ?$

$\cos\angle A = \dfrac{AO}{AB};\quad \cos 60° = \dfrac{AO}{a};\quad \dfrac{1}{2} = \dfrac{AO}{a};\quad AO = \dfrac{a}{2}.$ **Ответ:** $AO = \dfrac{a}{2}.$

3) Дано: $AB = a;\quad \angle A = 30°.$ Найти: $AO - ?$

$\cos\angle A = \dfrac{AO}{AB};\quad \cos 30° = \dfrac{AO}{a};\quad \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{AO}{a};\quad AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$ **Ответ:** $AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

6. Точка лежит на расстоянии h от плоскости. Найдите длину прямой, проведённой из этой точки к плоскости и составляющей с ней угол: а) 30°; б), 45°; в) 60°.



а) Дано: $\angle A = 30°$; $OB = h$. $AB = ?$

$$\sin\angle A = \frac{OB}{AB}\ ; \quad \sin 30° = \frac{h}{AB}\ ; \quad \frac{1}{2} = \frac{h}{AB}\ ;$$

$AB = 2h.$

Ответ: $AB = 2h.$

b) Дано: $\angle A = 45°$; $OB = h.$ Найти: $AB = ?$

$$\sin\angle A = \frac{OB}{AB}\ ; \quad \sin 45° = \frac{h}{AB}\ ; \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{AB}\ ; \quad AB = \frac{2h}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}h\,.$$

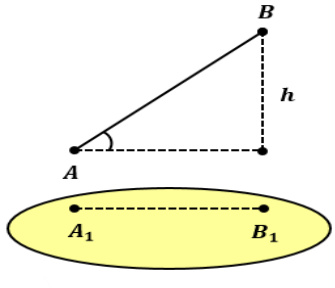
Ответ: $AB = \sqrt{2}\,h.$

b) Дано: $\angle A = 60°$; $OB = h.$ Найти: $AB = ?$

$$\sin\angle A = \frac{OB}{AB}\ ; \quad \sin 60° = \frac{h}{AB}\ ; \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{AB}\ ; \quad AB = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}h}{3}\,.$$

Ответ: $AB = \frac{2\sqrt{3}h}{3}$.

7. Под каким углом сечение должно быть наклонено к плоскости, чтобы проекция сечения на плоскость была вдвое меньше её?

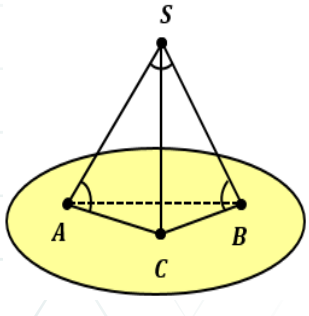


$$AB = 2\cdot A_1B_1\ ; \quad \cos\angle A = \frac{A_1B_1}{AB}\ ;$$

$$\cos\angle A = \frac{A_1B_1}{2\cdot A_1B_1}\ ; \quad \cos\angle A = \frac{1}{2}\ ; \quad \angle A = 60°\,.$$

Ответ: $\angle A = 60°.$

8. Из точки, удалённой от плоскости, проведены две наклонные. Эти кривые образуют угол 45° с плоскостью и угол 60° друг с другом. Определите расстояние между концами наклонных.



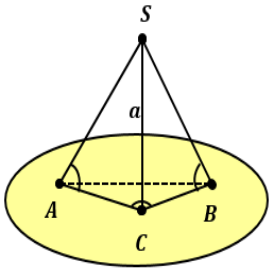
Дано: $CS = a$; $\angle SAC = \angle SBC = 45°$; $ASB = 60°$. Найти: $AB = ?$

$\angle SAB = \angle SBA = \angle ASB = 60°$; $CB = CS = AC = a$;

$SB^2 = CB^2 + CS^2$; $SB = \sqrt{CB^2 + CS^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

Ответ: $AB = SB = SA = a\sqrt{2}$.

9. Из точки, удалённой от плоскости, проводят две наклонные, образующие с плоскостью угол 30°. Их проекции на плоскость образуют угол 120°. Определите расстояние между концами наклонных.



$CS = a;\ \angle SAC = \angle SBC = 30°;\ \angle ACB = 120°.\ AB = ?$

$$tg\angle CBS = \frac{CS}{CB};\quad tg30° = \frac{a}{CB};\quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{CB};\quad AC = CB;$$

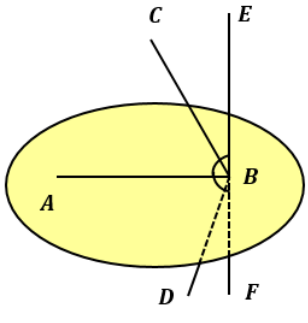
$$CB = a\sqrt{3};\quad AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2\cdot AC\cdot CB\cdot\cos\angle ACB;$$

$$AB = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + (a\sqrt{3})^2 - 2\cdot a\sqrt{3}\cdot a\sqrt{3}\cdot\cos\angle 120°} =$$

$$= \sqrt{3a^2 + 3a^2 - 6a^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{6a^2 + 3a^2} = \sqrt{9a^2} = 3a.$$

Ответ: $AB = 3a$

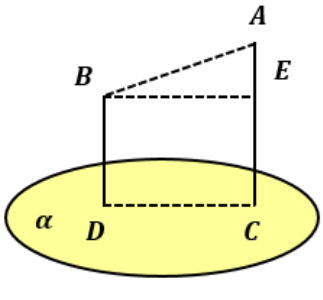
10. Прямая AB лежит в плоскости α. Из точки B проведены прямые BC и BD, перпендикулярные AB. Они находятся по одну сторону от плоскости α и наклонены к ней на 50° и 15°. Найдите угол CBD.



$AB\in\alpha;\ AB\perp BC;\quad AB\perp BD;\quad \angle CBE = 50°;$
$\angle DBF = 15°.$ Найти: $\angle CBD = ?$
$\angle CBD = 180° - (\angle CBE + \angle DEF) =$
$= 80° - (50° + 15°) = 180° - 65° = 115°.$
Ответ: $\angle CBD = 115°.$

3. Параллельные прямые и плоскости

1. Точки A и B лежат вне плоскости α. AC и BD перпендикулярны этой плоскости. AC = 3 m, BD = 2 m, CD = 24 dm. Определите расстояние между точками A и B.

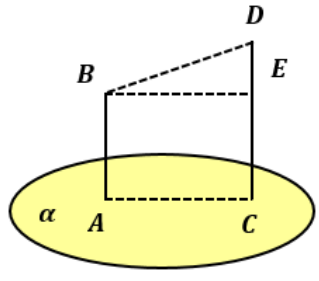


Дано: $AC\perp\alpha;\quad BD\perp\alpha;\quad A\notin\alpha;\quad B\notin\alpha;$
$AC = 3\ m = 30\ dm;\quad BD = EC = 2\ m = 20\ dm;$
$CD = 24\ dm.$ Найти: $AB = ?$
$BE = CD = 24\ dm;$
$AE = AC - EC = 30\ dm - 20\ dm = 10\ dm;$

$$AB = \sqrt{AE^2 + BE^2} = \sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{100 + 576} = \sqrt{676} = 26\ dm\,.$$

Ответ: $AB = 26\ dm.$

2. Вершины отрезка длиной 125 cm находятся на расстоянии 100 cm и 56 cm от плоскости. Найдите длину проекции отрезка.



Дано: $AB=56\ cm\ ;\ CD = 100\ cm\ ;\ BD = 125\ cm;$

Найти: $AC = ?\quad AB = EC\ ;$

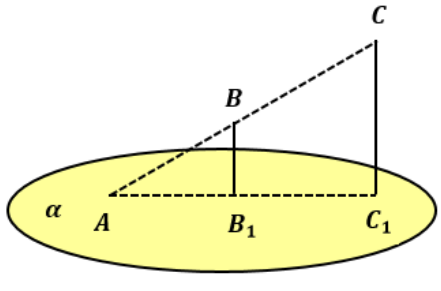
$DE = CD\text{-}EC = 100\ cm\text{-}56\ cm=44\ cm\ ;$

$AC = BE = \sqrt{BD^2 - DE^2} = \sqrt{125^2 - 44^2} =$

$= \sqrt{15625 - 1936} = \sqrt{13689} = 117\ cm.$

Ответ: $AC = 117\ cm.$

3. Из точки A плоскости α проводят прямую, на ней берутся точки B и C. AB = 8 cm и AC = 14 cm. Точка B находится на расстоянии 6 cm от плоскости α. Найдите расстояние от плоскости α до точки C.



Дано: $AB = 8\ cm;\ AC = 14\ cm;$

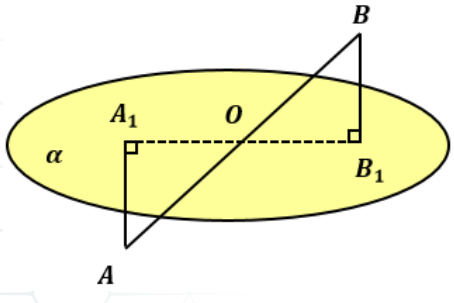
$BB_1 = 6\ cm.$ Найти: $CC_1 = ?$

$\Delta ABB_1 \sim \Delta ACC_1\ ;\quad \frac{AB}{AC} = \frac{BB_1}{CC_1}\ ;\quad \frac{8}{14} = \frac{6}{CC_1}\ ;$

$$CC_1 = \frac{6 \cdot 14}{8} = \frac{3 \cdot 7}{2} = \frac{21}{2} = 10{,}5\ cm\,.$$

Ответ: $CC_1.$

4. Отрезок длиной 10 cm проходит через плоскость. Его вершины находятся на растоянии 5 cm и 3 cm от плоскости. Найдите длину проекции отрезка на плоскость.



Дано: $AB = 10\ cm;\quad AA_1 = 5\ cm;$

$BB_1 = 3\ cm$.Найти: $A_1B_1 = ?$

$\Delta AA_1O \sim \Delta BB_1O\ ;\quad \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AO}{BO}\ ;\ \frac{AO}{BO} = \frac{5}{3}\ ;$

$AO = 5x;\ BO = 3\ x;\quad AO + OB = AB;$

$$5x + 3x = 10\ ;\quad 8x = 10\ ;\quad 4x = 5\ ;\quad x = \frac{5}{4}\ ;\quad AO = 5x = 5 \cdot \frac{5}{4} = \frac{25}{4}\ cm\ ;$$

$$A_1O = \sqrt{AO^2 - {AA_1}^2} = \sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)^2 - 5^2} = \sqrt{\left(\frac{25}{4} - 5\right)\cdot\left(\frac{25}{4} + 5\right)} = \sqrt{\frac{5}{4}\cdot\frac{45}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{5\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 4}} = \frac{5\cdot 3}{4} = \frac{15}{4}\ cm; \qquad BO = 3x = 3\cdot\frac{5}{4} = \frac{15}{4}\ cm;$$

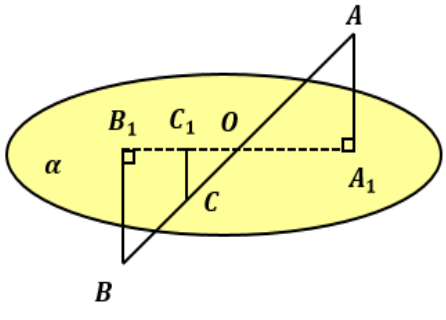
$$B_1O = \sqrt{OB^2 - {BB_1}^2} = \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 - 3^2} = \sqrt{\left(\frac{15}{4} - 3\right)\cdot\left(\frac{15}{4} + 3\right)} = \sqrt{\frac{3}{4}\cdot\frac{27}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{4}\ cm; \qquad A_1B_1 = A_1O + B_1O = \frac{15}{4}\ cm + \frac{9}{4}\ cm = \frac{24}{4}\ cm = 6\ cm.$$

Ответ: $A_1B_1 = 6\ cm.$

5. Отрезок проходит через плоскость. Его концы стоят от плоскости на 8 cm и 2 cm. Найдите расстояние от центра отрезка до плоскости.

Дано: $AA_1 = 2\ cm;\quad BB_1 = 8\ cm.\quad CC_1 = ?$



$$\Delta BB_1O \sim \Delta AA_1O; \quad \frac{BB_1}{AA_1} = \frac{BO}{AO}; \quad \frac{BO}{AO} = \frac{8}{2} = 4;$$

$$\frac{BO}{AO} = 4; \qquad BO = 4\cdot AO; \qquad AB = BO + AO;$$

$$AB = 4\cdot AO + AO = 5\cdot AO; \qquad BC = CA = \frac{AB}{2} = \frac{5\cdot AO}{2};$$

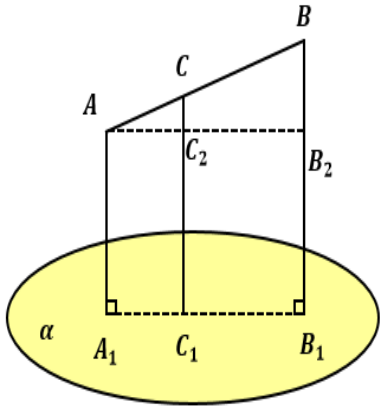
$$CO = AC - AO = \frac{5\cdot AO}{2} - AO = \frac{5\cdot AO - 2AO}{2} = \frac{3\cdot AO}{2};$$

$$\frac{CC_1}{AA_1} = \frac{CO}{AO}; \qquad \frac{CC_1}{2} = \frac{\frac{3\cdot AO}{2}}{AO}; \qquad \frac{CC_1}{2} = \frac{3\cdot AO}{2\cdot AO}; \qquad \frac{CC_1}{2} = \frac{3}{2};$$

$$CC_1 = \frac{2\cdot 3}{2} = \frac{6}{2} = 3\ cm.$$

Ответ: $CC_1 = 3\ cm.$

6. Вершины отрезка, не пересекающегося с плоскостью, удалены от плоскости на 30 cm и 50 cm. На каком расстоянии от плоскости находится точка, которая делит этот отрезок в отношении 3:7?



Случай 1. Дано: $AA_1 = 30\ cm;\ BB_1 = 50\ cm;$

$AC:CB = 3:7;\quad AC = 3x;\quad CB = 7x;$

$$AB = AC + CB = 3x + 7x = 10x;\qquad \frac{AC}{AB} = \frac{3x}{10x};$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{3}{10};\qquad AA_1 = C_1C_2 = B_1B_2 = 30\ cm;$$

$$BB_2 = BB_1 - B_1B_2 = 50\ cm - 30\ cm = 20\ cm;\qquad \Delta ACC_2 \sim \Delta ABB_2;$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CC_2}{BB_2};\quad \frac{3}{10} = \frac{CC_2}{20};\qquad CC_2 = \frac{3\cdot 20}{10} = 3\cdot 2 = 6\ cm;$$

$$CC_1 = CC_2 + C_1C_2 = 6\ cm + 30\ cm = 36\ cm.$$

Ответ: $CC_1 = 36\ cm.$

Случай 2. Дано: $AA_1 = 30\ cm;\ BB_1 = 50\ cm;$

$BC : AC = 3 : 7;\quad BC = 3x;\quad AC = 7x;\quad AB = AC + CB = 3x + 7x = 10x;$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{3x}{10x};\qquad \frac{BC}{AC} = \frac{3}{10};\qquad AA_1 = C_1C_2 = B_1B_2 = 30\ cm;$$

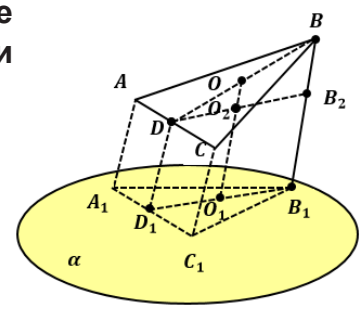
$$BB_2 = BB_1 - B_1B_2 = 50\ cm - 30\ cm = 20\ cm;\qquad \Delta ACC_2 \sim \Delta ABB_2;$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CC_2}{BB_2};\qquad \frac{7}{10} = \frac{CC_2}{20};\qquad CC_2 = \frac{7\cdot 20}{10} = 7\cdot 2 = 14\ cm;$$

$$CC_1 = CC_2 + C_1C_2 = 14\ cm + 30\ cm = 44\ cm.$$

Ответ: $CC_1 = 44\ cm$

7. На плоскость спроецирован правильный треугольник. Его вершины удалены от плоскости на 10 dm, 15 dm и 17 dm. Найдите расстояние от центра треугольника до плоскости проекций.



Дано: $CC_1 = 10\ dm;\quad AA_1 = 15\ dm;$

$BB_1 = 17\ dm.$ Найти: $OO_1 = ?$

$AD = DC$; $DD_1 = \dfrac{AA_1 + CC_2}{2} = \dfrac{15+10}{2} = \dfrac{25}{2}\ dm$;

$DD_1 = B_2B_1 = O_1O_2 = \dfrac{25}{2}\ dm$;

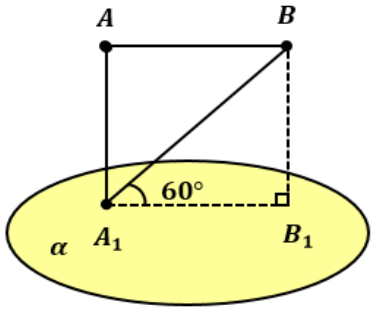
$BB_2 = BB_1 - B_2B_1 = 17 - \dfrac{25}{2} = \dfrac{34-25}{2} = \dfrac{9}{2}\ dm$; $\Delta DOO_2 \infty \Delta DBB_2$;

$DO : OB = 1 : 2$; $DO : DB = 1 : 3$; $\dfrac{DO}{DB} = \dfrac{OO_2}{BB_2}$; $\dfrac{1}{3} = \dfrac{OO_2}{\frac{9}{2}}$;

$OO_2 = \dfrac{\frac{9}{2}}{3} = \dfrac{9}{2\cdot 3} = \dfrac{3}{2}\ dm$; $OO_1 = OO_2 + O_2O_1 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{25}{2} = \dfrac{28}{2} = 14\ dm$.

Ответ: $OO_1 = 14\ dm$.

8. Дан отрезок AB, параллельный плоскости, его длина равна a. Отрезок BA_1, соединяющий вершину B отрезка с вершиной проекции A_1, образует угол 60° с плоскостью. Определите длину участка BA_1.



Дано: $AB \parallel \alpha$; $AB = a$; $\angle BA_1B_1 = 60°$.

Найти: $BA_1 = ?$

$A_1B_1 = AB = a$; $\cos\angle BA_1B_1 = \dfrac{A_1B_1}{A_1B}$;

$\cos 60° = \dfrac{a}{BA_1}$; $\dfrac{1}{2} = \dfrac{a}{BA_1}$; $BA_1 = 2a$.

Ответ: $BA_1 = 2a$.

ГЕОМЕТРИЯ

10 КЛАСС

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

Перевод с узбекского Балжан Уринбаева
Редактор Вероника Пак
Технический редактор Акмаль Сулаймонов
Корректор Людмила Ким
Верстальщик и дизайнер Ихволдин Салохитдинов
Художник Умид Сулаймонов

Разрешено в печать..2022. Формат 60x841/8.
Гарнитура “Arial”.Офсетная печать. Условный печатный лист 22.32.
Учётно-издательский лист 19.43. Тираж __. Заказ №__.